Mihai Iordache

Bazele electrotehnicii

MATRIX ROM
BUCUREȘTI

Prof. dr. ing
MIHAI IORDACHE

BAZELE ELECTROTEHNICII

MATRIX ROM
BUCUREŞTI 2008

PREFAȚĂ

Societatea tehnologică se bazează pe două elemente esențiale: energia și informația. Domeniile legate de conversia, transmisia și utilizarea energiei țin de ingineria sistemelor electrice de putere și de sistemele electromecanice, în timp ce problemele privind informația, legate de reprezentare, manipulare, transmisie și stocare, țin de discipline precum electronica analogică și digitală, controlul automat, comunicațiile.

Bazele Electrotehnicii este o disciplină fundamentală în pregătirea studenților în ingineria electrică. Bazată pe legile fizicii, această disciplină operează cu abstractizări necesare viitorului inginer de profil electric pentru a rezolva circuitele și sistemele reale, la un nivel conceptual înalt, undeva între fizică și matematică.

Rolul său de fundamentare teoretică a ingineriei electrice și de învățare a tehnicilor practice de analiză și proiectare a circuitelor, îi conferă un loc important în pregătirea studenților pentru studiul câmpului electromagnetic, circuitelor electronice (curenți slabi) și al circuitelor de putere (curenți tari). În afara frumuseții sale intrinseci, Bazele Electrotehnicii este nu numai un subiect important, dar și dificil de aprofundat. Pentru a facilita această înțelegere ne-am propus să prezentăm lucrarea de față ca o împletire între teorie și aplicații, inclusiv cu algoritmi de calcul, specifici diferitelor etape ale activității de proiectare a echipamentelor electrotehnice, a circuitelor electronice și a celor de putere.

În scopul asigurării unei înțelegeri sistematice și de profunzime a obiectivelor cursului de Bazele Electrotehnicii, am încercat să realizăm un echilibru între conceptualizarea matematică, susținerea principiilor fizice și abordarea inginerească a aplicațiilor.

Acestă lucrare cuprinde 9 capitole și un bogat material bibliografic.

Pentru ilustrarea tehnicilor și metodelor de analiză prezentate în lucrare toate capitole cuprind numeroase și variate exemple. Toate exemplele au rezolvări complete, unele în mai multe variante, cu comentarii și comparații între metode.

Rod al experienței didactice precum și al activității de cercetare a autorului în domeniul teoriei câmpului electromagnetic și al teoriei circuitelor electrice, lucrarea este astfel concepută încât să pregătească cititorul pentru utilizarea calculatorului în analiza câmpului electromagnetic, circuitelor electrice și structurilor neelectrice echivalente din punct de vedere matematic, în vederea optimizării soluției de proiectare a acestora, acordând o atenție specială prezentării algoritmilor și tehnicilor de calcul. De nivel superior, lucrarea se adresează în primul rând studenților de la facultatea de Automatică și Calculatoare, precum și: studenților de la toate facultățile de profil electric, doctoranzilor, inginerilor cercetători și proiectanți, tuturor celor care doresc să-și însușească și să aprofundeze metodele de analiză și proiectare asistată de calculator a sistemelor electromagnetice.

Autorul ține să mulțumească tuturor colegilor și doctoranzilor care au citit lucrarea și care au făcut numeroase observații și cu care autorul a avut ample discuții despre conținutul și prezentarea lucrării. Ținem să mulțumim în mod deosebit domnului dr. ing. Dragoș Niculae și domnilor doctoranzi: ing. Cătălina Popescu, ing. Dumitru Doncescu, ing. Olivian Stănică și ing. Andrei Ilie, care au citit cu atenție conținutul lucrării și au sesizat erorile de tehnoredactare și care, cu mult entuziasm, au editat o culegere de probleme aferente cursului.

Autorul — București Ianuarie 2008

CUPRINS

		Pag.
Cap. 1	BAZELE TEORIEI MACROSCOPICE A ELECTROMAGNETISMULUI	1
	1.1. MĂRIMI CE CARACTERIZEAZĂ STĂRILE ELECTROMAGNETICE ALE CORPURILOR	1
	1.1.1. Starea de încărcare electrică	1
	1.1.2. Starea de polarizare	2
	1.1.3. Starea de magnetizare	3
	1.1.4. Starea electrocinetică	3
	1.2. MĂRIMI CE CARACTERIZEAZĂ CÂMPUL ELECTROMAGNETIC	4
	1.3. REGIMURILE DE DESFĂŞURARE A FENOMENELOR ELECTRICE ŞI MAGNETICE	7
	1.4. CÂMPUL ELECTRIC IMPRIMAT	8
	1.5. LEGILE TEORIEI MACROSCOPICE A ELECTROMAGNETISMULUI	8
	1.5.1. Legea fluxului electric	8
	1.5.2. Legea fluxului magnetic	11
	1.5.3. Legea inducţiei electromagnetice	12
	1.5.4. Legea circuitului magnetic	13
	1.5.5. Legea conservării sarcinii electrice	18
	1.5.6. Legea conducţiei electrice (legea lui Ohm)	19
	1.5.7. Legea transformării energiei electrice în procesul conducţiei electrice (legea lui Joule - Lenz)	22
	1.5.8. Legea legăturii în câmp electric	23
	1.5.9. Legea polarizaţiei temporare	24
	1.5.10. Legea legăturii în câmp magnetic	25
	1.5.11. Legea magnetizaţiei temporare	25
	1.5.12. Legea electrolizei	28
Cap.2	PRINCIPALE TEOREME ALE TEORIE MACROSCOPICE A FENOMENELOR ELECTROMAGNETICE	29
	2.1. TEOREMA ENERGIEI ELECTROMAGNETICE. DENSITATEA FLUXULUI DE ENERGIE ELECTROMAGNETICĂ	29
	2.2. TRANSMITEREA ENERGIEI ELECTROMAGNETICE PRIN CONDUCTOARE	31
	2.3. PUTEREA ELECTROMAGNETICĂ TRANSMISĂ PRINTR-O LINIE ELECTRICĂ	32
	2.4. TEOREMA DE UNICITATE A CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC	34
	2.5. TEOREMA REFRACŢIEI LINIILOR DE CÂMP MAGNETIC	37
	2.6. CIRCUITE MAGNETICE	37
	2.6.1. Clasificarea elementelor de circuit	37
	2.6.2. Legea lui Ohm pentru circuite magnetice	38
	2.6.3. Teoremele lui Kirchhoff pentru circuite magnetice	39
	2.7. INDUCTIVITAŢI	40
	2.7.1. Inductivităţi proprii şi mutuale	40
	2.7.2. Inductivităţi de dispersie şi utile	43

...2.8. ENERGIA ŞI FORŢELE CÂMPULUI MAGNETIC 44
2.8.1. Energia câmpului magnetic 44
2.8.2. Teoremele forţelor generalizate în câmp magnetic 46
Cap.3 CONCEPTE DE BAZĂ ÎN TEORIA CIRCUITELOR ELECTRICE 50
3.1. SEMNALE ELECTRICE 50
3.2. ELEMENTE DE CIRCUIT 52
3.2.1. Aproximaţiile teoriei circuitelor electrice cu parametri concentraţi 52
3.2.2. Mărimi şi relaţii fundamentale pentru teoria circuitelor electrice 53
3.2.3. Clasificarea elementelor de circuit 54
3.2.4. Elemente de circuit pasive 55
3.2.4.1. Rezistorul 55
3.2.4.2. Bobina 58
3.2.4.3. Condensatorul 62
3.2.5. Elemente de circuit active 65
3.2.5.1. Surse independente 65
3.3. CLASIFICAREA CIRCUITELOR ELECTRICE 68
3.4. REGIMURILE DE FUNCŢIONARE ALE CIRCUITELOR ELECTRICE 69
3.5. TEOREMELE GENERALE ALE TEORIEI CIRCUITELOR ELECTRICE 70
3.5.1. Teoremele lui Kirchhoff 70
3.5.2. Teorema lui Tellegen 70
3.5.3. Teorema conservării puterilor 71
3.5.4. Teorema surselor ideale cu acţiune nulă (Vaschy) 71
Cap.4 CIRCUITE ELECTRICE DE CURENT CONTINU (C.C.) 73
4.1. INTRODUCERE 73
4.2. RELAŢII DE BAZĂ ALE CIRCUITELOR ELECTRICE REZISTIVE 74
4.2.1. Legea lui Ohm generalizată 74
4.2.2. Teoremele lui Kirchhoff 74
4.2.3. Teorema conservării puterilor 75
4.2.4. Teorema superpoziţiei 77
4.2.5. Teorema reciprocităţii 78
4.2.6. Teorema compensaţiei 79
4.2.7. Teoremele de transfigurare a circuitelor electrice 80
4.2.7.1. Echivalenţa circuitelor 80
4.2.7.2. Echivalenţa surselor reale 80
4.2.7.3. Transfigurarea serie 81
4.2.7.4. Transfigurarea paralel 82
4.2.7.5. Transfigurarea stea-poligon complet 84
4.2.8. Teoremele divizoarelor de tensiune şi de curent 88
4.2.9. Teoremele generatoarelor echivalente 88
4.2.10. Teorema transferului maxim de putere 90
4.2.11. Relaţii între mărimile unui dipol 94
4.3. ANALIZA CIRCUITELOR REZISTIVE LINIARE: METODE ŞI ALGORITMI DE CALCUL 95
4.3.1. Metoda teoremelor lui Kirchhoff 95
4.3.2. Metoda curenţilor de buclă 97

4.3.3. Metoda potențialelor nodurilor 102
4.3.4. Metoda nodală modificată 105
4.3.4.1. Contribuțiile elementelor de circuit liniare la matricea și termenul liber din ecuațiile nodale modificate 106
Cap.5 CIRCUITE ELECTRICE ÎN REGIM SINUSOIDAL (CURENT ALTERNATIV – C.A.) 110
5.1. CONCEPTUL DE CIRCUIT ELECTRIC ÎN REGIM SINUSOIDAL 110
5.2. MĂRIMI SINUSOIDALE 111
5.3. BAZELE METODEI SIMBOLICE DE REPREZENTARE ÎN COMPLEX A MĂRIMILOR SINUSOIDALE 114
5.3.1. Teorema combinațiilor liniare 115
5.3.2. Teorema derivatei 117
5.3.3. Teorema integralei 117
5.4. ECUAȚIILE LUI KIRCHHOFF ÎN FORMĂ SIMBOLICĂ 118
5.5. CIRCUITE DIPOLARE PASIVE ÎN REGIM SINUSOIDAL 123
5.6. PUTERI ÎN REGIM SINUSOIDAL 127
5.6.1. Puterea activă 128
5.6.2. Puterea aparentă 128
5.6.3. Puterea reactivă 129
5.6.4. Relații între puterile active, reactive și aparente ale unui dipol 130
5.6.5. Puterea complexă 130
5.7. CIRCUITE ELECTRICE FĂRĂ CUPLAJE MAGNETICE ÎN REGIM SINUSOIDAL 131
5.7.1. Circuite serie 131
5.7.2. Circuitul serie *R, L, C,* și rezonanța de tensiune 133
5.7.3. Circuite derivație 138
5.8. CIRCUITE CU CONEXIUNE MIXTĂ UTILIZATE ÎN TEHNICĂ 141
5.8.1. Circuite care debitează un curent sinusoidal independent de sarcină 141
5.8.2. Circuite dipolare complet rezistive 143
5.9. TEOREMELE CIRCUITELOR ELECTRICE ÎN REGIM SINUSOIDAL 144
5.9.1. Teorema transferului maxim de putere activă 144
5.9.2. Teoremele de conservare a puterilor 145
5.9.2.1. Compensarea puterii reactive. Îmbunătățirea factorului de putere 149
5.9.3. Transfigurarea stea-poligon complet 150
5.9.4. Teoremele generatoarelor echivalente 154
5.9.4.1. Teorema generatorului echivalent de tensiune (teorema lui Thévenin) 154
5.9.4.2. Teorema generatorului echivalent de curent (teorema lui Norton) 154
5.9.5. Eliminarea cuplajelor magnetice 157
5.10. ANALIZA CIRCUITELOR LINIARE ÎN REGIM SINUSOIDAL – METODE ȘI ALGORITMI DE CALCUL 158
5.10.1. Metoda teoremelor lui Kirchhoff în formă simbolică 158
5.10.2. Metoda curenților de buclă 159
5.10.3. Metoda potențialelor nodurilor 163

5.10.4. Metoda nodală modificată 166
5.11. FUNCȚII DE CIRCUIT 172
Cap. 6 CIRCUITE ELECTRICE TRIFAZATE 178
6.1. INTRODUCERE 178
6.2. SISTEME DE MĂRIMI TRIFAZATE 178
6.3. CONEXIUNILE CIRCUITELOR TRIFAZATE 182
6.3.1. Conexiunea stea în regim simetric 182
6.3.2. Conexiunea triunghi în regim simetric 183
6.4. CIRCUITE TRIFAZATE CU CUPLAJE MAGNETICE 184
6.4.1. Receptor trifazat în conexiune stea cu cuplaje magnetice 184
6.4.2. Receptor trifazat în conexiune triunghi cu cuplaje magnetice 185
6.4.3. Linie trifazată cu cuplaje magnetice între conductoarele fazelor 185
6.5. ANALIZA CIRCUITELOR TRIFAZATE 187
6.5.1. Introducere 187
6.5.2. Analiza unor receptoare trifazate simple alimentate cu tensiuni simetrice 187
6.5.2.1.Receptor dezechilibrat în conexiune stea 187
6.5.2.2. Receptor echilibrat în conexiune stea 191
6.5.2.3. Receptor dezechilibrat în conexiune triunghi 192
6.5.2.4. Receptor echilibrat în conexiune triunghi 194
6.5.3. Analiza unor receptoare trifazate simple alimentate cu tensiuni nesimetrice, prin metoda directă 198
6.6. PUTERI ÎN SISTEMELE TRIFAZATE 198
6.6.1. Puteri în sistemele trifazate funcționând în regim nesimetric 198
6.6.2. Puteri în sistemele trifazate funcționând în regim simetric 200
6.6.3. Factorul de putere în sistemele trifazate dezechilibrate 201
Cap. 7 CIRCUITE ELECTRICE LINIARE ÎN REGIM PERIODIC NESINUSOIDAL 203
7.1. REGIMUL PERIODIC NESINUSOIDAL 203
7.2. MĂRIMI PERIODICE 203
7.3. DEZVOLTAREA ÎN SERIE FOURIER 204
7.3.1. Forme ale dezvoltării în serie Fourier utilizate în ingineria electrică 206
7.4. PROPRIETĂȚI ALE MĂRIMILOR PERIODICE 211
7.5. PUTERI ÎN REGIM PERIODIC NESINUSOIDAL 214
7.6. ANALIZA CIRCUITELOR ELECTRICE LINIARE PE BAZA DEZVOLTĂRII ÎN SERIE FOURIER 216
7.7. ANALIZA REGIMURILOR PERIODICE PRIN METODA REGIMURILOR TRANZITORII REPETATE 222
7.8. CIRCUITE TRIFAZATE ÎN REGIM PERIODIC NESINUSOIDAL 224
Cap. 8 CIRCUITE LINIARE ÎN REGIM TRANZITORIU 227
8.1. CARACTERIZAREA REGIMULUI TRANZITORIU 227
8.1.1. Elemente dinamice de circuit. Regimul tranzitoriu 227
8.2. METODA VARIABILELOR DE STARE 230
8.2.1. Mărimile de stare ale circuitelor electrice și ecuațiile lor 230
8.2.2. Formularea ecuațiilor de stare 231
8.2.2.1. Metoda topologică a arborelui normal 231
8.2.3. Soluțiile ecuațiilor de stare 233

8.2.3.1. Funcțiile de matrice și proprietățile lor 234
8.3. METODA TRANSFORMATEI LAPLACE 237
8.3.1. Transformata Laplace 237
8.3.2. Teoremele transformatei Laplace 238
8.3.3. Transformata Laplace și funcția de circuit 241
8.3.4. Convoluția 242
8.3.5. Ecuațiile operaționale ale circuitelor electrice 242
8.3.6. Transformata Laplace inversă 246
8.3.7. Metoda separării componentelor tranzitorii și permanente 250
8.3.8. Metoda nodală modificată 253
8.3.9. Funcții de circuit 258
Cap. 9 CUADRIPOLI ȘI FILTRE 262
9.1. TETRAPOLI 262
9.2. ECUAȚIILE CUADRIPOLULUI LINIAR 263
9.3. SCHEMELE ECHIVALENTE ALE CUADRIPOLILOR LINIARI 265
9.4. IMPEDANȚELE CARACTERISTICE ȘI EXPONENTUL DE TRANSFER PE IMPEDANȚE CARACTERISTICE 267
9.5. IMPEDANȚELE IMAGINI ȘI EXPONENTUL DE TRANSFER PE IMPEDANȚE IMAGINI 271
9.6. FILTRE ELECTRICE 274
9.6.1. Introducere 274
9.6.2. Studiul filtrelor fără pierderi 275
9.6.3. Filtre fără pierderi, simetrice 276
9.6.4. Filtre de tip K 277
BIBLIOGRAFIE 281

CAP.1. BAZELE TEORIEI MACROSCOPICE A ELECTROMAGNETISMULUI

Stările şi fenomenele fizice se caracterizează cu ajutorul mărimilor fizice care se clasifică în:

- *mărimi primitive* - se introduc pe cale experimentală, indicând explicit procedeul de măsurare;
- *mărimi derivate* - se definesc, prin relaţii logice, cu ajutorul mărimilor primitive.

Teoria macroscopică a fenomenelor electromagnetice utilizează şase specii de mărimi primitive specifice, care caracterizează complet starea electromagnetică a corpurilor şi starea câmpului electromagnetic.

Starea electromagnetică a corpurilor se caracterizează macroscopic cu următoarele patru mărimi primitive: *sarcina electrică* (q – [C]) – caracterizează global starea de încărcare electrică a corpurilor, *momentul electric* ($\overline{p}$ – [Cm]) – caracterizează integral starea de polarizare a corpurilor , *momentul magnetic* ($\overline{m}$ – [Am^2]) – caracterizează global starea de magnetizare a corpurilor şi *intensitatea curentului electric de conducţie* (i – [A]) – caracterizează integral starea electrocinetică a conductoarelor.

Starea câmpului electromagnetic se caracterizează macroscopic prin următoarele două mărimi primitive: *vectorul intensităţii câmpului electric în vid* ($\overline{E}_v$ – [V/m]) – caracterizează local starea electrică a câmpului electromagnetic în vid şi *vectorul inducţiei magnetice în vid* ($\overline{B}_v$ – [T]) – caracterizează punctual starea magnetică a câmpului electromagnetic în vid.

Mărimile derivate utilizate în teoria câmpului electromagnetic sunt: tensiunea electrică, tensiunea magnetică, fluxul electric, fluxul magnetic, solenaţia, rezistenţa, capacitatea, inductivitatea etc.

1.1. MĂRIMI CE CARACTERIZEAZĂ STĂRILE ELECTROMAGNETICE ALE CORPURILOR

1.1.1. Starea de încărcare electrică

Starea de încărcare electrică se poate obţine prin frecarea corpurilor. Dacă se explorează câmpul electric în vid cu ajutorul unui corp de probă încărcat cu sarcină electrică, se determină că forţa care se exercită asupra acestuia are expresia:

$$\overline{F}_e = q\overline{E}_v . \tag{1.1}$$

Relaţia (1.1) introduce *mărimea primitivă* ***sarcină electrică*** (q), numită şi sarcină electrică adevărată, ce caracterizează global starea de încărcare electrică a unui corp. Aceasta este o mărime *scalară*, dotată cu semn. Unitatea de măsură în SI se numeşte *coulomb* [C].

În cazul unui corp mare, caracterizarea stării de încărcare electrică se face local (într-un punct), cu ajutorul unor mărimi derivate, numite *densităţi de sarcină electrică*:

- *densitatea lineică*: $\rho_l \overset{d}{=} \lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta l} = \dfrac{dq}{dl}$ [C/m]; (1.2)
- *densitatea de suprafaţă*: $\rho_s \overset{d}{=} \lim\limits_{\Delta A \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta A} = \dfrac{dq}{dA}$ [C/m^2]; (1.3)
- *densitatea de volum*: $\rho_V \overset{d}{=} \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta V} = \dfrac{dq}{dV}$ [C/m^3]. (1.4)

În cazul unui domeniu finit în care sarcina este repartizată în toate cele trei moduri, sarcina totală cuprinsă în domeniu este:

$$q = \int_V \rho_V \mathrm{d}V + \int_S \rho_S \mathrm{d}A + \int_C \rho_l \mathrm{d}l . \qquad (1.5)$$

Dacă se freacă între ele două corpuri, unul se încarcă cu sarcină pozitivă, iar celălalt cu sarcină negativă. În general, sarcina totală a unui sistem de corpuri izolat (înconjurat de materiale izolante) este constantă.

Corpurile încărcate cu sarcini electrice îşi asociază un sistem fizic numit *câmp electric*, prin care se transmit între corpuri cu proprietăţi electrice similare forţe şi cupluri electrice.

După modul cum transmit starea de electrizare se disting două clase de materiale de importanţă esenţială în industria electrotehnică:

- ***materiale electroconductoare*** - din care categorie fac parte: metalele şi aliajele lor, cărbunele, anumite soluţii de săruri, baze, acizi. *Dintre aceste materiale deosebit de importante pentru industria electrotehnică sunt Cu şi Al, din care se realizează conductoarele liniilor electrice aeriene şi în cablu şi înfăşurările maşinilor şi transformatoarelor electrice.* Materialele electroconductoare prezintă proprietatea că la trecerea curentului electric, în ele se dezvoltă pierderi de putere prin efect Joule, proporţionale cu pătratul intensităţii curentului.
- ***materiale electroizolante***, numite şi ***materiale dielectrice***, din care fac parte: lemnul, sticla, mătasea, porţelanul, hârtia, uleiul, lacurile, aerul uscat, bachelita, cauciucul, policlorura de vinil etc. În materialele dielectrice folosite în industria electrotehnică se dezvoltă pierderi de putere proporţionale cu pătratul tensiunii şi cu o mărime de material numită tangenta unghiului de pierderi.

1.1.2. Starea de polarizare

Există corpuri neîncărcate electric, care la introducerea într-un câmp electric exterior, sunt supuse unor cupluri şi forţe având expresiile:

$$\overline{C} = \overline{p} \times \overline{E}_v , \qquad (1.6)$$

$$\overline{F} = grad\left(\overline{p} \cdot \overline{E}_v\right). \qquad (1.7)$$

În relaţia (1.7) operatorul *grad* acţionează numai asupra lui $\overline{E}_v$

Cuplul tinde să alinieze momentul electric pe direcţia vectorului câmp electric, iar forţa tinde să atragă corpul polarizat în regiunile de câmp mai intens. În câmp omogen forţa este nulă.

Starea specifică a corpurilor supuse acestor acţinuni este *starea de polarizare*. Şi corpurile polarizate îşi asociază un câmp electric.

Starea de polarizare a unui corp mic este caracterizată global de ***momentul electric*** ($\overline{p}$) – ***mărime primitivă vectorială*** având unitatea de măsura *coulomb metru* [Cm].

În cazul unui corp de dimensiuni mari, starea de polarizare se caracterizează local cu ajutorul densităţii de volum a momentului electric, mărime derivată vectorială, numită *polarizaţie* ($\overline{P}$):

$$\overline{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \overline{p}}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}\overline{p}}{\mathrm{d}V}, \qquad (1.8)$$

având unitatea de măsură *coulomb pe metru pătrat* [C/m²].

Starea de polarizare se poate obţine prin:

- tratamente speciale precum: deformare mecanică (piezoelectricitate), încălzire (piroelectricitate), topire şi solidificare într-un câmp electric intens (electreţi);
- simpla introducere a lor într-un câmp electric.

Materialele din prima categorie din care fac parte cristalele de cuarț, sarea Seignette și turmalina, au o stare de polarizare independentă de câmpul electric, numită *polarizație permanentă*, caracterizată de momentul electric permanent $\overline{p}_p$.

Din a doua categorie fac parte dielectricii a căror stare de polarizare apare numai în prezența câmpului electric și dispare când acesta se anulează. O astfel de *polarizare* se numește *temporară* și este caracterizată de momentul electric temporar $\overline{p}_t$.

Cele două tipuri de polarizare nu se exclud, astfel încât atât momentul electric cât și polarizația satisfac relațiile:

$$\overline{p} = \overline{p}_t + \overline{p}_p, \tag{1.9}$$

$$\overline{p} = \overline{p}_t + \overline{p}_p, \tag{1.10}$$

Metalele sunt practic nepolarizabile electric.

1.1.3. Starea de magnetizare

Corpurile asupra cărora se exercită forțe și cupluri la introducerea lor în câmp magnetic prezintă starea de magnetizare. Corpurile magnetizate își asociază un câmp magnetic.

Starea de magnetizare a unui corp mic se caracterizează global cu ajutorul mărimii primitive vectoriale numită ***moment magnetic*** ($\overline{m}$), care se măsoară în *amper metru pătrat* [Am^2] și este pusă în evidență prin relațiile:

$$\overline{C} = \overline{m} \times \overline{B}_v, \tag{1.11}$$

$$\overline{F} = grad\left(\overline{m} \cdot \overline{B}_v\right). \tag{1.12}$$

În relația (1.12) operatorul *grad* acționează numai asupra lui $\overline{B}_v$

Cuplul tinde să alinieze momentul magnetic pe direcția vectorului câmp magnetic, iar forța tinde să atragă corpul magnetizat în regiunile de câmp mai intens. În câmp omogen forța este nulă.

Caracterizarea stării de magnetizare a unui corp mare se face local, cu ajutorul densității de volum a momentului magnetic, mărime derivată numită *magnetizație* ($\overline{M}$):

$$\overline{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \overline{m}}{\Delta V} = \frac{d\overline{m}}{dV} \tag{1.13}$$

având unitatea de măsură *amper pe metru* [A/m].

Unele corpuri ajung în stare de magnetizare numai în prezența câmpului magnetic, starea numindu-se *magnetizație temporară*.

Altor corpuri le este proprie starea de magnetizare, independent de prezența câmpului magnetic. Această stare se numește *magnetizație permanentă*.

Cele două tipuri de magnetizație nu se exclud reciproc, astfel încât momentul magnetic și magnetizația satisfac relațiile:

$$\overline{m} = \overline{m}_t + \overline{m}_p, \tag{1.14}$$

$$\overline{M} = \overline{M}_t + \overline{M}_p. \tag{1.15}$$

1.1.4. Starea electrocinetică a conductoarelor se caracterizează cu ajutorul mărimii primitive scalare numită ***intensitate a curentului electric de conducție*** (i) care străbate o anumită suprafață S (în general secțiunea transversală a conductorului)

$$i_S \overset{d}{=} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q_S}{\Delta t} = \frac{dq_S}{dt}. \tag{1.16}$$

având ca unitate de măsură *amperul* [A].

Considerând o porțiune de lungime Δl dintr-un conductor filiform parcurs de curentul electric de conducție i, la introducerea în câmp magnetic, asupra lui se exercită o forță

$$\Delta\overline{F} = i\Delta\overline{l} \times \overline{B}_v, \tag{1.17}$$

numită forță electromagnetică (Laplace).

Pentru caracterizarea locală (într-un punct al suprafeței) a stării electrocinetice, se introduce mărimea derivată numita *densitate a curentului de conducție* ($\overline{J}$), relația dintre cele două mărimi fiind:

$$i = \int_S \overline{J}\overline{n}_S \mathrm{d}A. \tag{1.18}$$

Unitatea de măsură a densității curentului de conducție este *amper pe metru pătrat* [A/m²].

Mărimile primitive ce caracterizează starea electromagnetică a corpurilor și mărimile derivate din ele, împreună cu unitățile de măsură din sistemul internațional de unități (SI) sunt recapitulate în Tabelul 1.1.

Tabelul 1.1.

Mărime primitivă	Simbol	Unitate	Mărime derivată	Simbol	Unitate
Sarcina electrică	q	C	Densitate lineică	ρ_l	C/m
			Densitate superficială	ρ_s	C/m²
			Densitate volumetrică	ρ_v	C/m³
Momentul electric	$\overline{p}$	Cm	Polarizația	$\overline{P}$	C/m²
Momentul magnetic	$\overline{m}$	Am²	Magnetizația	$\overline{M}$	A/m
Intensitatea curentului electric de conducție	i	A	Densitatea curentului electric de conducție	$\overline{J}$	A/m²

1.2. MĂRIMI CE CARACTERIZEAZĂ CÂMPUL ELECTROMAGNETIC

Câmpul electric și câmpul magnetic reprezintă aspecte particulare ale unui sistem fizic unic, numit *câmp electromagnetic* (noțiune introdusă de Faraday în 1831). Câmpul electromagnetic este o formă de existență a materiei cu următoarele caracteristici:

- reprezintă un *sistem fizic* distinct față de corpuri, putând exista atât asociat acestora (în afară și în interiorul lor) cât și independent de ele (în vid, sub formă de unde electromagnetice);
- reprezintă suportul fizic ce permite transmiterea interacțiunilor electromagnetice din aproape în aproape, în timp și spațiu (cu viteză finită), la orice distanță.

În vid, starea câmpului electromagnetic se caracterizează local (într-un punct) cu ajutorul a două mărimi primitive: ***vectorul intensității câmpului electric în vid*** ($\overline{E}_v$) și ***vectorul inducției magnetice în vid*** ($\overline{B}_v$). Aceste mărimi se introduc pe cale experimentală, prin explorarea câmpului electric, respectiv magnetic, în vid, cu ajutorul unui mic corp de probă încărcat cu sarcină electrică q, măsurând forța cu care câmpul acționează asupra acestuia.

Astfel:

- în câmp electric această forță, exprimată cu relația (1.1), introduce mărimea $\overline{E}_v$, a cărei unitate de măsură este *volt pe metru* [V/m];

- în câmp magnetic, forța exercitată asupra corpului care se deplasează cu viteza constantă $\overline{v}$, numită *forța lui Lorentz*, exprimată cu relația

$$\overline{F} = q\overline{v} \times \overline{B}_v, \tag{1.19}$$

introduce mărimea $\overline{B}_v$, având ca unitate de măsură *tesla* [T].

În corpuri, starea câmpului electromagnetic este caracterizată macroscopic prin următoarele mărimi:

- intensitatea câmpului electric $\overline{E}$, care în vid coincide cu $\overline{E}_v$, având unitatea de măsură *volt pe metru* {V/m];
- inducția electrică $\overline{D}$, care în vid satisface relația $\overline{D}_v = \varepsilon_0 \overline{E}_v$, cu unitatea de măsură *coulomb pe metru pătrat* [C/m²]; $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}$ [F/m] (*Farazi pe metru*), este o constantă universală, și se numește permitivitatea absolută a vidului.
- intensitatea câmpului magnetic $\overline{H}$, care în vid satisface relația $\overline{B}_v = \mu_0 \overline{H}_v$, cu unitatea de măsură *amper pe metru* [A/m]; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ [H/m] (*Henry pe metru*), este o constantă universală, și se numește permeabilitatea absolută a vidului.
- inducția magnetică $\overline{B}$, care în vid coincide cu $\overline{B_v}$, cu unitatea de măsură *tesla* [T].

Aceste patru mărimi de stare locală (funcții de punct), se introduc cu ajutorul celor două mărimi primitive $\overline{E}_v$ și $\overline{B}_v$ prin experiențe idealizate, motiv pentru care ele sunt denumite subspecii de mărimi primitive, astfel:

> în corpurile polarizate se definesc $\begin{cases} \overline{E} = f(\overline{E_v}) \\ \overline{D} = f(\overline{E_v}) \end{cases}$,

> în corpurile magnetizate se definesc $\begin{cases} \overline{H} = f(\overline{B_v}) \\ \overline{B} = f(\overline{B_v}) \end{cases}$.

Cu ajutorul acestor mărimi se definesc patru mărimi derivate importante în cadrul teoriei macroscopice a electromagnetismului:

- tensiunea electrică (u)- unitate de măsură *voltul* [V];
- fluxul electric (Ψ)- unitate de măsură *coulombul* [C];
- tensiunea magnetică (u_m)- unitatea de măsură *amper* (A) sau *amper-spiră* (A.sp);
- fluxul magnetic (Φ) cu unitatea de măsură *weberul* (Wb).

  Relațiile de definiție sunt următoarele:

- *tensiunea electrică* între două puncte A,B, calculată de-a lungul unei curbe deschise, C, este:

$$u_{AB(C)} \stackrel{d}{=} \int_{A(C)}^{B} \overline{E d s}, \tag{1.19}$$

unde $\overline{ds}$ este elementul de linie orientat (fig. 1.1).

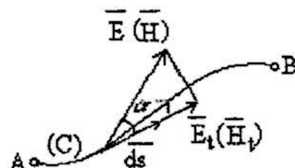


Fig. 1.1. Definiția tensiunii electrice.

Dacă integrala se calculează pe o curbă închisă, Γ, atunci mărimea corespunzătoare se numeşte *tensiune electromotoare* (t.e.m.) şi se exprimă cu relaţia:

$$e_{\Gamma} \overset{d}{=} \oint_{\Gamma} \overline{E \mathrm{d}s}. \tag{1.20}$$

- *fluxul electric* printr-o suprafaţă oarecare, deschisă, *S*, este:

$$\Psi_S \overset{d}{=} \int_S \overline{D n_S} \mathrm{d}A, \tag{1.21}$$

unde $\overline{n}_S$ este versorul normalei la suprafaţă. Dacă suprafaţa se sprijină pe o curbă închisă, Γ, atunci relaţia (1.21) devine:

$$\Psi_{S_\Gamma} \overset{d}{=} \int_{S_\Gamma} \overline{D n_{S_\Gamma}} \mathrm{d}A, \tag{1.22}$$

unde d*A* reprezintă elementul de arie neorientat.

Sensul normalei la suprafaţă este asociat cu sensul de parcurgere al curbei după regula burghiului drept (fig. 1.2).

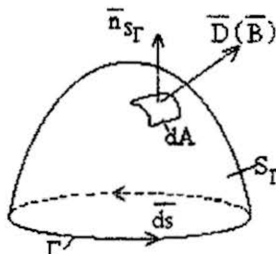


Fig. 1.2. Definiţia fluxului electric (magnetic).

Dacă se calculează fluxul electric printr-o suprafaţă închisă, Σ, atunci relaţia de definiţie devine:

$$\Psi_{\Sigma} \overset{d}{=} \oint_{\Sigma} \overline{D n_{\Sigma}} \mathrm{d}A. \tag{1.23}$$

Sensul pozitiv al normalei la suprafaţa închisă se consideră de la interior către exterior.

- *tensiunea magnetică* între două puncte A,B, se defineşte ca şi tensiunea electrică (fig. 1.1) de-a lungul unei curbe deschise:

$$u_{mAB} \overset{d}{=} \int_{A(C)}^{B} \overline{H \mathrm{d}s}. \tag{1.24}$$

Dacă integrala se efectuează pe o curbă închisă, atunci se defineşte *tensiunea magnetomotoare* (t.m.m.):

$$u_{mm\Gamma} \overset{d}{=} \oint_{\Gamma} \overline{H \mathrm{d}s}. \tag{1.25}$$

- *fluxul magnetic* se defineşte ca şi fluxul electric (fig. 1.2), fie prin suprafeţe deschise, fie prin suprafeţe închise, cu relaţiile:

$$\Phi_S \stackrel{d}{=} \int_S \overline{B n_S} \mathrm{d}A, \tag{1.26}$$

$$\Phi_{S_\Gamma} \stackrel{d}{=} \int_{S_\Gamma} \overline{B n_{S_\Gamma}} \mathrm{d}A, \tag{1.27}$$

$$\Phi_\Sigma \stackrel{d}{=} \oint_\Sigma \overline{B n_\Sigma} \mathrm{d}A. \tag{1.28}$$

Notă. Rămân valabile toate observațiile făcute la fluxul electric în legătură cu normalele la suprafețe.

Alte mărimi derivate importante sunt: solenația (Θ), rezistența (R), capacitatea (C), inductivitatea (L) etc.

În Tabelul 1.2 este prezentată corespondența dintre aceste mărimi și unitățile de măsură.

Tabelul 1.2

Mărime primitivă (subspecie)	Simbol	Unitate	Mărime derivată	Simbol	Unitate
Intensitatea câmpului electric în vid (în corpuri)	$\overline{E}_v$ ($\overline{E}$)	V/m	Tensiunea electrică	u	V
Inducția electrică în corpuri	$\overline{D}$	C/m^2	Fluxul electric	Ψ	C
Intensitatea câmpului magnetic în corpuri	$\overline{H}$	A/m	Tensiunea magnetică	u_m	A (A.sp)
Inducția magnetică în vid (în corpuri)	$\overline{B}_v$ ($\overline{B}$)	T	Fluxul magnetic	Φ	Wb

1.3. REGIMURILE DE DESFĂȘURARE A FENOMENELOR ELECTRICE ȘI MAGNETICE

După modul de variație în timp a mărimilor electrice și magnetice, stările electromagnetice se pot desfășura în următoarele regimuri:

- ***regimul static***, în care mărimile de stare nu variază în timp și nu se produc transformări energetice; în acest regim fenomenele electrice se produc independent de cele magnetice și pot fi studiate în cadrul unor capitole distincte ale teoriei, numite *electrostatica* și respectiv *magnetostatica*;
- ***regimul staționar***, numit și regim de curent continuu, în care mărimile nu variază în timp, dar interacțiunile câmpului electromagnetic cu corpurile sunt însoțite de transformări energetice;
- ***regimul cvasistaționar***, în care mărimile variază în timp, dar suficient de lent încât să se poată neglija curenții de deplasare în raport cu cei de conducție, și influența lor magnetică peste tot, cu excepția dielectricului condensatoarelor; este cel mai important regim din punct de vedere al aplicațiilor tehnice ;
- ***regimul nestaționar*** (regim variabil) caracterizat de cea mai generală formă de variație în timp a mărimilor, în care intervine fenomenul de radiație electromagnetică.

1.4. CÂMPUL ELECTRIC IMPRIMAT

Experienţa arată că starea electrocinetică a conductoarelor este produsă uneori de cauze de natură neelectromagnetică (de exemplu de o pilă galvanică). Efectul acestor cauze se echivalează cu efectul unui câmp electric ce ar determina aceeaşi stare electrocinetică. Acest câmp se numeşte *câmp electric imprimat*. El este localizat fie în volumul fie pe suprafaţa de contact a corpurilor conductoare şi se caracterizează local prin mărimea derivată vectorială numită *intensitatea a câmpului electric imprimat*- $\overline{E_i}$.

$\overline{E_i}$ este o mărime de material şi caracterizează conductoarele neomogene din punct de vedere structural, termic, chimic şi accelerate.

Proprietăţile globale ale câmpului electric imprimat în raport cu o anumită curbă sunt exprimate de integrala de linie a vectorului $\overline{E_i}$ în raport cu acea curbă, mărimea corespunzătoare numindu-se *tensiune electromotoare imprimată* (deoarece produce acelaşi efect ca o t.e.m):

$$e_{i(C)} = \int_C \overline{E_i \mathrm{d}s}. \tag{1.29}$$

1.5. LEGILE TEORIEI MACROSCOPICE A ELECTROMAGNETISMULUI

Legile sunt relaţii determinate experimental care exprimă raporturi obiective şi esenţiale între fenomene şi sunt stabilite prin generalizarea datelor experimentale, pe baza abstractizării.

Teoremele sunt relaţii care se pot deduce prin analiză logică din altele (în ultimă instanţă din legi).

Legile teoriei macroscopice a fenomenelor electromagnetice se clasifică în:

- *legi generale* – valabile pentru orice fel de corpuri, indiferent de regimul de desfăşurare al fenomenelor şi independent de caracteristicile de material ale mediului. În această categorie intră:
  - legea fluxului electric,
  - legea fluxului magnetic,
  - legea inducţiei electromagnetice,
  - legea circuitului magnetic,
  - legea conservării sarcinii electrice,
  - legea transformării energiei electromagnetice în procesul conducţiei electrice (legea lui Joule),
  - legea legăturii în câmp electric,
  - legea legăturii în câmp magnetic;
- *legi de material* – sunt valabile numai pentru anumite corpuri, fiind dependente de caracteristicile de material ale acestora şi de vitrza de variaţie (frecvenţa) a mărimilor:
  - legea polarizaţiei temporare,
  - legea magnetizaţiei temporare,
  - legea conducţiei electrice (legea lui Ohm),
  - legea electrolizei.

1.5.1. Legea fluxului electric

Corpurile încărcate cu sarcini electrice îşi asociază un câmp electric.

Liniile de câmp electric sunt linii deschise care pleacă de pe corpurile încărcate cu sarcini pozitive şi ajung pe corpurile încărcate cu sarcini negative (fig. 1.3).

Suprafețele perpendiculare în orice punct pe liniile de câmp se numesc *suprafețe echipotențiale*.

Vectorul intensității câmpului electric și vectorul inducției electrice sunt tangenți în fiecare punct la linia de câmp și, fiind funcții de punct $\overline{E}(r)$, respectiv $\overline{D}(r)$, au valori constante în toate punctele aceleiași suprafețe echipotențiale.

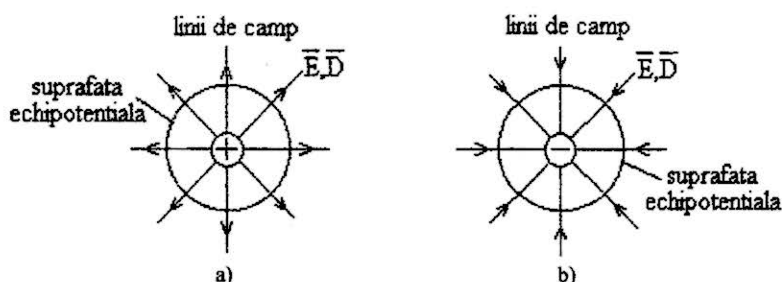


Fig. 1.3. Structura liniilor de câmp electric.

Dacă înconjurăm cu o suprafață închisă un corp încărcat cu sarcină electrică, toate liniile de câmp vor străbate suprafața. Fluxul electric este mărimea ce caracterizează câmpul electric din punct de vedere al valorilor pe care le ia inducția electrică în toate punctele acestei suprafeței.

"În orice moment de timp și indiferent de modul de variație al mărimilor fluxul electric Ψ prin orice suprafață închisă Σ este egal cu sarcina electrică $q_{V\Sigma}$ localizată în domeniul delimitat de această suprafață":

$$\Psi_\Sigma \stackrel{d}{=} \oint_\Sigma \overline{D n_\Sigma} \mathrm{d}A = q_{V\Sigma}, \tag{1.30}$$

unde $\overline{n}_\Sigma$ reprezintă normala exterioară la suprafața închisă Σ (fig. 1.4).

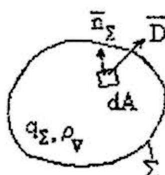


Fig. 1.4. Referitor la legea fluxului electric.

Trecând de pe suprafața Σ în domeniul (arbitrar) delimitat de aceasta, V_Σ, (cu teorema lui Stokes) și presupunând că toate corpurile încărcate electric din interiorul domeniului V_Σ au densitate de volum, se obține forma locală a legii în domenii de continuitate și netezime a proprietăților electrice:

$$\int_{V\Sigma} div\overline{D n_\Sigma} \mathrm{d}A = \int_{V\Sigma} \rho_V \mathrm{d}V, \tag{1.31}$$

de unde rezultă

$$div\overline{D} = \rho_V. \tag{1.32}$$

La o suprafață de discontinuitate imobilă și infinit extinsă (între două medii cu proprietăți electrice diferite) încărcată cu densitate de suprafață a sarcinii electrice se obține o *formă locală* valabilă în toate punctele suprafeței:

$$D_{2n} - D_{1n} = \rho_s. \tag{1.33}$$

Dacă suprafața nu este încărcată cu sarcină, se obține relația de conservare a componentelor normale ale inducției electrice:

$$D_{2n} = D_{1n}. \tag{1.34}$$

În medii liniare, omogene, izotrope şi fără polarizaţie permanentă inducţia electrică este direct proporţională cu intensitatea câmpului electric

$$\overline{D} = \varepsilon \overline{E}, \tag{1.35}$$

unde $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ este permitivitatea absolută a mediului, iar ε_r este permitivitatea relativă.

În aceste condiţii legea fluxului electric devine

$$\oint_{\Sigma} \overline{E dA} = \frac{q_{V_\Sigma}}{\varepsilon}, \tag{1.36}$$

numită *teorema lui Gauss*.

În regim static şi staţionar potenţialul electric într-un punct oarecare se defineşte prin relaţia:

$$V(P) = V(P_0) - \int_{P_0}^{P} \overline{E ds}. \tag{1.37}$$

Legea fluxului electric în forma integrală şi teorema lui Gauss permit calculul inducţiei electrice şi al intensităţii câmpului electric pentru configuraţii cu simetrie.

Aplicaţia 1.1. Calculul intensităţii câmpului electric produs de un corp punctiform încărcat cu sarcina q, situat întru mediu liniar, omogen şi izotrop cu $\varepsilon_r = 1$.

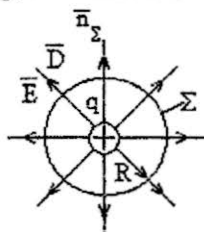


Fig. 1.5. Câmpul electric produs de un corp punctiform încărcate cu sarcina *q*.

Aplicând legea fluxului electric pe o sferă cu centrul pe corp şi rază arbitrară R, rezultă:

$$\Psi_\Sigma = \int_\Sigma \overline{D n_\Sigma} \mathrm{d}A = D(R) \int_\Sigma \mathrm{d}A = D(R) \cdot 4\pi R^2 = q_{V\Sigma},$$

de unde, ţinând seama de relaţia dintre intensitatea câmpului electric şi inducţie, se obţine intensitatea câmpului electric în orice punct de pe suprafaţa Σ

$$E(R) = \frac{D(R)}{\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 R^2}, \quad \overline{E}(R) = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\overline{R}}{R^3}.$$

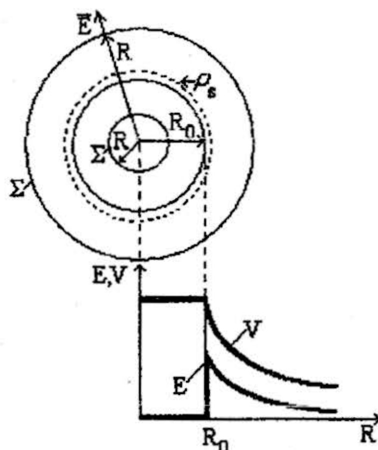


Fig. 1.6. Referitoare la calculul câmpului şi potenţialului electric produse de o sferă încărcată uniform cu densitate de sarcină ρ_S.

Aplicaţia 1.2. Să se calculeze intensitatea câmpului electric şi potenţialul electric produse de o sferă de rază R_0 uniform încărcată cu densitatea superficială de sarcină ρ_s=const. (fig. 1.6).

Se calculează cele două mărimi în două domenii: în interiorul şi în exteriorul sferei încărcate cu sarcină.

Datorită simetriei sferice, liniile câmpului electric sunt radiale. Se consideră o suprafaţă închisă Σ de rază R şi se aplică legea fluxului electric.

a) Pentru $R > R_0$

b)

$$\Psi_{\Sigma R} = \int_{\Sigma R} \overline{D}(R)\overline{n_\Sigma} \mathrm{d}A = \varepsilon_0 E(R) \int_{\Sigma R} \mathrm{d}A = \varepsilon_0 E(R) \cdot 4\pi R^2,$$

$$q_{V_\Sigma} = \int_{V\Sigma} \rho_s \mathrm{d}A = \rho_s \int_{V\Sigma} \mathrm{d}A = \rho_s \cdot 4\pi \cdot R_0^2.$$

Egalând cele două relații rezultă intensitatea câmpului electric

$$E(R)=\frac{\rho_s}{\varepsilon_0}\frac{R_0^2}{R^2}.$$

Presupunând potențialul punctelor de la infinit nul, potențialul electric produs într-un punct a distanța R de centrul sferei se calculează cu relația

$$V(R)=V(\infty)-\int_{\infty}^{R}\overline{E}\mathrm{d}\overline{s}=\int_{R}^{\infty}\overline{E}\mathrm{d}\overline{s}=\frac{\rho_s}{\varepsilon_0}\int_{R}^{\infty}\frac{R_0^2}{R^2}\mathrm{d}R=\frac{\rho_s}{\varepsilon_0}\frac{R_0^2}{R}.$$

b) Pentru $R<R_0$, $q_{V_\Sigma}=0$, din legea fluxului electric rezultă $\Psi_\Sigma=0$, deci $D(R)=0$ și $E(R)=0$.

Pentru $R\leq R_0$, potențialul electric este constant și are valoarea $V(R)=\frac{\rho_s}{\varepsilon_0}R_0$.

În figura 1.6. este reprezentată variația celor două mărimi în raport cu R.

Aplicația 1.3. Să se calculeze intensitatea câmpului și potențialul electric produse de un fir rectiliniu, infinit, încărcat cu sarcina lineică ρ_l = const. (fig. 1.7).

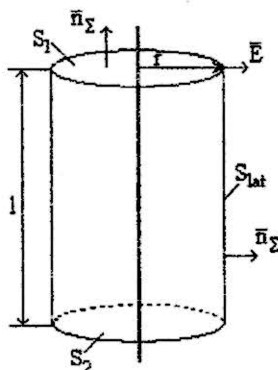


Fig. 1.7. Fir filiform infinit extins, încărcat uniform cu ρ_l = const.

Din motive de simetrie câmpul este radial și în plane perpendiculare pe fir. Se consideră o suprafață închisă de formă cilindrică $\Sigma=S_1\cup S_{lat}\cup S_2$, pe care se aplică legea fluxului electric. Cum normala $\overline{n}_\Sigma$ este perpendiculară pe $\overline{E}$ pe cele două baze ale cilindrului, rezultă că fluxul electric prin suprafețele S_1 și S_2 este nul. În consecință

$$\Psi_\Sigma=\int_{\Sigma}\overline{D}\overline{n}_\Sigma\mathrm{d}A=\int_{Slat}\overline{D}\overline{n}_\Sigma\mathrm{d}A=\varepsilon_0E\int_{Slat}\mathrm{d}A=\varepsilon_0E\cdot2\pi rl.$$

Sarcina electrică din interiorul cilindrului fiind $q_\Sigma=\rho_l l$, rezultă că intensitatea câmpului electric în toate punctele suprafeței laterale de rază r este

$$E=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}.$$

Calculând potențialul electric, considerând potențialul de referință zero, se obține

$$V(r)=V(r_0)-\int_{r_0}^{r}\overline{E}\mathrm{d}\overline{s}=-\int_{r_0}^{r}\overline{E}\mathrm{d}\overline{s}=-\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_0}^{r}\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r},$$

numit *potențial logaritmic*. Dacă se consideră punctul de referință la $r_0=1$, expresia devine

$$V(r)=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{r},$$

formă sub care va fi utilizată la calculul capacității liniei electrice bifilare.

1.5.2. Legea fluxului magnetic

Liniile de câmp magnetic (liniile vectorului inducției magnetice) sunt linii închise. Această constatare conduce la formularea legii fluxului magnetic: "*În orice moment fluxul magnetic prin orice suprafață închisă este nul*":

$$\Phi_\Sigma \overset{d}{=} \int_\Sigma \overline{B}\overline{n}_\Sigma \mathrm{d}A = 0. \tag{1.38}$$

Ţinând seama de relaţia de definiţie prelucrată cu ajutorul teoremei Gauss-Ostrogradski se obţine forma locală a legii, pentru domenii de continuitate şi netezime ale proprietăţilor magnetice (ale inducţiei magnetice):

$$\int_{V\Sigma} div\overline{B}\,\mathrm{d}V = 0, \tag{1.39}$$

adică

$$div\overline{B} = 0. \tag{1.40}$$

Relaţia (1.40) arată că nu există sarcini magnetice de tipul celor electrice şi că liniile câmpului magnetic sunt linii închise.

La suprafeţe de discontinuitate forma locală a legii fluxului magnetic este:

$$B_{2n} - B_{1n} = 0, \tag{1.41}$$

adică se obţine relaţia de conservare a componentelor normale ale inducţiei magnetice:

$$B_{2n} = B_{1n}. \tag{1.42}$$

O consecinţă importantă a legii fluxului magneticc este aceea că: *fluxul magnetic are aceeaşi valoare prin orice suprafaţă deschisă* S_Γ *care se sprijină pe acelaşi contur închis* Γ.

1.5.3. Legea inducţiei electromagnetice

Experimental se constată că la variaţia în timp a câmpului magnetic se produce câmp electric. Fenomenul, constând în apariţia în lungul unui contur închis a unei tensiuni electromotoare, poartă numele de inducţie electromagnetică şi a fost pus în evidenţă prin experienţele lui Faraday, în 1831. Ca efect al acestui fenomen, în circuitele electrice închise apar curenţi induşi cu un astfel de sens, încât se opun cauzei care i-a produs (regula lui Lenz).

Enunţ: "*Tensiunea electromotoare indusă în lungul unei curbe închise oarecare* Γ, *la orice moment şi indiferent de modul de variaţie în timp a mărimilor este egală cu viteza de scădere a fluxului magnetic prin orice suprafaţă deschisă ce se sprijină pe curba* Γ":

$$e_\Gamma = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{S_\Gamma}}{\mathrm{d}t}. \tag{1.43}$$

Ţinând seama de relaţiile de definiţie ale celor două mărimi, se obţine forma explicită

$$\oint_\Gamma \overline{E}\overline{ds} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_\Gamma} \overline{B}\overline{n}_{S_\Gamma}\mathrm{d}A, \tag{1.44}$$

în care elementul de arc $\overline{ds}$ pe curba Γ şi versorul normalei $\overline{n}_{S_\Gamma}$ la suprafaţa S_Γ sunt asociate după regula burghiului drept (fig. 1.2).

Considerând că suprafaţa S_Γ este ataşată corpurilor şi se deplasează odată cu acestea, dezvoltând derivata substanţială (de flux), pentru medii în mişcare se obţine următoarea formă integrală dezvoltată a legii:

$$\oint_\Gamma \overline{E}\overline{ds} = \int_{S_\Gamma}\left(\frac{\partial\overline{B}}{\partial t} + \overline{v}div\overline{B} + rot\left(\overline{B}\mathrm{x}\overline{v}\right)\right)\overline{n}_{S_\Gamma}dA \tag{1.45}$$

şi ţinând seama de forma locală a legii fluxului magnetic, rezultă

$$\oint_{\Gamma} \overline{E d s} = -\int_{S_\Gamma} \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \overline{n}_{S_\Gamma} dA \int_{S_\Gamma} rot\left(\overline{B} \mathrm{x} \overline{v}\right) \overline{n}_{S_\Gamma} dA = e_t + e_m, \tag{1.46}$$

unde e_t se numeşte t.e.m. indusă prin transformare, iar e_m – t.e.m. indusă prin mişcare.

În domenii de continuitate şi netezime a proprietăţilor fizice locale, aplicând teorema lui Stokes membrului stâng al ecuaţiei (1.45), se obţine *formă locală* a legii:

$$rot \overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} + rot\left(\overline{v} \mathrm{x} \overline{B}\right). \tag{1.47}$$

Pentru medii imobile ($\overline{v} = 0$), ecuaţia devine

$$rot \overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}, \tag{1.48}$$

cunoscută sub numele de *a doua ecuaţie a lui Maxwell.*

La trecerea printr-o suprafaţă de discontinuitate, în orice regim, componenta tangenţială a intensităţii câmpului electric se conservă:

$$E_{t2} = E_{t1}. \tag{1.49}$$

Aceasta reprezintă forma locală la suprafeţe de discontinuitate a legii.

Aplicaţii

1. *Principiul producerii t.e.m. alternative.* Funcţionarea generatoarelor de c.a. are la bază fenomenul inducţiei electromagnetice, care se produce ca urmare a existenţei unui câmp magnetic învârtitor (produs de rotorul maşinii care este un electromagnet rotit de turbină) ce întretaie spirele înfăşurării statorice în care induce t.e.m. datorită componentei e_m.

2. *Principiul transformatorului electric.* Datorită variaţiei fluxului magnetic din primar, în secundarul transformatorului se induce prin transformare (e_t) o t.e.m. de aceeaşi frecvenţă cu cea a mărimilor primare.

3. *În regim static şi în regim staţionar* legea inducţiei electromagnetice are forma:

$$e_\Gamma = \oint_{\Gamma} \overline{E d s} = 0, \tag{1.50}$$

numită teorema potenţialului electrostatic, respectiv electrocinetic staţionar.

Considerând curba Γ o buclă a unui circuit electric aflat în regim staţionar sau cvasistaţionar, şi descompunând-o într-o sumă de curbe deschise C_k, ce urmăresc tensiunile la bornele laturilor care formează bucla, se obţine:

$$e_\Gamma = \oint_{\Gamma} \overline{E d s} = \sum_k \int_{C_k} \overline{E d s} = \sum_{l_k \in b_h} (\mathrm{A}) u_k = 0, \tag{1.51}$$

relaţie ce reprezintă *teorema a doua a lui Kirchhoff: suma algebrică a tensiunilor la bornele laturilor l_k ce aparţin buclei b_h este nulă.*

1.5.4. Legea circuitului magnetic

Experimental se constată că: "*Tensiunea magnetomotoare de-a lungul unei curbe închise oarecare* Γ, *la orice moment şi indiferent de modul de variaţie în timp a mărimilor este egală cu suma dintre solenaţia corespunzătoare curenţilor de conducţie care străbat o suprafaţă deschisă* S_Γ, *mărginită de curba* Γ *şi viteza de creştere a fluxului electric prin suprafaţa respectivă*":

$$u_{mm\Gamma} = \Theta_{S_\Gamma} + \frac{\mathrm{d}\Psi_{S_\Gamma}}{\mathrm{d}t}. \tag{1.52}$$

Al doilea termen din partea dreaptă a ecuației se numește *curent hertzian*.

Folosind relațiile de definiție ale mărimilor, se obține forma integrală explicită a legii:

$$\oint_\Gamma \overline{H}\,\overline{ds} = \int_{S_\Gamma} \overline{J}\,\overline{n}_{S_\Gamma}\,\mathrm{d}A + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_\Gamma} \overline{D}\,\overline{n}_{S_\Gamma}\,\mathrm{d}A, \tag{1.53}$$

în care elementul de arc $\overline{ds}$ pe curba Γ și versorul normalei $\overline{n}_{S_\Gamma}$ la suprafața S_Γ sunt asociate după regula burghiului drept (fig. 1.2).

Considerând că suprafața S_Γ este atașată corpurilor și se deplasează odată cu acestea, dezvoltând derivata substanțială (de flux) pentru medii în mișcare, se obține următoarea formă integrală dezvoltată a legii:

$$\oint_\Gamma \overline{H}\,\overline{ds} = \int_{S_\Gamma} \overline{J}\,\overline{n}_{S_\Gamma}\,\mathrm{d}A + \int_{S_\Gamma} \frac{\partial \overline{D}}{\partial t}\overline{n}_{S_\Gamma}\,\mathrm{d}A + \int_{S_\Gamma} \overline{v}\,div\overline{D}\,\overline{n}_{S_\Gamma}\,\mathrm{d}A + \int_{S_\Gamma} rot\left(\overline{D}\times\overline{v}\right)\overline{n}_{S_\Gamma}\,\mathrm{d}A. \tag{1.54}$$

sau ținând seama de forma locală a legii fluxului electric,

$$\oint_\Gamma \overline{H}\,\overline{ds} = \int_{S_\Gamma} \overline{J}\,\overline{n}_{S_\Gamma}\,\mathrm{d}A + \int_{S_\Gamma} \frac{\partial \overline{D}}{\partial t}\overline{n}_{S_\Gamma}\,\mathrm{d}A + \int_{S_\Gamma} \rho_V\,\overline{v}\,\overline{n}_{S_\Gamma}\,\mathrm{d}A + \int_{S_\Gamma} rot\left(\overline{D}\times\overline{v}\right)\overline{n}_{S_\Gamma}\,\mathrm{d}A. \tag{1.55}$$

Relația se poate scrie sub forma

$$u_{mm\Gamma} = \Theta_{S_\Gamma} + i_{DS_\Gamma} + i_{vS_\Gamma} + i_{RS_\Gamma}, \tag{1.56}$$

unde termenii din partea dreaptă reprezintă, în ordine: *solenația* corespunzătoare curenților de conducție, *curentul de deplasare* propriu zis, *curentul de convecție*, și respectiv, *curentul Roentgen*.

Observație:

Solenația are următoarea semnificație:

- pentru o suprafață S_Γ perpendiculară pe axa unui conductor parcurs de curentul electric de conducție i, și a cărei arie este cel puțin egală cu cea a conductorului: $\Theta_{S_\Gamma} = i$;

- dacă aria suprafeței S_Γ este mai mică decât cea a conductorului: $\Theta_{S_\Gamma} = JA_{S_\Gamma} = i\dfrac{A_{S_\Gamma}}{A_{cond}}$;

- dacă S_Γ taie cele N spire, parcurse de curentul i, ale unei bobine: $\Theta_{S_\Gamma} = N\,i$.

În domenii de continuitate și netezime a proprietăților fizice locale, aplicând teorema lui Stokes membrului stâng al ecuației (1.55), se obține *forma locală* a legii:

$$rot\overline{H} = \overline{J} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} + \overline{v}\rho_V + rot\left(\overline{D}\mathrm{x}\overline{v}\right) \tag{1.57}$$

Unde: $\overline{J}$ - este intensitatea cuentului de conducție (confirmată experimental); $\overline{J}_d = \dfrac{\partial \overline{D}}{\partial t}$ - reprezintă densitatea curentului de deplasare (confirmată experimental); $\overline{J}_c = \rho_V\overline{v}$ - densitatea curentului de convecție (confirmată experimental) și $\overline{J}_R = rot\left(\overline{D}\mathrm{x}\overline{v}\right)$ - densitatea curentului Roentgen care nu este confirmată experimental. Experiența arată că un mic corp polarizat electric și mobil produce câmp magnetic. Ținând seama de legea legăturii în câmp electric, densitatea curentului Roentgen are două componente: $\overline{J}_{Rt} = rot\left(\varepsilon_0\overline{E}\times\overline{v}\right)$ - densitatea

curentului Roentgen teoretic (neconfirmată experimental) și $\overline{J}_{Re} = rot(\overline{P} \times \overline{v})$ - densitatea curentului Roentgen experimental (confirmată experimental). La frecvențe și viteze relativ mici densitatea curentului Roentgen se poate neglija.

În cazul corpurilor imobile relația (1.55) are forma:

$$\oint_{\Gamma} \overline{H}\mathrm{d}\overline{s} = \int_{S_\Gamma} \overline{J}\overline{n}_{S_\Gamma}\mathrm{d}A + \int_{S_\Gamma} \frac{\partial \overline{D}}{\partial t}\overline{n}_{S_\Gamma}\mathrm{d}A. \qquad (1.58)$$

Se numește regim cvasistaționar, regimul variabil în care se poate neglija curentul de deplasare din legea circuitului magnetic, peste tot, cu excepția dielectricului condensatoarelor.

În domenii de continuitate și netezime a proprietăților fizice și în ipoteza corpurilor imobile, aplicând teorema lui Stokes membrului stâng al ecuației (1.58), se obține forma locală a legii:

$$rot\overline{H} = \overline{J} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t}, \qquad (1.59)$$

numită *prima ecuație a lui Maxwell*.

La suprafețele de discontinuitate forma locală este:

$$H_{t2} - H_{t1} = J_s. \qquad (1.60)$$

Dacă pe suprafața de discontinuitate nu există pânze de curent, are loc conservarea componentelor tangențiale ale intensității câmpului magnetic:

$$H_{t2} = H_{t1}. \qquad (1.61)$$

În regim cuasistaționar sau staționar legea circuitului magnetic are forma:

$$\oint_{\Gamma} \overline{H}d\overline{s} = \int_{S_\Gamma} \overline{J}\overline{n}_{S_\Gamma}\mathrm{d}A \qquad (1.62)$$

numită *teorema lui Ampère*.

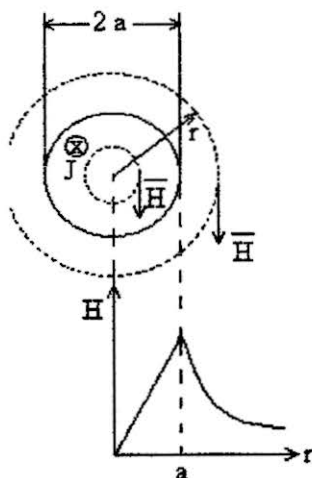


Fig. 1.8. Variația cu raza a intensității câmpului magnetic produs de un conductor cilindic de rază a parcurs de curentul *i*..

Aplicația 1.4. Calculul intensității câmpului magnetic produs de un conductor cilindric circular de rază *a*, rectiliniu, infinit, parcurs de curentul *i*, uniform distribuit pe secțiunea sa (fig. 1.8).

Din motive de simetrie, liniile de câmp magnetic sunt cercuri concentrice cu centrul în axa conductorului. Vectorul intensității câmpului magnetic este tangent în orice punct la linia de câmp, iar sensul lui este asociat cu sensul curentului electric prin regula burghiului drept, ca în figura 1.8. Aplicând teorema lui Ampère de-alungul unei linii de câmp Γ și calculând solenația în cele două domenii (interior și exterior suprafeței transversale a conductorului), se obține succesiv:

$$U_{mm\Gamma}(r) = \int_{\Gamma} \overline{H}\mathrm{d}\overline{s} = \int_{\Gamma} H\mathrm{d}s = H\int_{\Gamma}\mathrm{d}s = H \cdot 2\pi\, r,$$

oricare ar fi r în raport cu a.

Solenaţia se calculează în cele două domenii:

$$r<a, \qquad \Theta(r)=J\pi r^2=\frac{i}{\pi a^2}\pi r^2=i\frac{r^2}{a^2},$$

$$r\geq a, \qquad \Theta(r)=i$$

Egalând termenii din relaţia (1.62) se obţine:

$$r<a, \qquad H^i(r)=\frac{ir}{2\pi a^2},$$

$$r\geq a, \qquad H^e(r)=\frac{i}{2\pi r}..$$

Variaţia lui $H(r)$ este prezentată în Fig. 1.8.

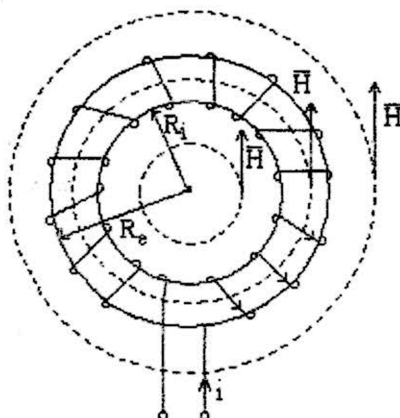


Fig. 1.9. Tor omogen şi izotrop, bobinat uniform cu N spire, parcurse de curentul i.

Aplicaţia 1.5. Să se determine câmpul magnetic produs de un tor omogen şi izotrop, bobinat uniform cu N spire, parcurse de curentul i (fig. 1.9).

Din motive de simetrie liniile de câmp magnetic sunt cercuri concentrice situate în plane perpendiculare pe axa torului.

Calculând tensiunea magnetică şi solenaţia în cele trei domenii se obţine:

$$U_{mm\Gamma}(r)=\int_\Gamma \overline{H}\,\overline{ds}=\int_\Gamma H ds=H\int_\Gamma ds=H\cdot 2\pi r.$$

$$\Theta_{S_\Gamma}=\begin{cases}0 \text{ pentru } r<R_i\\ Ni \text{ pentru } R_i<r<R_e\\ 0 \text{ pentru } r>R_e\end{cases}.$$

Egalând cele două expresii rezultă intensitatea câmpului magnetic în cele trei domenii:

$$H(r)=\begin{cases}0 \text{ pentru } r<R_i\\ \dfrac{Ni}{2\pi r} \text{ pentru } R_i<r<R_e\\ 0 \text{ pentru } r>R_e\end{cases}.$$

Notând cu $l=2\pi r$ lungimea liniei de câmp, intensitatea în interiorul torului se poate exprima ca

$$H=\frac{Ni}{l},$$

relaţie ce va fi folosită la calculul inductivităţii proprii a unui tor sau bobine şi la exprimarea densităţii de energie magnetică.

Observaţii:

1. Un tor cu raza tinzând la infinit este echivalent cu un solenoid drept infinit lung;
2. Un tor sau un solenoid infinit lung, omogen şi izotrop nu produce câmp magnetic decât în interiorul bobinei sale.

Aplicația 1.6. Să se calculeze câmpul magnetic în crestătura dreptunghiulară a unei mașini electrice (fig. 1.10).

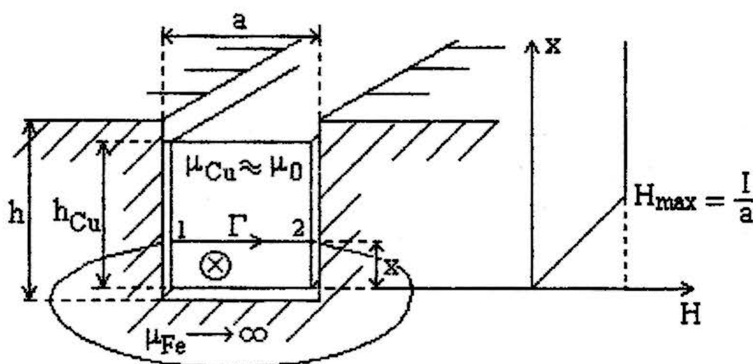


Fig. 1.10. Crestătura dreptunghiulară a unei mașini electrice.

Ipoteze:

1. Curentul este uniform repartizat în bară.

2. Armătura din material feromagnetic în crestătura căreia este introdusă bara conductoare de cupru are o permeabilitate foarte mare, astfel încât se poate considera $\mu_{Fe} \to \infty$. Cupru fiind un material neferomagnetic se poate considera $\mu_{Cu} \approx \mu_0$.

3. Conform teoremei refracției liniilor de câmp magnetic, în crestătură (la suprafața de separație între cele două materiale) liniile de câmp sunt perpendiculare pe pereții laterali ai crestăturii.

4. În materialul feromagnetic liniile de câmp îmbrățișează bara parcursă de curent.

Conform formei locale la suprafețe de discontinuitate a legii fluxului magnetic, la suprafața crestăturii se conservă componenta normală a inducției magnetice: $B_{Fe} = B_{Cu}$, adică $\mu_{Fe} H_{Fe} = \mu_{Cu} H_{Cu}$, de unde rezultă că intensitatea câmpului magnetic în armătură $H_{Fe} = \frac{\mu_0 H_0}{\mu_{Fe}} \to 0$, deci tensiunea magnetică în materialul feromagnetic $u_{mFe} \to 0$.

În consecință integrala pe linia de câmp este diferită de zero numai în crestătură și

$$\int_{\Gamma} \overline{H} \overline{ds} = \int_1^2 H_{Cu} ds = H_{Cu} \cdot a .$$

Solenația corespunzătoare se calculează cu relația

$$\Theta_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \overline{J n_{S_\Gamma}} dA = J \cdot ax = \frac{I}{a h_{Cu}} ax = I \frac{x}{h_{Cu}} .$$

Din relația de mai sus se obține $H_{Cu} = I \frac{x}{a h_{Cu}}$.

Observații:

1. Deasupra barei ($x > h_{Cu}$), $\Theta_{S_\Gamma} = I = ct.$ și $H_0 = \frac{I}{a} = ct.$

2. Sub bară ($x < 0$) câmpul este nul.

1.5.5. Legea conservării sarcinii electrice

Dacă se consideră o suprafață închisă Σ care trece numai prin dielectrici (nu este străbătută de curenți de conducție), sarcina electrică în interiorul suprafeței (reprezentând un sistem izolat) rămâne constantă

$$q_{\Sigma} = ct., \tag{1.63}$$

oricare ar fi fenomenele care se produc în interiorul suprafeței:

Dacă suprafața intersectează și conductoare parcurse de curent electric de conducție, "*intensitatea curentului de conducție care părăsește orice suprafața închisă Σ este egală în fiecare moment cu viteza de scădere a sarcinii electrice adevărate localizată în volumul delimitat de Σ*".

$$i_{\Sigma} = -\frac{\mathrm{d}q_{V_{\Sigma}}}{\mathrm{d}t}. \tag{1.64}$$

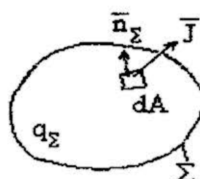


Fig. 1.11. Referitor la legea conservării sarcinii electrice.

În ipoteza unei distribuții uniforme în volum a sarcinii electrice, folosind relațiile de definiție, legea capătă forma integrală

$$\oint_{\Sigma} \bar{J}\bar{n}_{\Sigma}\mathrm{d}A = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_{\Sigma}} \rho_V \mathrm{d}V. \tag{1.65}$$

Considerând suprafața atașată corpurilor în mișcare, și calculând derivata substanțială a integralei, aplicând apoi teorema Gauss-Ostrogradski, se obține forma integrală dezvoltată a legii

$$\oint_{\Sigma} \bar{J}\bar{n}_{\Sigma}\mathrm{d}A = -\int_{V_{\Sigma}}\left(\frac{\partial \rho_V}{\partial t} + div(\bar{v}\rho_V)\right)\mathrm{d}V = -\int_{V_{\Sigma}}\frac{\partial \rho_V}{\partial t}\mathrm{d}V - \oint_{\Sigma}\bar{v}\rho_V\bar{n}_{\Sigma}\mathrm{d}A. \tag{1.66}$$

Al doilea termen din partea dreaptă a ecuației (1.66) este curentul de convecție definit la relația (1.55), astfel încât trecându-l în partea dreaptă se obține forma:

$$\oint_{\Sigma}\left(\bar{J} + \bar{v}\rho_v\right)\bar{n}_{\Sigma}\mathrm{d}A = -\int_{V_{\Sigma}}\frac{\partial \rho_v}{\partial t}\mathrm{d}V. \tag{1.67}$$

Relația (1.67) arată că sarcina electrică dintr-un domeniu delimitat de Σ scade atât datorită curentului de conducție cât și celui de convecție care părăsesc suprafața Σ.

Aplicând termenului din dreapta teorema Gauss-Ostrogradski, domeniul fiind arbitrar, rezultă relația

$$-\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = div\left(\bar{J} + \bar{v}\rho_v\right) \tag{1.68}$$

care reprezintă forma locală a legii pentru domenii de continuitate și netezime a proprietăților fizice locale.

La trecerea liniilor de curent printr-o suprafață de discontinuitate neîncărcată cu sarcină electrică se conservă componenta normală a densității curentului de conducție

$$\bar{J}_{2n} = \bar{J}_{1n}. \tag{1.69}$$

Observație:

În regim electrocinetic staționar și cvasistaționar

$$i_{\Sigma} = \sum_{l_k \in n_j} {}_{(A)} i_k = 0, \tag{1.70}$$

și reprezintă *teorema întâi a lui Kirchhoff*, cu enunțul: *suma algebrică a curenților din laturile l_k incidente într-un nod n_j al unui circuit electric este nulă.*

1.5.6. Legea conducției electrice (legea lui Ohm)

Experimental se constată că în orice punct din interiorul uni conductor liniar, izotrop și pentru viteze mici de variație în timp a mărimilor, "*Suma vectorială dintre intensitatea câmpului electric $\overline{E}$ și intensitatea câmpului electric imprimat $\overline{E_i}$ din interiorul unui conductor izotrop este proporțională în fiecare punct cu densitatea curentului electric de conducție din acel punct*":

$$\overline{E} + \overline{E_i} = \rho \overline{J}, \tag{1.71}$$

constanta de proporționalitate ρ fiind o mărime scalară dependentă de natura materialului și de temperatură, numită *rezistivitate*. Relația (1.71) reprezintă forma locală a legii conducției electrice și mai poate fi scrisă sub forma:

$$\overline{J} = \sigma\left(\overline{E} + \overline{E_i}\right), \tag{1.72}$$

unde $\sigma = 1/\rho$ se numește *conductivitate* electrică.

Rezistivitatea depinde de temperatura conductorului. Pentru intervale de temperatură nu prea mari, această dependență este linară și se poate aproxima prin relația:

$$\rho_t = \rho_0\left(1 + \alpha_0 (t - t_0)\right), \tag{1.73}$$

în care ρ_0 este rezistivitatea la temperatura de referință t_0, iar α_0 este coeficientul de temperatură al rezistivității la tempeartura t_0.

Observații:

1. Metalele pure și multe din aliajele lor au un coeficient de temperatură al rezistivității pozitiv, adică rezistivitatea lor crește odată cu temperatura.
2. Cărbunele, constantanul și unii electroliți au coeficient de temperatură negativ.
3. Rezistivitatea materialelor semiconductoare variază cu temperatura după o lege exponențială inversă ($exp(k/T)$).
4. La anumite metale precum plumbul, sau la unele aliaje, rezistivitatea se anulează brusc la temperaturi foarte joase (câteva grade absolute K), care depind de natura materialului și de intensitatea câmpului magnetic în care sunt situate. Fenomenul se numește supraconductibilitate.

În conductoarele perfect omogene din punct de vedere structural, mecanic, termic și chimic, și neaccelerate, în care $\overline{E_i} = 0$, forma locală a legii conducției electrice este:

$$\overline{E} = \rho \overline{J} \quad \text{sau} \quad \overline{J} = \sigma \overline{E}. \tag{1.74}$$

În teoria circuitelor electrice prezintă o mare importanță forma integrală a legii lui Ohm care se obține prin integrarea relației (1.71) de-a lungul unei porțiuni neramificate de conductor filiform, între punctele A și B de-a lungul fibrei medii (curba C din fig. 1.11):

$$\int_{A(C)}^{B}\overline{E}\overline{ds}+\int_{A(C)}^{B}\overline{E}_i\overline{ds}=\int_{A(C)}^{B}\rho\overline{J}\overline{ds} \tag{1.75}$$

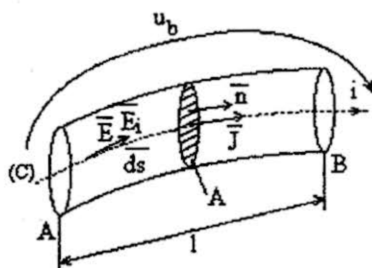


Fig. 1.11. Porţiune neramificată de conductor filiform.

Ţinând seama de definiţiile mărimilor derivate, relaţia se poate scrie sub forma:

$$u_b+e_i=\int_C\rho\frac{i}{A}\mathrm{d}s=i\int_C\frac{\rho}{A}\mathrm{d}s. \tag{1.76}$$

Pentru conductoare omogene (ρ = ct.) cu secţiune A = ct. şi filiforme, se obţine forma integrală a legii lui Ohm pentru laturi de circuit active (având şi surse de câmp electric imprimat), numită şi caracteristica $u(i)$ a laturii:

$$u_b+e_i=R\cdot i, \tag{1.77}$$

unde:

$$R=\rho\frac{l}{A}. \tag{1.78}$$

reprezintă *rezistenţa electrică* a porţiunii neramificate de circuit de lungime l şi secţiune A şi se măsoară în *ohmi* [Ω]. Pentru o porţiune (AB) de conductor neomogen cu aria secţiunii transversale variabilă, rezistenţa electrică este definită de relaţia:

$$R=\int_{A(C)}^{B}\rho\frac{ds}{A}. \tag{1.79}$$

Relaţia (1.77) reprezintă forma integrală a legii conducţiei electrice pentru conductoare filiforme, şi în teoria circuitelor cu parametri concentraţi se asociază laturii reprezentate în figura 1.12.

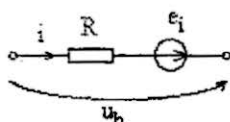


Fig. 1.12. Schema echivalentă a unei porţiuni de conductor.

Relaţia (1.77) se mai poate scrie sub forma:

$$i=G(u_b+e_i), \tag{1.80}$$

numită caracteristica $i(u)$ a laturii. Mărimea $G = 1/R$ se numeşte *conductanţă* şi se măsoară în *siemens* [S].

Aplicaţia 1.7 – Priza de pământ. Priza de pământ este un electrod metalic îngropat în pământ în scopul injectării sau extragerii din pământ a unui curent electric. Deoarece conductivitatea metalului este cu câteva ordine de mărime mai mare decât cea a solului (Tabelul 1.3), suprafaţa prizei de pământ se consideră echipotenţială, iar liniile de curent în pământ sunt perpendiculare pe electrod.

Pentru simplificare se va considera cazul prizei de pământ semisferice (fig. 1.13).

Din motive de simetrie liniile de curent şi cele de câmp electric sunt radiale şi, ca funcţii de punct, satisfac relaţiile:

$$\overline{J}=J(r)\overline{u}_r,\ \text{respectiv}\ \overline{E}=E(r)\overline{u}_r. \tag{1.81}$$

Tabelul 1.3.

Rezistivitatea solului	Ωm
Sol mlăştinos	30
Sol lutos, argilos, cultivabil	100
Nisip umed	300
Sol nisipos umed	500
Nisip sau sol nisipos uscat	1000
Sol pietros	3000

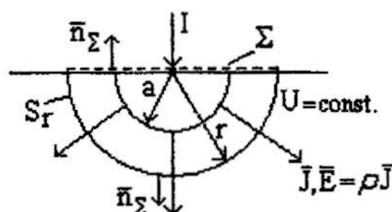


Fig. 1.13. Priza de pământ semisferică.

Ecuaţia corespunzătoare teoremei continuităţii liniilor de curent asociată cu suprafaţa închisă $\Sigma = \text{Semisfera} \cup \text{Discul superior}$, este $i_\Sigma = 0$, sau în formă integrală

$$\oint_\Sigma \overline{J n_\Sigma} \mathrm{d}A = 0. \tag{1.82}$$

Integrala poate fi descompusă pe cele două componente ale suprafeţei Σ şi ţinând seama de relaţiile (1.81) se obţine:

$$\int_\Sigma \overline{J n_\Sigma} \mathrm{d}A = \int_{Semisfera} J(r)\overline{n_r n_\Sigma} \mathrm{d}A + \int_{Disc} \overline{J n_\Sigma} \mathrm{d}A = 0, \tag{1.83}$$

adică

$$-I + J(r) 2\pi r^2 = 0. \tag{1.84}$$

Din relaţia (1.84) rezultă succesiv

$$J(r) = \frac{I}{2\pi r^2} \quad \text{şi} \quad E(r) = \rho J(r) = \frac{\rho I}{2\pi r^2}. \tag{1.85}$$

Potenţialul într-un punct oarecare, luând ca referinţă potenţialul prizei, este

$$V(r) = V(a) - \int_a^r \overline{E \mathrm{d}r} = V(a) + \frac{\rho I}{2\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right). \tag{1.86}$$

Dacă $r \to \infty \Rightarrow V(r) = 0$ şi potenţialul prizei capătă expresia:

$$V(a) = \frac{\rho I}{2\pi a}. \tag{1.87}$$

Relaţia (1.87) reprezintă tensiunea prizei de pământ faţă de punctele de la infinit.

Atunci potenţialul unui punct oarecare va fi:

$$V(r) = V(a)\frac{a}{r}, \tag{1.88}$$

adică pentru $r > a$ acesta variază hiperbolic cu distanţa ca în reprezentarea din figura 1.14.

Priza de pământ se caracterizează prin *rezistenţa* de dispersie definită cu relaţia:

$$R_p = \frac{V(a)}{I} = \frac{\rho}{2\pi a}, \tag{1.89}$$

sau prin inversul acesteia, numit conductanţa prizei

$$G_p = 2\pi a\sigma . \quad (1.90)$$

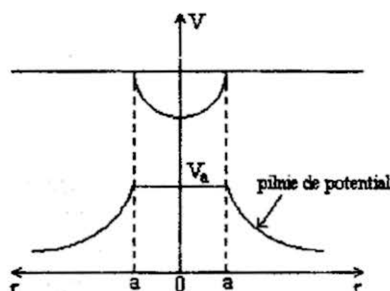


Fig. 1.14. Variația cu raza r a potențialului electric.

Pentru protecția instalațiilor electrice, în general se prescrie pentru R_p o valoare mai mică de 4 Ω.

Astfel de prize se realizează în practică cu o rețea de platbande și de țevi îngropate cât mai adânc în pământ.

O importanță specială prezintă mărimea numită *tensiune de pas* (fig. 1.15), calculată cu relația

$$U(p) = V(a+x) - V(a+x+p) = V(a)\left(\frac{a}{a+x} - \frac{a}{a+x+p}\right) =$$
$$V(a)\frac{ap}{(a+x)(a+x+p)} = \frac{\rho I p}{2\pi(a+x)(a+x+p)} \quad (1.91)$$

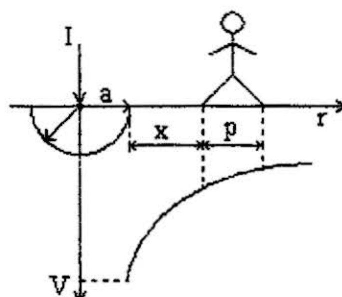


Fig. 1.15. Definiția tensiunii de pas.

Tensiunea de pas este maximă pentru $x = 0$, adică la marginea prizei, și are valoarea

$$U_{p\max} = V(a)\frac{p}{a+p} . \quad (1.92$$

Pentru $p = 0$ (tălpile apropriate), $U_{pmax} = 0$.

1.5.7. Legea transformării energiei electromagnetice în procesul conducției electrice (legea lui Joule - Lenz)

Experiența arată că trecerea curentului electric de conducție prin conductoare este însoțită de transformarea energiei electromagnetice în alte forme de energie. Acest fenomen este descris de legea lui Joule:

"*Densitatea de volum a puterii cedată de câmpul electromagnetic unui conductor aflat în stare electrocinetică este egală, în orice punct, la orice moment și indiferent de modul de variație cu timpul a mărimilor, cu produsul scalar dintre intensitatea câmpului electric și densitatea curentului electric de conducție*":

$$p_J = \overline{EJ} . \quad (1.93)$$

Ținând seama de legea conducției electrice, relația mai poate fi scrisă sub forma:

$$p_J = \left(\rho \overline{J} - \overline{E}_i\right)\overline{J} = \rho J^2 - \overline{E}_i \overline{J} = p_R - p_e, \tag{1.94}$$

unde $p_R = \rho J^2 > 0$ şi corespunde căldurii disipate în conductor prin efectul electrocaloric al curentului de conducţie (efect Joule-Lenz), iar $p_e = \overline{E_i J}$ reprezintă densitatea de putere cedată de sursele de câmp imprimat în procesul de conducţie.

După cum vectorii $\overline{E}_i$ şi $\overline{J}$ sunt omoparaleli, respectiv antiparaleli, $p_e > 0$, puterea fiind cedată, respectiv $p_e < 0$, puterea fiind primită.

Forma integrală a legii se obţine prin integrarea densităţii de putere pe volumul conductorului filiform, ţinând seama că toţi vectorii sunt paraleli (Fig. 1.5.6):

$$P_J = \int_V p_J \mathrm{d}V = \int_V \left(\overline{EJ}\right)\left(\overline{nA}\overline{\mathrm{d}s}\right) = \int_V \left(\overline{E\mathrm{d}s}\right)\left(\overline{JnA}\right) = \int_C \left(\overline{E\mathrm{d}s}\right)\int_S \left(\overline{JnA}\right) = u_b i. \tag{1.95}$$

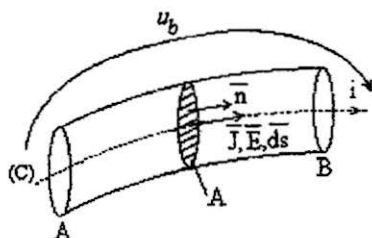


Fig. 1.16. Referitor la forma integrală a legii Joule - Lenz.

Relaţia (1.95) arată că "puterea totală cedată de câmpul electromagnetic unei porţiuni de conductor filiform în procesul de conducţie electrică este egală cu produsul dintre tensiunea electrică în lungul firului (la borne) şi intensitatea curentului electric care parcurge conductorul."

Ţinând seama de forma integrală a legii conducţiei electrice, relaţia (1.5.45) se scrie sub forma:

$$P_J = u_b i = R i^2 - e_i i = P_R - P_e, \tag{1.96}$$

unde $P_R = R i^2$ reprezintă puterea disipată în conductor sub formă de căldură, iar $P_e = e_i i$ este puterea generată de sursa de câmp electric imprimat (Fig. 1.5.5) cu t.e.m. e_i, când este parcursă de curentul electric de conducţie i.

Dacă e_i şi i au acelaşi sens, $P_e>0$ şi sursa cedează energie circuitului, iar dacă e_i şi i au sens invers, $P_e<0$ şi sursa primeşte energie din circuit.

Unitatea de măsură a puterii se numeşte *watt* [W].

$$1\mathrm{W} = 1\mathrm{V} \cdot 1\mathrm{A}.$$

Integrala de timp a puterii se numeşte energie. În energetică energia electrică se măsoară în *kilowattoră* [kWh]. Relaţia dintre diferitele unităţi de măsură este:

$$1\mathrm{kWh} = 3{,}6 \cdot 10^6\ \mathrm{Ws} \approx 860\ \mathrm{kcal}.$$

1.5.8. Legea legăturii în câmp electric

"În orice moment de timp şi în orice punct din spaţiu, indiferent de regimul de variaţie al mărimilor, între vectorul intensităţii câmpului electric, al inducţiei electrice şi al polarizaţiei, există relaţia":

$$\overline{D} = \varepsilon_0 \overline{E} + \overline{P}, \tag{1.97}$$

unde $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}$ [F / m] este constanta universală numită *permitivitatea vidului.*

1.5.9. Legea polarizației temporare

Aceasta este o lege de material care exprimă dependența componentei temporare a polarizației de intensitatea câmpului electric:

$$\overline{P_t} = f(\overline{E}) \qquad (1.98)$$

Pentru *materialele izotrope și liniare din punct de vedere electric și pentru viteze mici de variație în timp a mărimilor*, categorie din care fac parte cele mai multe din *materialele dielectrice* folosite în industria electrotehnică, această dependență este dată de relația:

$$\overline{P_t} = \varepsilon_0 \chi_e \overline{E}, \qquad (1.99)$$

în care χ_e este *susceptivitatea electrică* a materialului, mărime adimensională, depinzând de natura materialului și de condiții neelectrice locale (temperatură, presiune etc.). Aceste materiale nu prezintă polarizație permanentă.

- Sub acțiunea unui câmp electric exterior, sarcinile pozitive și negative inseparabile ale atomilor se deplasează elastic, orientându-se după direcția câmpului, formând mici dipoli electrici. Fenomenul se numește *polarizare de deformare* și se manifestă la materialele *diaelectrice* (hidrogen, oxigen, azot).
- În cazul altor materiale, momentele electrice se aliniază cu vectorul intensității câmpului electric în funcție de temperatură. Ele se numesc *paraelectrice*, iar fenomenul- *polarizare de orientare*.

În aplicații pentru medii nepolarizate permanent ($\overline{P}_p = 0$), legea polarizației temporare se combină cu legea legăturii în câmp electric. Astfel:

$$\overline{D} = \varepsilon_0 \overline{E} + \overline{P} = \varepsilon_0 \overline{E} + \overline{P}_t = \varepsilon_0 \overline{E} + \varepsilon_0 \chi_e \overline{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \overline{E}. \qquad (1.100)$$

Notând $1 + \chi_e = \varepsilon_r$ permitivitatea relativă a materialului și $\varepsilon_0 \varepsilon_r = \varepsilon$ permitivitatea sa absolută, relația (1.100) devine:

$$\overline{D} = \varepsilon \overline{E}. \qquad (1.101)$$

În Tabelul 1.4. se dau valorile unor materiale dielectrice uzuale.

Tabelul 1.4.

Denumire material	ε_r	Denumire material	ε_r
Aer la 760 mmHg, 0^0C	1,0006	Mică	4,5...7,5
Apă distilată	80...81	Parafină	1,9...2,3
Bachelită	4,5...5,5	Porțelan	5,5...8
Cauciuc	2,6...3	Preșpan	3...5
Izolație cablu telefonie (hirtie-aer)	1,6...2	Pertinax	3,5...7
Izolație cablu energie (hirtie-ulei)	3...4,3	Polistirol	2,3
Polietilenă	2...2,4	Sticlă	5...10
Lemn uscat	2,5...5	Sticlă de cuarț	3,2...4,2

Ulei de transformator	2,2...2,5	Şelac	2,9...3,7

Observaţii:

1. În cazul *materialelor anizotrope* cum sunt cristalele, inducţia electrică, în absenţa polarizaţiei permanente, nu este paralelă cu intensitatea câmpului electric decât pe anumite direcţii, numite principale. În acest caz susceptivitatea electrică, respectiv permitivitatea, se exprimă ca tensori de ordinul 2.

2. Anumite substanţe numite *feroelectrice*, cum sunt titanatul de bariu şi tetrahidratul de potasiu prezintă o polarizare neliniară foarte puternică (ε_r de sute sau mii) şi ireversibilă, prezentând fenomenul de histerezis.

Străpungerea dielectricilor

Calitatea de electroizolant a unui material dielectric poate dispare dacă intensitatea câmpului electric depăşeşte o anumită valoare limită E_d, numită *rigiditate dielectrică*. Aceasta depinde de natura, de puritatea şi de capacitatea de cedare a căldurii caracteristice materialului, de forma electrozilor metalici între care se face încercarea, de distanţa dintre ei, de durata aplicării tensiunii, de presiune, de umiditate, de temperatură etc. În consecinţă, rigiditatea dielectrică nu este o constantă de material şi trebuie specificate condiţiile în care a fost determinată. Străpungerea electroizolanţilor solizi poate avea mai multe cauze. În afara depăşirii rigidităţii dielectrice, o cauză importantă este îmbătrânirea acestor materiale. Acest fenomen, care, în condiţii normale de funcţionare, se desfăşoară într-o perioadă determinată de timp, se accelerează în condiţii de funcţionare în suprasarcină a conductoarelor izolate. Depăşirea temperaturilor maxime admisibile pentru clasa de temperatură a izolaţiei, conduce la deteriorarea proprietăţilor fizico-chimice ale materialului, la apariţia de incluziuni de gaze care se ionizează sub influenţa câmpului electric, devenind regiuni conductoare. Are loc astfel o reducere a rigidităţii dielectrice a materialului şi străpungerea acestuia.

1.5.10. Legea legăturii în câmp magnetic

"În orice moment de timp şi în orice punct din spaţiu, indiferent de regimul de variaţie al mărimilor, între vectorul intensităţii câmpului magnetic, al inducţiei magnetice şi al magnetizaţiei, există relaţia":

$$\overline{B} = \mu_0\left(\overline{H} + \overline{M}\right), \tag{1.102}$$

unde $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\left[\mathrm{H/m}\right]$ este o constantă universală numită *permeabilitatea vidului*.

1.5.11. Legea magnetizaţiei temporare

Această lege de material exprimă dependenţa componentei temporare a magnetizaţiei de intensitatea câmpului magnetic:

$$\overline{M}_t = f\left(\overline{H}\right). \tag{1.103}$$

Pentru *materialele izotrope şi liniare din punct de vedere magnetic şi pentru viteze mici de variaţie în timp a mărimilor*, categorie din care fac parte toate *materialele feromagnetice* cu excepţia magneţilor permanenţi, această dependenţă este dată de relaţia:

$$\overline{M}_t = \chi_m \overline{H}, \tag{1.104}$$

în care χ_m este susceptivitatea magnetică a materialului, mărime adimensională, depinzând de natura materialului, de starea lui de deformare şi de temperatură.

În tehnică, pentru medii nemagnetizate permanent ($\overline{M}_p = 0$), legea se foloseşte în combinaţie cu legea legăturii în câmp magnetic:

$$\overline{B} = \mu_0\left(\overline{H} + \overline{M}\right) = \mu_0\left(\overline{H} + \overline{M}_t\right) = \mu_0\left(\overline{H} + \chi_m\overline{H}\right) = \mu_0\left(1 + \chi_m\right)\overline{H}. \quad (1.105)$$

Notând cu $1 + \chi_m = \mu_r$, permeabilitatea relativă a materialului şi cu $\mu_0\mu_r = \mu$, permeabilitatea sa absolută, relaţia (1.105) devine:

$$\overline{B} = \mu\overline{H}. \quad (1.106)$$

Din punct de vedere al modului în care se magnetizează, materialele se clasifică în:

- **materiale diamagnetice** care se magnetizează în sens opus câmpului magnetic aplicat $\left(\overline{M}_t \uparrow\downarrow \overline{H}\right)$; au $\chi_m < 0$, deci μ_r<1.
- **materiale paramagnetice** care se magnetizează în sensul câmpului magnetic aplicat $\left(\overline{M}_t \uparrow\uparrow \overline{H}\right)$ şi dependent de temperatură; au $\chi_m > 0$, deci μ_r>1.

Materialele diamagnetice şi paramagnetice alcătuiesc clasa ***materialelor neferomagnetice*** (din care fac parte: Cu, Ag, Al, Pt, aerul) caracterizate printr-o relaţie (1.5.56) liniară şi printr-o valoare a permeabilităţii relative $\mu_r \approx 1$, ceea ce înseamnă o permeabilitate absolută $\mu \approx \mu_0$. În Tabelul 1.4 sunt prezentate valorile susceptivităţii magnetice ale materialelor neferomagnetice.

Tabelul 1.4

Materiale diamagnetice	χ_m	Materiale paramagnetice	χ_m
Bismut	$-170\cdot10^{-6}$	Aluminiu	$22\cdot10^{-6}$
Cupru	$-10\cdot10^{-6}$	Platină	$330\cdot10^{-6}$
Argint	$-19\cdot10^{-6}$	Mangan	$3600\cdot10^{-6}$
Mercur	$-25\cdot10^{-6}$	Aer	$0,4\cdot10^{-6}$
Apă	$-9\cdot10^{-6}$	Oxigen	$1,42\cdot10^{-6}$
Zinc	$-12\cdot10^{-6}$		

O clasă specială o constituie ***materialele feromagnetice***, care se magnetizează foarte puternic, neliniar şi ireversibil, prezentând histerezis şi magnetizaţie permanentă. Din această clasă fac parte Fe, Co, Ni, Ga şi unele aliaje, pentru care relaţia (1.106) este neliniară ca urmare a dependenţei permeabilităţii μ de intensitatea câmpului magnetic H. Caracteristica $B(H)$ numită curbă de histerezis magnetic este reprezentată în figura 1.17.

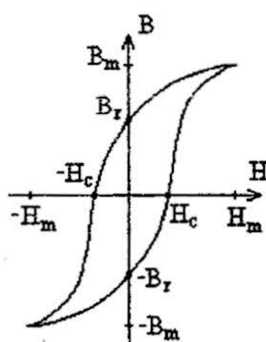


Fig. 1.17. Ciclul de histerezis magnetic.

B_r reprezintă inducţia remanentă, iar H_c este câmpul coercitiv.

Aria închisă de ciclul de histerezis corespunde unei densităţi de volum a energiei care se transformă în căldură, prin frecări interne, la fiecare parcurgere a ciclului. Ea este proporţională cu energia de magnetizare a acestor materiale.

Caracteristic pentru aceste materiale este valoarea foarte ridicată a permeabilităţii relative (de ordinul $10^2...10^5$), ceea ce, conform relaţiei (1.106) determină obţinerea unor inducţii (respectiv a unor energii magnetice) de valoare mare, la valori relativ reduse ale intensităţii câmpului magnetic.

După forma ciclului de histerezis materialele feromagnetice se clasifică în:

- *Materiale magnetice moi*, caracterizate printr-un ciclu de histerezis îngust. Aceste materiale se magnetizează şi se demagnetizează relativ uşor; ele se folosesc pentru realizarea circuitelor magnetice ale maşinilor, aparatelor şi transformatoarelor electrice. Din această categorie fac parte: Fier pur, Oţel electrotehnic (aliat cu 4% Si), diverse aliaje (Permalloy, Supermalloy). În afara proprietăţilor magnetice, aceste materiale au şi proprietăţi conductoare, ceea ce face ca în timpul funcţionării, în circuitele magnetice ale dispozitivelor respective să apară două categorii de pierderi: prin histerezis (P_H) şi prin curenţii turbionari (curenţi Foucault) care se induc în aceste materiale (P_F).
- *Materiale magnetice dure*, care au un ciclu de histerezis larg. Aceste materiale se magnetizează şi se demagnetizează relativ greu; ele se folosesc pentru realizarea magneţilor permanenţi. Din această categorie fac parte Oţelul călit (cu 1% C), Ol-Cr, Ol-W), Alnico etc.

În Tabelul 1.5 sunt date caracteristicile unor materiale magnetice moi, iar în Tabelul 1.6 ale unor materiale magnetice dure.

Tabelul 1.5

Materialul	μ_r iniţială	max	B_r [T]	H_c [A/m]
Fier pur	25.000	250.000	1,40	4
Oţel electrotehnic (cu 4% Si)	500	7.000	1,80	40
Permalloy (78,5%Ni, 21,5%Fe)	10.000	50.000	0,60	4
Supermalloy (79%Ni,15%Fe, 5%Mo,0,5%Mn)	100.000	300.000	0,60	0,4
Ferită de mangan-zinc	2.000	3.000	0,15	20
Ferită de nichel-zinc	15	50	0,13	10

Tabelul 1.6

Materialul	μ_r iniţială	B_r [T]	H_c [A/m]
Oţel călit (cu 1% C)	40	0,7	5.000
Oţel crom, oţel wolfram	30	1,1	5.000
Alnico (12%Al, 20%Ni, 5%Co, 63%Fe)	4	0,73	34.000
Oerstit 900 (20%Ni, 30%Co, 20%Ti, 30%Fe)	3	0,53	65.000
Aliaj Pt Co (77%Pt, 23%Co)	1	0,45	260.000
Ferită de bariu	1,2	0,3...0,4	150.000...250.000
Ferită de cobalt	1,1	0,16	90.000

Materialele ferimagnetice (*ferite*) au o structură asemănătoare celor feromagnetice, dar fiind materiale semiconductoare, caracterizate prin rezistivitate mare ($10^2...10^6$ Ωm).

Feritele tehnice sunt materiale ceramice obținute prin sinterizare în câmpuri magnetice. Ele pot fi moi sau dure.

- *Feritele magnetice moi* se pot folosi în dispozitivele de frecvență joasă sau înaltă ca piese masive, datorită faptului că fiind dielectrice, în ele nu se produc pierderi prin curenți turbionari. Se folosesc pentru realizarea circuitelor magnetice ale mașinilor electrice mici, miezuri de bobine, transformatoare sau ca antene magnetice (ferite de Mn-Zn sau Ni-Zn la care permeabilitatea maximă se atinge la temperaturi de aproximativ 30^0 C).
- *Feritele magnetice dure* se folosesc pentru realizarea magneților permanenți (în mașini electrice, în difuzoare etc.) sau a memoriilor magnetice (ferite de Bariu sau Cobalt – maniperm, magnadur, baferit etc.).

1.5.12. Legea electrolizei

Această lege caracterizează electroliții (conductoare de speța a doua în care trecerea curentului de conducție este însoțită de reacții chimice) și se enunță astfel: "*Masa de substanță depusă în unitatea de timp la unul din electrozii unei băi electrolitice parcursă de curent de conducție, este egală cu produsul dintre intensitatea curentului electric i și raportul dintre echivalentul electrochimic A/n_v, prin constanta universală a lui Faraday, F_0*":

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\frac{A}{n_v F_0}i, \tag{1.107}$$

în care F_0=96 490 coulombi. În intervalul de timp t, masa m are expresia:

$$m=\frac{A}{n_v F_0}\int_0^t i\mathrm{d}\tau=\frac{Aq}{n_v F_0}, \tag{1.108}$$

în care $q=\int_0^t i\mathrm{d}\tau$ este sarcina electrică, iar echivalentul electrochimic al substanței este o mărime de material.

CAP.2. PRINCIPALE TEOREME ALE TEORIE MACROSCOPICE A FENOMENELOR ELECTROMAGNETICE

2.1.TEOREMA ENERGIEI ELECTROMAGNETICE. DENSITATEA FLUXULUI DE ENERGIE ELECTROMAGNETICĂ

O consecinţă importantă a ecuaţiilor lui Maxwell este teorema energiei electromagnetice. Se consideră un domeniu D_Σ în câmpul electromagnetic, cu corpuri imobile ($\bar{v}=0$), proprietăţi de material liniare (fără histerezis, ε şi μ independente de $\bar{E}$ şi $\bar{H}$, şi fără polarizaţie şi magnetizaţie permanentă - $\overline{P_p}=0$, $\overline{M_p}=0$).

În concordanţă cu concepţia localizării acţiunilor, energia electromagnetică totală din domeniul D_Σ se poate scrie ca integrala de volum a densităţii de energie w_{em}:

$$W_e = \int_{D_\Sigma} w_{em}\mathrm{d}V, \tag{2.1}$$

iar puterea transmisă prin suprafaţa închisă Σ, ca fluxul unui vector densitate de putere $\bar{S}$ prin această suprafaţă:

$$P_\Sigma = \int_\Sigma \overline{S d A}. \tag{2.2}$$

Conform principiului conservării energiei, la variaţia stării unui sistem fizic, viteza de scădere a energiei sistemului este egală cu suma puterilor cedate de sistem altor sisteme fizice.

Energia se transformă în alte sisteme fizice prin:
- procesul de conducţie;
- variaţia polarizaţiei corpurilor cu histerezis;
- variaţia magnetizaţiei corpurilor cu histerezis;
- deplasarea corpurilor.

Din ipotezele asumate rezultă că întreaga energie a sistemului se transformă în procesul de conducţie. Câmpul electromagnetic din D_Σ este în interacţiune directă numai cu corpurile din D_Σ şi cu câmpul electromagnetic din exterior prin suprafaţa Σ (fig. 2.1), astfel încât este valabilă relaţia:

$$-\frac{\partial W_{em}}{\partial t} = P_J + P_\Sigma, \tag{2.3}$$

unde P_J este puterea transmisă de câmp corpurilor din domeniul D_Σ în procesul conducţiei electrice

$$P_J = \int_{D_\Sigma} p_J \mathrm{d}V = \int_{D_\Sigma} \overline{EJ}\mathrm{d}V, \tag{2.4}$$

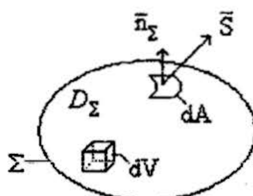


Fig. 2.1. Domeniul D_Σ considerat.

iar P_Σ reprezintă puterea transmisă de câmp prin Σ în sensul normalei la suprafaţă $\overline{n_\Sigma}$.

Vectorul $\bar{S}$, denumit *vectorul Poynting* (*vectorul densităţii fluxului de energ*), este definit cu aproximaţia unui câmp solenoidal arbitrar. Într-adevăr:

$$\bar{S}' = \bar{S} + rot\bar{G}, \tag{2.5}$$

unde $\bar{G}$ este oarecare, are acelaşi flux printr-o suprafaţă închisă. Aceasta nu introduce o nedeterminare a lui P_Σ, deoarece vectorul Poynting, prin definiţie, intervine numai în integrale pe suprafeţe închise, respectiv numai prin divergenţa sa.

Conform principiului localizării acțiunilor fizice, vectorul $\overline{S}$ este funcție numai de starea locală a sistemului fizic care asigură transmiterea energiei.

Folosind relațiile (2.1), (2.2), (2.4), ecuația (2.3) de bilanț a puterilor devine:

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{D_\Sigma} w_{em}\mathrm{d}V = \int_{D_\Sigma}\overline{E}\overline{J}\mathrm{d}V + \int_{\Sigma}\overline{S}\mathrm{d}\overline{A}. \tag{2.6}$$

Relația (2.6) reprezintă teorema energiei electromagnetice.

Se pune problema determinării explicite a formei densității de energie a câmpului electromagnetic și a vectorului Poynting. Aceste mărimi fiind caracteristice câmpului electromagnetic trebuie să depindă numai de mărimile de stare ale acestuia $\overline{E}, \overline{D}, \overline{H}, \overline{B}$.

Se calculează expresia densității de volum a puterii transformată în procesul conducției electrice, ținând seama de forma locală a circuitului magnetic:

$$p_j = \overline{E}\overline{J} = \overline{E}\left(rot\overline{H} - \frac{\partial\overline{D}}{\partial t}\right) = div\left(\overline{H}\times\overline{E}\right) + \overline{H}rot\overline{E} - \overline{E}\frac{\partial\overline{D}}{\partial t}. \tag{2.7}$$

Utilizând legea inducție electromagnetice, relația (2.7) devine:

$$p_j = div\left(\overline{H}\times\overline{E}\right) - \left(\overline{H}\frac{\partial\overline{B}}{\partial t} + \overline{E}\frac{\partial\overline{D}}{\partial t}\right). \tag{2.8}$$

Deoarece mediul este liniar, rezultă:

$$\overline{E}\frac{\partial\overline{D}}{\partial t} = \varepsilon\overline{E}\frac{\partial\overline{E}}{\partial t} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\overline{E}^2}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\overline{E}\overline{D}}{2}\right) \tag{2.9}$$

și similar pentru termenul în $\overline{H}$ și $\overline{B}$, astfel încât relația (2.8) se scrie:

$$p_j = div\left(\overline{H}\times\overline{E}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\overline{E}\overline{D}}{2} + \frac{\overline{H}\overline{B}}{2}\right). \tag{2.10}$$

Calculînd puterea totală transformată în procesul de conducție, pentru întreg domeniul D_Σ, se obține:

$$\int_{D_\Sigma} p_j\mathrm{d}V = \int_{D_\Sigma} div\left(\overline{H}\times\overline{E}\right)\mathrm{d}V - \int_{D_\Sigma}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\overline{E}\overline{D}}{2} + \frac{\overline{H}\overline{B}}{2}\right)\mathrm{d}V. \tag{2.11}$$

Se aplică teorema Gauss-Ostrogradski primului termen din partea dreaptă a ecuației (2.11) și se schimbă ordinea de scriere:

$$-\int_{D_\Sigma}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\overline{E}\overline{D}}{2} + \frac{\overline{H}\overline{B}}{2}\right)\mathrm{d}V = \int_{D_\Sigma} p_j\mathrm{d}V + \int_{\Sigma}\left(\overline{E}\times\overline{H}\right)\mathrm{d}\overline{A}. \tag{2.12}$$

Comparând ecuația (2.12) cu ecuația (2.6) și ținând seama că domeniul D_Σ este ales arbitrar, rezultă expresia densității de volum a energiei electromagnetice:

$$w_{em} = \frac{\overline{E}\overline{D}}{2} + \frac{\overline{H}\overline{B}}{2} \tag{2.13}$$

și vectorul Poynting:

$$\overline{S} = \overline{E}\times\overline{H}. \tag{2.14}$$

Observație:

Teorema energiei electromagnetice este satisfăcută de orice câmp de vectori care diferă de cel de mai sus (rel. 2.14) printr-o expresie cu divergență nulă.

Aplicația 2.1: Puterea electromagnetică primită de un conductor cilindric circular drept de rază a și rezistivitate ρ, parcurs de curentul continuu i (fig. 2.2).

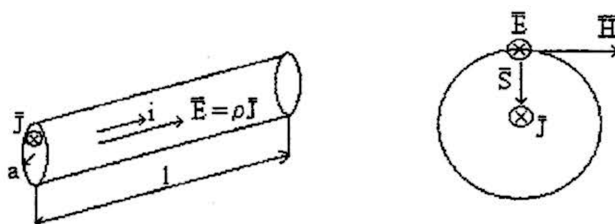


Fig. 2.2. Conductor cilindric drept parcurs de curentul continuu i.

Vectorul intensității câmpului electric este orientat axial și are valoarea

$$E = \rho J = \rho \frac{i}{\pi a^2}.$$

Vectorul intensității câmpului magnetic pe suprafața exterioară este orientat tangențial, asociat cu sensul curentului electric (omoparalel cu sensul lui $\overline{E}$) după regula burghiului drept și are valoarea

$$H = \frac{i}{2\pi a}.$$

Pe baza relației (2.9) rezultă că vectorul Poynting este orientat pe direcția razei, spre interiorul conductorului, având valoarea:

$$S = EH = \rho \frac{i^2}{2\pi^2 a^3}.$$

În consecință, puterea primită de conductorul în stare de conducție de la câmpul electromagnetic este:

$$P_\Sigma = \int_\Sigma \overline{S n_\Sigma} \mathrm{d}A = SA = \rho \frac{i^2}{2\pi^2 a^3} \cdot 2\pi a l = \rho \frac{l}{A} i^2 = R i^2.$$

S-a regăsit deci expresia puterii disipată prin efect electrocaloric (Joule-Lenz) al curentului electric de conducție.

2.2. TRANSMITEREA ENERGIEI ELECTROMAGNETICE PRIN CONDUCTOARE

Fie un conductor filiform de rază a, lungime l, rezistivitate ρ, parcurs de curentul de conducție i. Suprafața condcutorului este o suprafață de discontinuitate, Σ, pentru liniile de câmp electric și magnetic. Vectorii intensităților celor două câmpuri au următoarele orientări și satisfac următoarele condiții (fig. 2.3):

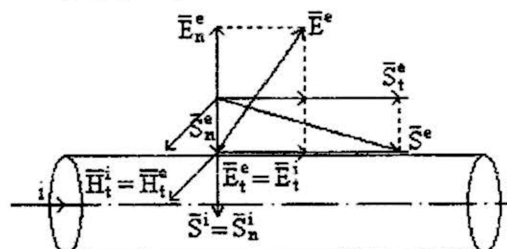


Fig. 2.3. Conductor filiform de rază a, lungime l, rezistivitate ρ, parcurs de curentul de conducție i.

- vectorul intensității câmpului electric $\overline{E}$ are:
    - în *interiorul* conductorului, $\overline{E}^i$ are o componentă axială $\overline{E}_t^i$,
    - în *exteriorul* conductorului, $\overline{E}^e$ are o componentă normală $\overline{E}_n^e$ şi una longitudinală (tangențială) $\overline{E}_t^e$.

  La suprafața Σ se conservă componenta tangențială a vectorului $\overline{E}_t^i = \overline{E}_t^e$.
- vectorul intensității câmpului magnetic $\overline{H}$ are:
    - în *interiorul* conductorului, $\overline{H}^i$ are o componentă tangentă la linia de câmp $\overline{H}_t^i$,
    - în *exteriorul* conductorului, $\overline{H}^e$ are o componentă tangentă la linia de câmp $\overline{H}_t^e$.

  La suprafața Σ se conservă componenta tangențială a vectorului $\overline{H}_t^i = \overline{H}_t^e$.
- vectorul densității fluxului de energie $\overline{S}$ are:
    - în *interiorul* conductorului, $\overline{S}^i$ are o componentă radială îndreptată spre axă $\overline{S}_n^i$,
    - în *exteriorul* conductorului, $\overline{S}^e$ are o componentă normală $\overline{S}_n^e$ şi una longitudinală (tangențială) $\overline{S}_t^e$.

Din definiția vectorului Poynting, (rel. 2.14), rezultă componentele acestuia din interiorul şi respectiv din exteriorul conductorului şi următoarele concluzii:

1. Componenta radială internă, $\overline{S}_n^i$, îndreptată spre axă, aduce regiunii din interiorul conductorului energia necesară procesului de conducție, regăsită sub forma de căldură prin efectul electrocaloric al curentului de conducție;
2. Componenta radială externă, $\overline{S}_n^e$, aduce din câmp până la suprafața conductorului energia necesară procesului de conducție;
3. Componenta longitudinală, $\overline{S}_t^e$, asigură transmiterea energiei în lungul conductorului spre receptor;
4. Conductorul are numai rol de ghidare a transmisiei energiei electromagnetice de la sursă la receptor, absorbind din câmp energia necesară acoperirii pierderilor care apar în procesul de conducție.

2.3. PUTEREA ELECTROMAGNETICĂ TRANSMISĂ PRINTR-O LINIE ELECTRICĂ

Fie un sistem izolat, delimitat de suprafața închisă Σ, prin care sistemul este alimentat cu o linie electrică cu *n* conductoare (fig. 2.4,a). Interesează calculul puterii electrice transmisă prin linie sistemului. Pentru aceasta se fac următoarele *ipoteze*, care reprezintă condiții satisfăcute de liniile de transport şi distribuție a energiei electromagnetice în regim cvasistaționar:

1. În afara conductoarelor nu există curent electric de conducție, adică: $i_{S_0} = 0$, deci pe S_0 $\overline{J} = 0$ în orice punct, iar sistemul fiind izolat, $q_{D_\Sigma} = ct.$, de unde rezultă pe baza legii conservării sarcinii electrice că $i_\Sigma = \sum_{k=1}^{n} i_k = 0$.
2. Pe Σ : $\frac{\partial \overline{D}}{\partial t}\overline{n}_\Sigma = 0$, deci componenta normală a inducției electrice, D_n, este constantă în toate punctele suprafeței Σ.

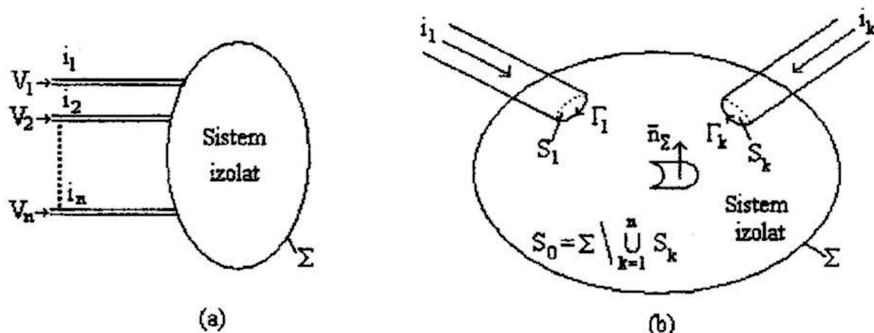


Fig. 2.3. Sistem alimentat cu o linie electrică cu n conductoare.

Demonstrație: Dacă $\dfrac{\partial \overline{D}}{\partial t} \neq 0$, rezultă că suprafața Σ comunică cu domeniul exterior prin curenți de deplasare, ceea ce contrazice ipoteza sistemului izolat.

3. Este necesar să se poată defini un potențial electric V pe Σ, din care derivă câmpul electric conform relației $\overline{E} = -gradV$. Pentru aceasta este necesar ca $\int_{\Gamma} \overline{E}\overline{ds} = 0$, respectiv $rot\overline{E} = 0$. Ultima relație conduce pe Σ la condiția $\dfrac{\partial \overline{B}}{\partial t}\overline{n}_\Sigma = 0$, adică $B_n = ct.$ în toate punctele suprafeței închise.

Demonstrație: Dacă $\dfrac{\partial \overline{B}}{\partial t} \neq 0$, rezultă că suprafața Σ comunică cu domeniul exterior prin cuplaje magnetice, ceea ce contrazice de asemenea, ipoteza sistemului izolat.

4. Pentru simplificare se consideră $\overline{J} \perp S_k$, adică $\overline{J} \times \overline{n} = 0$ pe $\bigcup_{k=1}^{n} S_k$. Cum $\overline{E} = \rho\overline{J}$, rezultă că și $\overline{E} \perp S_k$, deci cum $\overline{S} = \overline{E} \times \overline{H}$, rezultă că vectorul Poynting nu are componentă axială (tangențială), $\overline{S}_t$, în conductoare. Prin urmare, energia electromagnetică nu se transmite prin conductoare, ci numai prin suprafața S_0 din exteriorul lor, pe care $\overline{S}$ poate avea o componentă longitudinală, $\overline{S}_l \parallel \overline{n}_\Sigma$.

   Deoarece $\overline{E}$ nu are componentă tangentă la suprafețele S_k, rezultă că aceste suprafețe sunt echipotențiale, având potențialele V_1, V_2, ..., V_n, aceleași potențiale avându-le și contururile $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n$.

Cu aceste ipoteze, puterea electromagnetică ce intră în domeniul D_Σ prin suprafața Σ este:

$$P_{em} = \int_{\Sigma} \overline{S}\overline{n}_\Sigma \mathrm{d}A = \int_{S_0} \overline{S}\overline{n}_\Sigma \mathrm{d}A. \tag{2.15}$$

Cum

$$\overline{S} = \overline{E} \times \overline{H} = -(\nabla V) \times \overline{H} = -\nabla \times (V\overline{H}) + V(\nabla \times \overline{H}) = -rot(V\overline{H}) + Vrot\overline{H}, \tag{2.16}$$

relația (2.15) se poate scrie sub forma:

$$P_{em} = \int_{S_0} \left(-rot(V\overline{H}) + V rot\overline{H}\right)\overline{n}_\Sigma \mathrm{d}A. \tag{2.17}$$

Din prima ecuație a lui Maxwell,

$$rot\overline{H} = \overline{J} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} \tag{2.18}$$

și din primele două ipoteze, rezultă că al doilea termen din partea dreaptă a ecuației (2.17) este nul. În consecință

$$P_\Sigma = -\int_{S_0} rot(V\overline{H})\overline{n}_\Sigma \mathrm{d}A \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\cup\Gamma_k} \overline{V\overline{H}\mathrm{d}s}, \tag{2.19}$$

unde s-a ținut seama că contururile Γ_k (echipotențiale) pe care se transferă integrala, sunt parcurse în sens asociat cu sensul curenților i_k după regula burghiului drept, iar curenții, intrând în suprafața Σ, au sens contrar normalei $\overline{n}_\Sigma$. Relația se poate prelucra mai departe sub forma

$$P_\Sigma = \sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma_k} (V\overline{H})\overline{\mathrm{d}s}_k = \sum_{k=1}^{n} V_k \int_{\Gamma_k} \overline{H}\overline{\mathrm{d}s}_k = \sum_{k=1}^{n} V_k i_k. \tag{2.20}$$

Dacă suprafața Σ delimitează un receptor, relația (2.20) reprezintă puterea electromagnetică primită pe la borne de acest receptor.

Deoarece $\sum_{k=1}^{n} i_k = 0$, rezultă că alegerea originii potențialelor nu influențează valoarea puterii transmise, astfel încât:

$$P_\Sigma = \sum_{k=1}^{n} V_k i_k = \sum_{k=1}^{n} (V_k - V_0) i_k. \tag{2.21}$$

În cazul unei linii bifilare, relația (2.21) devine:

$$P_\Sigma = (V_1 - V_2)i = ui. \tag{2.22}$$

2.4. TEOREMA DE UNICITATE A CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC

Teorema de unicitate a câmpului electromagnetică arată că legile câmpului electromagnetic determină în mod univoc starea câmpului electromagnetic, în fiecare punct al uni domeniu V_Σ și în orice moment t, $t > t_0$, dacă sunt precizate:

- *Condițiile inițiale* – starea câmpului electromagnetic pentru orice punct din domeniul V_Σ la momentul t_0, adică:

$$\overline{E}(\overline{r}, t_0) \text{ și } \overline{H}(\overline{r}, t_0), \text{ pentru orice punct din } V_\Sigma; \tag{2.23}$$

- *Condițiile de frontieră* – distribuția, pe suprafața închisă Σ, care mărginește domeniu V_Σ, a componentelor tangențiale ale intensității câmpului electric sau ale intensității câmpului magnetic, după cum urmează:

$$\overline{E}_t(\overline{r}, t) \text{ sau } \overline{H}_t(\overline{r}, t), \text{ pentru orice moment } t > t_0 \text{ și pentru orice punct de pe } \Sigma; \tag{2.24}$$

- *Proprietățile de material și starea corpurilor din domeniul considerat*, caracterizate prin:

$$\varepsilon=\varepsilon(\bar{r}),\ \mu=\mu(\bar{r}),\ \rho=\rho(\bar{r}) \text{ şi } \bar{P}_p=\bar{P}_p(\bar{r},t),\ \bar{M}_p=\bar{M}_p(\bar{r},t),\ \bar{E}_i=\bar{E}_i(\bar{r},t) \tag{2.25}$$

Se presupune mediul liniar, izotrop şi în repaus ($\bar{v}=0$), deci caracterizat de ε,μ,ρ constante în timp.

Demonstrarea aceste teoreme este echivalentă cu verificarea completitudinii sistemului de legi ale teoriei macroscopice a fenomenelor electromagnetice. Unicitatea soluţiilor ecuaţiilor câmpului electromagnetic reflectă din punct de vedere matematic proprietatea obiectivă a câmpului electromagnetic de a satisface, ca orice sistem fizic, principul cauzalităţii.

Pentru a demonstra această teoremă se aplelează la procedeul reducerii la absurd. Se presupune, prin absurd, că ar exista două câmpuri electromagnetice distincte, care ar corepunde la aceleaşi condiţii de unicitate şi care ar fi caracterizate de mărimile:

$$\bar{E}'(\bar{r},t),\ \bar{D}'(\bar{r},t),\ \bar{H}'(\bar{r},t),\ \bar{B}'(\bar{r},t),\ \bar{J}'(\bar{r},t) \text{ şi } \bar{E}''(\bar{r},t),\ \bar{D}''(\bar{r},t),\ \bar{H}''(\bar{r},t),\ \bar{B}''(\bar{r},t),\ \bar{J}''(\bar{r},t). \tag{2.26}$$

Evident, aceste mărimi satisfac legile câmpului electromagnetic pentru mediile liniare, izotrope şi în repaus:

$$\begin{aligned}
&rot\,\bar{E}'=-\frac{\partial \bar{B}'}{\partial t}; \quad rot\,\bar{H}''=-\frac{\partial \bar{B}''}{\partial t};\\
&rot\,\bar{H}'=\bar{J}'+\frac{\partial \bar{D}'}{\partial t}; \quad rot\,\bar{H}''=\bar{J}''+\frac{\partial \bar{D}''}{\partial t};\\
&\bar{J}'=\sigma(\bar{E}'+\bar{E}_i); \quad \bar{J}''=\sigma(\bar{E}''+\bar{E}_i);\\
&\bar{D}'=\varepsilon\bar{E}'+\bar{P}_p; \quad \bar{D}''=\varepsilon\bar{E}''+\bar{P}_p;\\
&\bar{D}'=\varepsilon\bar{E}'+\bar{P}_p; \quad \bar{D}''=\varepsilon\bar{E}''+\bar{P}_p,
\end{aligned} \tag{2.27}$$

satisfac aceleaşi condiţii iniţiale

$$\bar{E}'(\bar{r},t_0)=\bar{E}''(\bar{r},t_0)=\bar{E}(\bar{r},t_0),\ \bar{H}'(\bar{r},t_0)=\bar{H}''(\bar{r},t_0)=\bar{H}(\bar{r},t_0), \tag{2.28}$$

pentru orice punct din domeniul V_Σ, şi aceleaşi condiţii pe frontieră:

$$\bar{E}'_t(\bar{r},t)=\bar{E}''_t(\bar{r},t)=\bar{E}_t(\bar{r},t) \text{sau } \bar{H}'_t(\bar{r},t)=\bar{H}''_t(\bar{r},t)=\bar{H}_t(\bar{r},t), \tag{2.29}$$

pentru orice moment $t>t_0$ şi pentru orice punct de pe Σ.

Se definesc mărimile diferenţă:

$$\bar{E}_d=\bar{E}'-\bar{E}'';\ \bar{D}_d=\bar{D}'-\bar{D}'';\ \bar{H}_d=\bar{H}'-\bar{H}'';\ \bar{B}_d=\bar{B}'-\bar{B}'';\ \bar{J}_d=\bar{J}'-\bar{J}'', \tag{2.30}$$

care vor satisface sistemul de ecuaţii:

$$rot\,\bar{E}_d=-\frac{\partial \bar{B}_d}{\partial t};\ rot\,\bar{H}_d=\bar{J}_d+\frac{\partial \bar{D}_d}{\partial t};\ \bar{J}_d=\sigma\bar{E}_d;\ \bar{D}_d=\varepsilon\bar{E}_d;\ \bar{B}_d=\mu\bar{H}_d, \tag{2.31}$$

obţinut prin scăderea între ele a ecuaţiilor (2.27).

Având în vedere ecuaţiile (2.28) şi (2.29), rezultă condiţiile iniţiale şi condiţiile de frontieră ale mărimilor diferenţă sunt nule, adică:

$$\bar{E}_d(\bar{r},t_0)=\bar{E}'(\bar{r},t_0)-\bar{E}''(\bar{r},t_0)=0,\ \bar{H}_d(\bar{r},t_0)=\bar{H}'(\bar{r},t_0)-\bar{H}''(\bar{r},t_0)=0, \text{ pe } V_\Sigma \tag{2.32}$$

şi

$$\bar{E}_{d_t}(\bar{r},t)=\bar{E}'_t(\bar{r},t)-\bar{E}''_t(\bar{r},t)=0 \text{ sau } \bar{H}_{d_t}(\bar{r},t)=\bar{H}'_t(\bar{r},t)-\bar{H}''_t(\bar{r},t)=0, \text{ pe } \Sigma. \tag{2.33}$$

Fie expresia:

$$P_{jd} = \int_{V_\Sigma} \overline{E}_d \overline{J}_d \mathrm{d}V. \qquad (2.34)$$

Folosind a doua ecuaţie din ecuaţiile (2.31), rezultă:

$$P_{jd} = \int_{V_\Sigma} \overline{E}_d \left(rot\overline{H}_d - \frac{\partial \overline{D}_d}{\partial t} \right) \mathrm{d}V = \int_{V_\Sigma} \left[div\left(\overline{H}_d \times \overline{E}_d\right) + \overline{H}_d rot\overline{E}_d - \overline{E}_d \frac{\partial \overline{D}_d}{\partial t} \right] \mathrm{d}V. \qquad (2.35)$$

Aplicând teorema Gauss-Ostrogradski primului termen al expresiei (2.35) şi ţinînd seama de prima relaţie (2.31), se obţine:

$$P_{jd} = \int_\Sigma \left(\overline{H}_d \times \overline{E}_d\right) \overline{\mathrm{d}A} - \int_{V_\Sigma} \left(\overline{E}_d \frac{\partial \overline{D}_d}{\partial t} + \overline{H}_d \frac{\partial \overline{B}_d}{\partial t} \right) \mathrm{d}V, \qquad (2.36)$$

sau, utilizând ultimele două relaţii (2.31), rezultă:

$$P_{jd} = \int_\Sigma \left(\overline{H}_d \times \overline{E}_d\right) \overline{\mathrm{d}A} - \int_{V_\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon \overline{E}_d^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu \overline{H}_d^2}{2} \right) \right) \mathrm{d}V. \qquad (2.37)$$

Condiţia de frontieră (2.33) determină ca primul termen al expresiei (2.37) să fie nul, astfel încât se poate scrie:

$$P_{jd} = \int_{V_\Sigma} \overline{E}_d \overline{J}_d \mathrm{d}V = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_\Sigma} \left(\frac{\varepsilon \overline{E}_d^2}{2} + \frac{\mu \overline{H}_d^2}{2} \right) \mathrm{d}V, \qquad (2.38)$$

sau utilizând relaţia $\overline{J}_d = \sigma \overline{E}_d$:

$$P_{jd} = \int_{V_\Sigma} \sigma \overline{E}_d^2 \mathrm{d}V = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_\Sigma} \left(\frac{\varepsilon \overline{E}_d^2}{2} + \frac{\mu \overline{H}_d^2}{2} \right) \mathrm{d}V. \qquad (2.39)$$

Primul termen al expresiei (2.39) este nenegativ, deoarece $\sigma > 0$ şi $\overline{E}_d^2 \geq 0$ astfel încât derivata integralei din termenul doi este nepozitivă şi, ca urmare, integrala este constantă sau scăzătoare. Conform condiţiilor iniţiale (2.32), valoarea integralei în momentul t_0 este nulă şi rezultă că la un moment $t > t_0$ valoarea acestei integrale nu poate fi decât negativă sau nulă. Însă, pe de altă parte, integrala este sigur nenegativă, deoarece $\varepsilon > 0$ şi $\mu > 0$, rezultă că trebuie să fie nulă în orice moment $t > t_0$:

$$\int_{V_\Sigma} \left(\frac{\varepsilon \overline{E}_d^2}{2} + \frac{\mu \overline{H}_d^2}{2} \right) \mathrm{d}V = 0. \qquad (2.40)$$

De aici se obţine:

$$\overline{E}_d\left(\overline{r}, t\right) = 0 \text{ şi } \overline{H}_d\left(\overline{r}, t\right) = 0 \qquad (2.41)$$

şi ţinînd seama de relaţiile (2.30):

$$\overline{D}_d\left(\overline{r}, t\right) = 0; \overline{B}_d\left(\overline{r}, t\right) = 0 \text{ şi } \overline{J}_d\left(\overline{r}, t\right) = 0, \qquad (2.42)$$

Pentru orice punct din domeniul considerat V_Σ şi în orice moment t, $t > t_0$.

Deci, conform relaţiilor (2.30) mărimile celor două câmpuri electromagnetice coincid, ceea ce contrazice ipoteza.

În consecință, într-un domeniu dintr-un mediu liniar și izotrop, aflat în repaus, valorile mărimilor ce caracterizează câmpul electromagnetic, sunt univoc determinate de legile teoriei macroscopice a fenomeneloc electromagnetice, de condițiile inițiale, de condițiile de frontieră, pentru mărimi de material precizate.

2.5. TEOREMA REFRACȚIEI LINIILOR DE CÂMP MAGNETIC

La trecerea liniilor de câmp magnetic printr-o suprafață de separație între două medii cu permeabilități diferite (fig. 2.4) are loc refracția acestora după relația

$$\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2}=\frac{\frac{B_{1t}}{B_{1n}}}{\frac{B_{2t}}{B_{2n}}}=\frac{B_{1t}}{B_{2t}}=\frac{\mu_1 H_{1t}}{\mu_2 H_{2t}}=\frac{\mu_1}{\mu_2}, \tag{2.43}$$

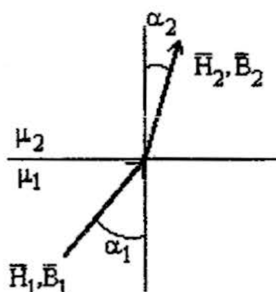


Fig. 2.4. Referitor la teorema refracției liniilor de câmp magnetic.

care a fost prelucrată ținând seama de forma locală a legii fluxului magnetic și de forma locală a legii circuitului magnetic.

Din relația (2.43) rezultă că *la suprafața de separație dintre un corp feromagnetic* ($\mu \to \infty$) *și unul neferomagnetic* ($\mu \to \mu_0$), *liniile de câmp magnetic ies perpendicular pe suprafața corpului feromagnetic.*

2.6. CIRCUITE MAGNETICE

2.6.1. Considerații generale

Conform teoremei refracției, liniile de câmp magnetic sunt practic tangențiale pe fețele interioare ale suprafeței corpurilor feromagnetice cu $\mu >> \mu_0$ și la suprafețele de separație (de discontinuitate) se conservă componenta tangențială a intensității câmpului magnetic $H_{2t}=H_{1t}$. În interiorul corpurilor feromagnetice componenta tangențială a inducției magnetice satisface relația

$$B_{1t}=\mu_1 H_{1t} >> B_{2t}=\mu_0 H_{2t}. \tag{2.44}$$

Prin urmare liniile inducției magnetice sunt conduse prin corpurile feromagnetice aproximativ precum liniile densității curentului electric de conducție prin conductoare.

Deoarece liniile de inducție magnetică sunt închise ($div\bar{B}=0$), se numește *circuit magnetic* ansamblul corpurilor feromagnetice (sau ferimagnetice) și a porțiunilor care le separată, numite întrefieruri și umplute cu material neferomagnetic, prin care trec aceste linii.

În conformitate cu relația (2.44), rezultă că pentru obținerea unor inducții magnetice, respectiv fluxuri magnetice mari, la valori date ale câmpului magnetic, este necesar ca înfășurările bobinelor să se dispună pe porțiuni din material feromagnetic.

Un circuit magnetic este compus din porțiuni numite coloane (sau miezuri), pe care se dispun bobinele, din porțiuni fără înfășurări prin care se închid liniile de câmp, numite juguri (cele din material feromagnetic) și întrefieruri, și eventual din porțiuni mobile, numite armături.

Pe părțile laterale ale întrefierurilor apar polii magnetici. Convențional se numește pol nord (N) porțiunea de material feromagnetic din care ies liniile de câmp magnetic și pol sud (S), cea în care intră liniile de câmp magnetic.

Cea mai mare parte a liniilor inducției magnetice se închid prin circuitul magnetic determinând câmpul magnetic util (principal). Restul liniilor de câmp, care se închid parțial prin circuitul magnetic, parțial prin mediul neferomagnetic (de obicei aer) înconjurător formează liniile câmpului magnetic de dispersie (sau scăpări).

Rezolvarea circuitelor magnetice constă în:

1. Determinarea fluxurilor utile și a celor de dispersie la o distribuție dată a solenațiilor;
2. Determinarea solenațiilor de excitație necesare producerii unui flux util cerut.

Rezolvarea se poate face

1. Direct – aplicând legea fluxului magnetic și teorema lui Ampère;
2. Utilizând analogia dintre circuitele electrice și cele magnetice.

Calculul circuitelor magnetice se face numai în regim staționar și cvasistaționar și în următoarele *ipoteze simplificatoare*:

a) Se neglijează fenomenul dispersiei magnetice;
b) Se consideră fluxul magnetic uniform repartizat pe secțiunea transversală a circuitului magnetic, astfel încât inducția magnetică să fie constantă în toate punctele secțiunii, iar:

$$\Phi_f = B \cdot A, \tag{2.45}$$

unde Φ_f este fluxul magnetic fascicular definit ca fluxul magnetic calculat prin secțiunea unei laturi a circuitului magnetic (analog curentului electric de inducție în electrocinetică).

2.6.2. Legea lui Ohm pentru circuite magnetice

Se consideră o porțiune neramificată de circuit magnetic (fig. 2.5) care formează un tub de flux (are același flux în orice secțiune transversală). Conform ipotezei simplificatoare b) rezultă:

$$H = \frac{B}{\mu} = \frac{\Phi_f}{\mu \cdot A}. \tag{2.46}$$

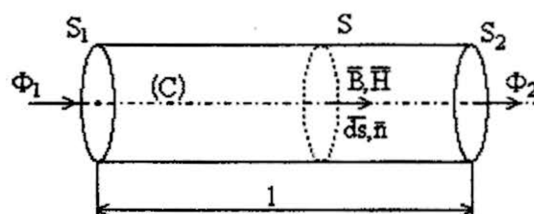


Fig. 2.5. Porțiune neramificată de circuit magnetic.

Calculând tensiunea magnetică de-a lungul liniei medii de câmp (C) între două secțiuni transversale obținem:

$$U_m = \int_{1(C)}^{2} \overline{H}\mathrm{d}\overline{s} = \int_{1(C)}^{2} H\mathrm{d}s = \int_{1(C)}^{2} \frac{\Phi_f}{\mu A}\mathrm{d}s = \Phi_f \int_{1(C)}^{2} \frac{\mathrm{d}s}{\mu A}, \tag{2.47}$$

unde integrala din relație, notată cu R_m, se numește *reluctanță*. Pentru o porțiune omogenă de circuit magnetic (μ=ct.) cu secțiune constantă,

$$R_m = \frac{l}{\mu A}. \tag{2.48}$$

Relația

$$U_m = \Phi_f R_m, \tag{2.49}$$

reprezintă legea lui Ohm pentru circuite magnetice.

Unitatea de măsură a reluctanței este [A/Wb] sau [H^{-1}]. Inversul reluctanței se numește *permeanță*, are simbolul Λ și unitatea de măsură [Wb/A] sau [H].

Rezultă următoarea analogie între circuitele electrice și cele magnetice (tabelul 2.1):

Tabel 2.1

Circuite electrice		Circuite magnetice	
Densitatea curentului	J	Inducția magnetică	B
Intensitatea câmpului electric	E	Intensitatea câmpului magnetic	H
Intensitatea curentului de conducție	I	Fluxul magnetic fascicular	Φ_f
Tensiunea electrică	U	Tensiunea magnetică	U_m
Rezistența electrică	R	Reluctanța	R_m
Conductanța	G	Permeanța	Λ
Tensiunea electromotoare	e (E)	Solenația	Θ

2.6.3. Teoremele lui Kirchhoff pentru circuite magnetice

Prima teoremă: Se consideră nodul (i) al unui circuit magnetic și o suprafață Σ care intersectează laturile circuitului în secțiunile S_1, S_2, ... S_k,... S_n. Se aplică *legea fluxului magnetic* pe suprafața Σ ținând seama de ipoteza privind neglijarea dispersiei. În consecință, cum inducția magnetică este nenulă numai prin secțiunile (S_k) ale circuitului magnetic, rezultă:

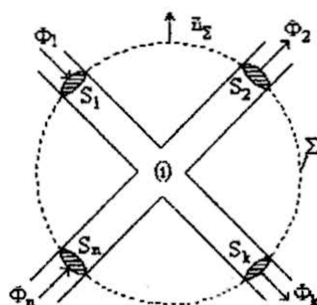


Fig. 2.6. Un nod de circuit magnetic.

$$\Phi_\Sigma = \sum_{l_k \in (i)} (A) \Phi_{fk} = 0. \tag{2.50}$$

Relația (2.50) reprezintă prima teoremă a lui Kirchhoff pentru circuite magnetice: "*Suma algebrică a fluxurilor magnetice fasciculare din laturile incidente la un nod al unui circuit magnetic este nulă*" (fig. 2.6). Relația poate fi scrisă în n-1 noduri ale circuitului magnetic.

Semnul pozitiv în suma algebrică se ia când sensul fluxurilor fasciculare coincide cu sensul normalei $\overline{n_\Sigma}$.

Teorema a doua: Se consideră o buclă de circuit magnetic (h) în care curba Γ (fig. 2.7) reprezintă linia medie de câmp. Descompunând această curbă şi aplicând *teorema lui Ampère* se obţine:

$$\int_{\Gamma} \overline{H}\,\mathrm{d}\overline{s} = \sum_{l_k \in (h)} \int_{C_k} \overline{H}\,\mathrm{d}\overline{s} = \sum_{l_k \in (h)} {}_{(A)} U_{mk} = \Theta_{S_k}. \qquad (2.51)$$

Solenaţia totală ce străbate suprafaţa S_Γ este suma solenaţiilor bobinelor de pe laturile circuitului, în consecinţă:

$$\sum_{l_k \in (h)} {}_{(A)} U_{mk} = \sum_{l_k \in (h)} {}_{(A)} N_k i_k. \qquad (2.52)$$

Relaţia (2.52) reprezintă a doua teoremă a lui Kirchhoff pentru circuite magnetice cu enunţul: "*Suma algebrică a căderilor de tensiune magnetică de pe laturile circuitului ce alcătuiesc o buclă este egală cu suma algebrică a solenaţiilor bobinelor dispuse pe aceste laturi*". Ţinând seama de (2.49), relaţia (2.52) devine:

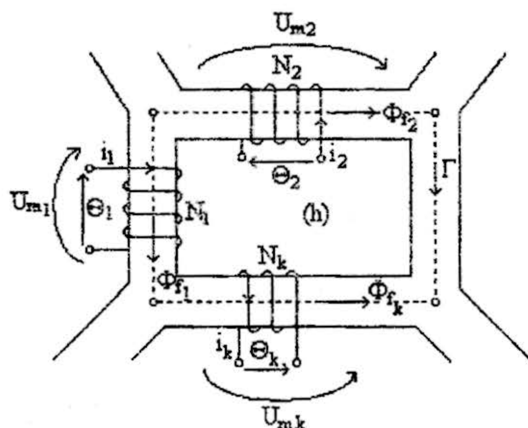


Fig. 2.7. O buclă de circuit magnetic.

$$\sum_{l_k \in (h)} {}_{(A)} R_{mk} \Phi_{fk} = \sum_{l_k \in (h)} {}_{(A)} N_k i_k. \qquad (2.53)$$

Θ_k este asociată cu i_k după regula burghiului drept;
U_{mk} are acelaşi sens de referinţă cu Φ_{fk} (ce are sens arbitrar).

2.7. INDUCTIVITĂŢI

2.7.1. Inductivităţi proprii şi mutuale

Se consideră un circuit filiform 1, care ocupă conturul Γ_1, şi fiind parcurs de curentul de conducţie i_1, produce un câmp magnetic de inducţie $\overline{B_1}$ ale cărui linii de câmp sunt reprezentate în figura 2.8.

Se numeşte flux magnetic propriu al circuitului 1 fluxul magnetic al câmpului de inducţie $\overline{B_1}$ printr-o suprafaţă $S_{\Gamma 1}$:

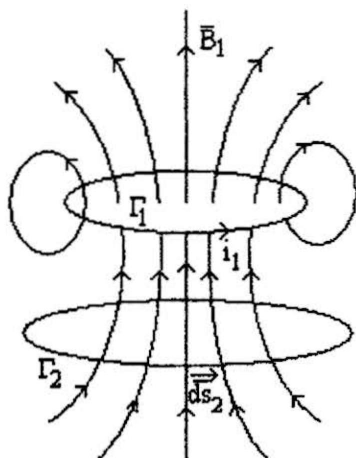


Fig. 2.8. Definirea inductivităţilor proprii şi mutuale.

$$\Phi_{11} \stackrel{d}{=} \int_{S_{\Gamma 1}} \overline{B_1 n_1} \mathrm{d}A. \tag{2.54}$$

Versorul normalei $\overline{n_1}$ este asociat sensului de parcurgere al conturului Γ_1 (care coincide cu sensul curentului i_1) după regula burghiului drept.

Se numeşte inductivitate proprie raportul strict pozitiv:

$$L_{11} \stackrel{d}{=} \frac{\Phi_{11}}{i_1} > 0. \tag{2.55}$$

Dacă în vecinătatea circuitului 1, numit circuit excitator, se află un alt circuit 2 neparcurs de curent, numit circuit indus, ocupând conturul Γ_2, câmpul magnetic $\overline{B_1}$ determină prin acesta un flux magnetic mutual Φ_{21}:

$$\Phi_{21} \stackrel{d}{=} \int_{S_{\Gamma 2}} \overline{B_1 n_2} \mathrm{d}A. \tag{2.56}$$

Versorul normalei $\overline{n_2}$ este asociat sensului de parcurgere al conturului Γ_2 după regula burghiului drept. Se numeşte inductivitate mutuală a circuitului 2 în raport cu circuitul 1, raportul:

$$L_{21} \stackrel{d}{=} \frac{\Phi_{21}}{i_1}. \tag{2.57}$$

Semnul inductivităţii mutuale este dat de modul în care se corelează sensul de referinţă al lui i_1 cu sensul de parcurgere al lui Γ_2.

Fluxurile în raport cu care se definesc inductivităţile proprii şi mutuale sunt fluxuri totale. Dacă circuitele 1 şi 2 sunt alcătuite din bobine cu N_1, respectiv N_2 spire, care ocupă poziţii apropiate, se calculează fluxurile totale cu ajutorul fluxului magnetic fascicular al unei spire medii, astfel încât relaţiile (2.55) şi (2.57) devin:

$$L_{11} \stackrel{d}{=} N_1 \frac{\Phi_{f11}}{i_1} > 0, \tag{2.58}$$

respectiv

$$L_{21} \stackrel{d}{=} N_2 \frac{\Phi_{f21}}{i_1}. \tag{2.59}$$

Inductivitatea mutuală L_{21} este pozitivă (negativă) când sensul liniilor de câmp magnetic produs de curentul i_1 în circuitul 2 coincide (nu coincide) cu sensul liniilor de câmp magnetic produs în circuitul 2 de propriu curent i_2.

Reluând raționamentul pentru $i_2 \neq 0$ și $i_1 = 0$ se pot defini inductivitatea proprie a circuitului 2 și inductivitatea mutuală L_{12} a circuitului 1 în raport cu circuitul 2

$$L_{22} \stackrel{d}{=} N_2 \frac{\Phi_{f22}}{i_2} > 0 \tag{2.60}$$

și

$$L_{12} \stackrel{d}{=} N_1 \frac{\Phi_{f12}}{i_2}. \tag{2.61}$$

Inductivitățile mutuale satisfac relația de reciprocitate

$$L_{12} = L_{21}. \tag{2.62}$$

Modul inductivității mutale se nodează cu $M_{21} = |L_{21}| = M_{12} = |L_{12}|$. În practică se alege, din cele două borne de acces ale fiecarei bobine cuplate magnetic, câte o bornă de referință notată cu '*' și numită *borna polarizată* sau de *aceleași nume*. În funcție de sensul curenților față de bornele polarizate, inductivitatea mutuală este pozitivă (negativă) dacă curenții bobinelor cuplate magnetic au (nu au) aceleași sensuri în raport cu bornele polarizate.

Dacă se neglizează dispersia

$$L_{12}^2 = L_{11} L_{22}. \tag{2.63}$$

În tehnică se definește un factor de cuplaj

$$k = \frac{|L_{12}|}{\sqrt{L_{11} L_{22}}} \tag{2.64}$$

$k = 0 \rightarrow L_{12} = 0 \rightarrow$ bobinele sunt necuplate magnetic;

$k = 1 \rightarrow L_{12}^2 = L_{11} L_{22} \rightarrow$ cuplajul magnetic este perfect.

Unitatea de măsură a inductivității este *Henry* [H], 1H = 1Wb/1A.

Se poate calcula fluxul magnetic al unui circuit j, corespunzător unui sens de parcurgere dat, prin însumarea fluxului magnetic propriu, $\Phi_{jj} = L_{jj} i_j$, cu fluxurile magnetice mutuale, $\Phi_{jk} = L_{jk} i_k$:

$$\Phi_j = \sum_{k=1}^{n} L_{jk} i_k, \quad j=1,2,\ldots,n. \tag{2.65}$$

Relațiile (2.65) se numesc *relațiile lui Maxwell pentru inductivități*. Inductivitatea mutuală L_{jk} este pozitivă (negativă) când sensul liniilor de câmp magnetic produs de curentul i_k în circuitul j coincide (nu coincide) cu sensul liniilor de câmp magnetic produs în circuitul j de propriu curent i_j.

Aplicația 2.2: Calculul inductivității proprii a unei înfășurări cu N spire, bobinate uniform pe o porțiune de circuit magnetic omogen. Ținând seama că inductivitatea proprie se definește în funcție de fluxul magnetic total și aplicând legea lui Ohm pentru circuite magnetice, se obține o expresie a inductivității proprii a unei bobine în funcție de numărul de spire și caracteristicile geometrice și de material ale circuitului magnetic pe care este dispusă:

$$L=\frac{\Phi}{i}=\frac{N\Phi_f}{i}=\frac{N^2\Phi_f}{Ni}=\frac{N^2}{R_m}. \tag{2.61}$$

Relația mai poate fi dedusă cu ajutorul intensității câmpului magnetic al unui solenoid foarte lung:

$$L=\frac{\Phi}{i}=\frac{N\Phi_f}{i}=\frac{NBA}{i}=\frac{N\mu HA}{i}=\frac{N\mu\frac{Ni}{l}A}{i}=N^2\frac{\mu A}{l}=\frac{N^2}{R_m}. \tag{2.62}$$

2.7.2. Inductivități de dispersie și utile

Se fac următoarele notații în concordanță cu figura 2.9:

Φ_{f11} – reprezintă fluxul fascicular produs de circuitul 1 ce trece printr-o spiră a circuitului 1;
Φ_{f21} – reprezintă fluxul fascicular produs de circuitul 1 ce trece printr-o spiră a circuitului 2, numit flux util;
Φ_{fd21} – este fluxul de dispersie al circuitului 1 față de circuitul 2, adică fluxul fascicular produs de circuitul 1 ce nu trece prin circuitul 2, numit flux de scăpări.

Între aceste fluxuri există următoarele relația:

$$\Phi_{f11}=\left|\Phi_{f21}\right|+\Phi_{fd21}, \tag{2.63}$$

de unde rezultă

$$\Phi_{fd21}=\Phi_{f11}-\left|\Phi_{f21}\right|. \tag{2.64}$$

Se numește inductivitate de dispersie a circuitului 1 față de circuitul 2

$$L_{d21}=N_1\frac{\Phi_{fd21}}{i_1}=N_1\frac{\Phi_{f11}}{i_1}-N_1\frac{\left|\Phi_{f21}\right|}{i_1}. \tag{2.65}$$

Ținând seama de relațiile (2.43) și (2.44) se obține

$$L_{d21}=L_{11}-\frac{N_1}{N_2}\left|L_{21}\right|>0. \tag{2.66}$$

Analog se obține

$$L_{d12}=L_{22}-\frac{N_2}{N_1}\left|L_{12}\right|>0. \tag{2.67}$$

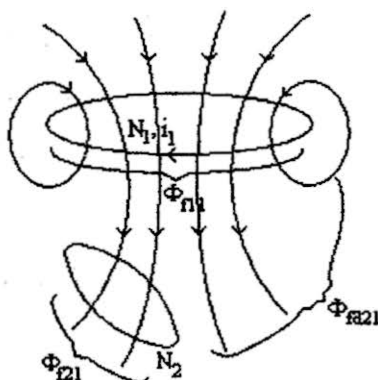


Fig. 2.9. Definirea inductivităților utile și de scăpări.

În general

$$L_{d12} \neq L_{d21}. \qquad (2.68)$$

Inductivitățile proprii se pot exprima sub forma

$$\begin{aligned} L_{11} &= L_{d21} + L_{u21} \\ L_{22} &= L_{d12} + L_{u12} \end{aligned}. \qquad (2.69)$$

2.8. ENERGIA ȘI FORȚELE CÂMPULUI MAGNETIC

2.8.1. Energia câmpului magnetic

Se consideră un sistem de n circuite electrice filiforme, caracterizate de rezistențele electrice, tensiunile la borne, curenții și fluxurile magnetice R_k, u_k, i_k, Φ_k (fig. 2.10)

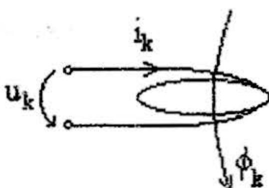


Fig. 2.10. Referitor la energia câmpului magnetic.

Energia magnetică a sistemului poate fi calculată pe baza principiului conservării energiei, conform căruia energia primită de la surse trebuie să acopere pierderile prin efect Joule în rezistențele circuitelor, lucrul mecanic al forțelor generalizate și creșterea energiei magnetice a sistemului:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k i_k \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} R_k i_k^2 \mathrm{d}t + \delta L + \mathrm{d}W_m. \qquad (2.70)$$

Dacă se aplică legea conducției electrice, pentru circuitul k se obține:

$$u_{fk} + e_{ik} = R_k i_k, \qquad (2.71)$$

unde u_{fk} este tensiunea electrică în lungul firului, iar e_{ik} reprezintă t.e.m. a circuitului, considerată nulă. Legea inducției electromagnetice, aplicată conturului închis format din conductorul circuitului k și linia tensiunii la borne, are forma:

$$e_\Gamma = u_{fk} - u_k = -\frac{\mathrm{d}\Phi_k}{\mathrm{d}t}. \qquad (2.72)$$

Considerând fluxurile magnetice variabile în timp, din ultimele două ecuații se obține:

$$u_k = R_k i_k + \frac{\mathrm{d}\Phi_k}{\mathrm{d}t}. \qquad (2.73)$$

Înmulțind relația (2.73) cu $i_k \mathrm{d}t$ și sumând pentru toate circuitele, rezultă relația:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k i_k \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} R_k i_k^2 \mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n} i_k \mathrm{d}\Phi_k. \qquad (2.74)$$

Comparând relațiile (2.70) și (2.74) se obține:

$$\delta L + \mathrm{d}W_m = \sum_{k=1}^{n} i_k \mathrm{d}\Phi_k . \tag{2.75}$$

Considerând că în sistem au loc transformări în care nu se efectuează lucru mecanic (circuitele sunt imobile), iar într-o stare intermediară curenții și fluxurile magnetice satisfac relațiile $i_k^{'} = \lambda i_k$, respectiv $\Phi_k^{'} = \lambda\Phi_k$, cu $\lambda \in [0,1]$, prin integrarea relației (2.75) se obține:

$$W_m = \int_{\lambda=0}^{\lambda=1} \sum_{k=1}^{n} i_k^{'} \mathrm{d}\Phi_k^{'} = \left(\sum_{k=1}^{n} \Phi_k i_k\right) \int_0^1 \lambda \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \Phi_k i_k . \tag{2.76}$$

În particular, pentru o bobină, $n = 1$, $\Phi = Li$ și

$$W_m = \frac{1}{2}\Phi i = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{\Phi^2}{2L}, \tag{2.77}$$

iar pentru două bobine cuplate magnetic

$$W_m = \frac{1}{2} L_{11} i_1^2 + \frac{1}{2} L_{22} i_2^2 + L_{12} i_1 i_2 . \tag{2.78}$$

Primul termen reprezintă energia magnetică proprie a bobinei 1, al doilea - energia magnetică proprie a bobinei 2, iar al treilea – energia magnetică de interacțiune a bobinelor.

În general, pentru un circuit oarecare parcurs de curentul i, situat într-un câmp magnetic exterior, energia de interacțiune este:

$$W_{\text{int}} = i\Phi_{ext} . \tag{2.79}$$

În § 2.1 s-a stabilit expresia densității de volum a energiei electromagnetice (relația (2.13)):

$$w_{em} = \frac{\overline{ED}}{2} + \frac{\overline{HB}}{2} \tag{2.80}$$

din care densitatea de volum a energiei electrice este

$$w_e = \frac{\overline{ED}}{2} = \frac{\varepsilon \overline{E}^2}{2}, \tag{2.81}$$

iar densitatea de volum a energiei magnetice are expresia:

$$w_m = \frac{\overline{HB}}{2} = \frac{\mu \overline{H}^2}{2} . \tag{2.82}$$

Observație:

Pentru a se compara densitatea de volum a energiei electrice cu cea a energiei magnetice, pentru valori practice ale mărimilor de stare, se determină:

- Densitatea de volum a energiei electrice în cazul unui câmp electric în aer, cu o intensitate a câmpului de 10 kV/cm (la 21 kV/cm se străpunge aerul):

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi \cdot 910^9} \frac{10^8}{10^{-4}} \approx 4{,}42 \;\; \mathrm{J/m^3} ;$$

- Densitatea de volum a energiei magnetice pentru un câmp magnetic în aer, cu inducția de 1 T (inducții magnetice de 3T se realizează în mod curent):

$$w_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi 10^{-7}} = \frac{10^7}{8\pi} \approx 400.000 \;\; \mathrm{J/m^3} .$$

Se observă că densitatea de volum a energiei magnetice este de aproximativ 90.000 de ori mai mare decât a celei electrice, ceea ce justifică importanța aplicațiilor tehnice și domeniile largi de utilizare a dispozitivelor magnetice.

Aplicație 2.3: Calculul energiei câmpului magnetic din interiorul unui conductor cilindric drept de lungime l foarte mare și rază $a<<l$, parcurs de curentul i (fig. 2.11).

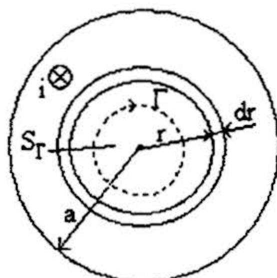


Fig. 2.11. Conductor cilindric drept de lungime l.

Considerând un volum elementar de forma unei coji cilindrice și intensitatea câmpului magnetic din interiorul conductorului (determinată în cadrul aplicației 1 din paragraful 4.5) energia elementară în interiorul conductorului se exprimă cu relația:

$$dW_m^i = w_m \cdot dv = \frac{1}{2}\mu\left(H^i\right)^2 \cdot 2\pi r l dr =$$

$$= i^2 \frac{\mu l}{4\pi a^4} r^3 dr$$

Energia magnetică totală localizată în interiorul conductorului este:

$$W_m^i = i^2 \frac{\mu l}{4\pi a^4}\int_0^a r^3 dr = i^2 \frac{\mu l}{16\pi}.$$

Inductivitatea corespunzătoare câmpului magnetic din interiorul conductorului masiv este:

$$L^i = \frac{2W_m^i}{i^2} = \frac{\mu l}{8\pi}.$$

Pentru o linie cu 2 conductoare paralele, identice, situate la distanță mult mai mare decât raza lor, inductivitatea interioară este dublă:

$$L^i = \frac{\mu l}{4\pi}.$$

2.8.2. Teoremele forțelor generalizate în câmp magnetic

Lucrul mecanic elementar care se efectuează la o deplasare elementară dx a unuia din circuitele sistemului, în câmp magnetic, se poate determina din relația (2.75):

$$\delta L = \sum_{k=1}^{n} i_k d\Phi_k - dW_m. \tag{2.83}$$

Calculul forței generalizate X, asociată coordonatei generalizate x, (acționând pe direcția de creștere a lui x) se poate face în două ipoteze:

➤ *Fluxurile magnetice sunt menținute constante*, adică $\Phi_k = ct.$ și $d\Phi_k = 0$.

În acest caz

$$\delta L = -\left(dW_m\right)_{\Phi=ct.} \tag{2.84}$$

și lucrul mecanic se efectuează în baza scăderii energiei magnetice a sistemului.

Exprimând energia magnetică în funcţie numai de fluxurile magnetice şi de coordonata generalizată, $W_m = W_m(\Phi_1,...,\Phi_n,x)$, (în cazul unei bobine $W_m = \frac{\Phi^2}{2L(x)}$) şi lucrul mecanic cu relaţia generală $\delta L = X\mathrm{d}x$, relaţia (2.84) conduce, în ipoteza de lucru adoptată, la:

$$X = -\left(\frac{\partial W_m}{\partial x}\right)_{\Phi=ct.}, \tag{2.85}$$

relaţie ce reprezintă prima teoremă a forţelor generalizate în câmp magnetic:
"Forţa generalizată X asociată coordonatei generalizate x este egală cu derivata parţială cu semn schimbat a energiei magnetice a sistemului (exprimată în funcţie numai de fluxurile magnetice şi coordonata generalizată), în raport cu coordonata generalizată x, la fluxuri constante."

➢ *Curenţii circuitelor sunt menţinuţi constanţi*, adică $i_k = ct.$ şi $\mathrm{d}i_k = 0$.

Se prelucrează relaţia (2.83) în care

$$\mathrm{d}W_m = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\Phi_k i_k\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} i_k \mathrm{d}\Phi_k, \tag{2.86}$$

obţinând

$$\delta L = \sum_{k=1}^{n} i_k \mathrm{d}\Phi_k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} i_k \mathrm{d}\Phi_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} i_k \mathrm{d}\Phi_k. \tag{2.87}$$

Este evident că în acest caz

$$\delta L = (\mathrm{d}W_m)_{i=ct.}, \tag{2.88}$$

şi energia primită de sistem se împarte în mod egal pentru efectuarea de lucru mecanic şi pentru creşterea energiei magnetice a sistemului.

Exprimând energia magnetică în funcţie numai de curenţi şi de coordonata generalizată, $W_m = W_m(i_1,...,i_n,x)$, (în cazul unei bobine $W_m = \frac{1}{2}L(x)i^2$) şi lucrul mecanic cu relaţia generală $\delta L = X\mathrm{d}x$, relaţia (2.88) conduce, în ipoteza de lucru adoptată, la:

$$X = \left(\frac{\partial W_m}{\partial x}\right)_{i=ct.}, \tag{2.29}$$

relaţie ce reprezintă a doua teoremă a forţelor generalizate în câmp magnetic:
"Forţa generalizată X asociată coordonatei generalizate x este egală cu derivata parţială a energiei magnetice a sistemului (exprimată în funcţie numai de curenţi şi coordonata generalizată), în raport cu coordonata generalizată x, la curenţi constanţi."

Observaţie:

1. Forţele exercitate între conductoarele parcurse de curenţi electrici de conducţie se numesc *forţe electrodinamice*;
2. Forţele exercitate între conductoare parcurse de curent şi piese feromagnetice se numesc *forţe electromagnetice*.

Aplicaţia 2.4: Calculul forţei portante a unui electromagnet.

Să se calculeze forţa care se exercită asupra armăturii mobile a unui electromagnet (fig. 2.12) când bobinei acestuia i se aplică o tensiune u.

Coordonata generalizată este reprezentată de grosimea δ a întrefierului. Ea se regăseşte în expresia reluctanţei, respectiv în cea a inductivităţii. Astfel, reluctanţa circuitului magnetic cu întrefier variabil este:

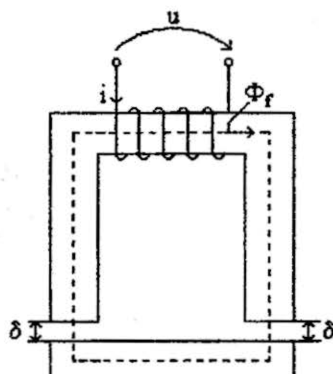


Fig. 2.12. Schema electromagnetului.

$$R_m = \frac{l_{Fe}}{\mu_{Fe} A_{Fe}} + \frac{2x}{\mu_0 A_0},$$

unde l_{Fe}, μ_{Fe}, A_{Fe}, reprezintă lungimea circuitului în materialul feromagnetic, permeabilitatea şi respectiv secţiunea transversală a circuitului magnetic; $x = \delta$, iar μ_0, A_0, permeabilitatea aerului şi respectiv secţiunea transversală a circuitului magnetic în zona întrefierului.

Inductivitatea bobinei se exprimă cu relaţia:

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{N\Phi_f}{i} = \frac{N^2\Phi_f}{Ni} = \frac{N^2\Phi_f}{U_m} = \frac{N^2}{R_m}.$$

Vom calcula forţa electromagnetică în cele două ipoteze.

a) **Prima teoremă:** Φ = ct.

Se exprimă energia magnetică a bobinei cu relaţia $W_m = \frac{\Phi^2}{2L(x)}$ şi se calculează forţa cu relaţia (2.85):

$$F = -\left(\frac{\partial W_m}{\partial x}\right)_{\Phi=ct.} = -\frac{1}{2}\cdot\Phi^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{L(x)}\right) = \frac{\Phi^2}{2}\frac{1}{L^2(x)}\frac{\partial L(x)}{\partial x} = \frac{i^2}{2}\frac{\partial L(x)}{\partial x}.$$

b) **A doua teoremă:** i = ct.

Se exprimă energia magnetică a bobinei cu relaţia $W_m = \frac{1}{2}L(x)i^2$ şi se calculează forţa cu relaţia (2.89), obţinându-se aceeaşi relaţie ca în ipoteza anterioară:

$$F = \left(\frac{\partial W_m}{\partial x}\right)_{i=ct.} = \frac{i^2}{2}\frac{\partial L(x)}{\partial x}.$$

Evaluând derivata parţială se obţine:

$$L = \frac{N^2}{R_m} = \frac{N^2}{\frac{l_{Fe}}{\mu A} + \frac{2x}{\mu_0 A}} = \mu_0\frac{N^2 A}{\frac{l_{Fe}}{\mu_{rFe}} + 2x} = \mu_0\frac{N^2 A}{f(x)},$$

respectiv

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -f'(x)\frac{\mu_0 N^2 A}{f^2(x)} = -2\frac{\mu_0 N^2 A}{\left(\frac{l_{Fe}}{\mu_{rFe}} + 2x\right)^2} = -2\frac{L^2}{\mu_0 N^2 A} < 0.$$

Prin urmare, în oricare din cele două ipoteze, forţa electromagnetică ce se exercită asupra armăturii mobile are aceeaşi expresie şi valoare negativă. Semnul (–) arată că este o forţă ce acţionează în sens invers creşterii coordonatei generalizate (grosimea întrefierului), prin urmare este o forţă de atracţie.

Aplicația 2.5: Calculul forței care apare între conductoarele unei linii bifilare parcurse de curentul i (fig. 2.13).

Coordonata generalizată este distanța D dintre cele două conductoare.

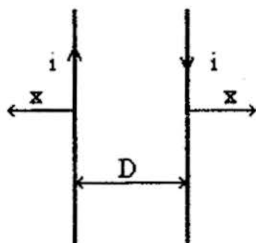


Fig. 2.13. Linie bifiliară.

Vom exprima energia magnetică cu relația $W_m = \frac{1}{2}L(D)i^2$ și ținând seama de inductivitatea liniei bifilare (relația 4.8.5) obținem:

$$W_m = \frac{1}{2}L(D)i^2 = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 l}{\pi}i^2\left[\frac{\mu_r}{4} + \ln\frac{D}{a}\right].$$

Aplicând cea de-a doua teoremă rezultă:

$$F = \left(\frac{\partial W_m}{\partial D}\right)_{i=ct.} = \frac{1}{2}i^2\frac{\partial L(D)}{\partial D} = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 l}{\pi D}i^2.$$

Dacă valoarea curentului se exprimă în kiloamperi [kA] și distanța dintre conductoare se măsoară în metri [m], se obține o relație practică pentru determinarea forței electrodinamice pe unitatea de lungime a conductoarelor

$$F_l = 0.2\frac{i^2}{D} > 0 \text{ [N/m]}.$$

Forța calculată fiind pozitivă, rezultă că ea acționează în direcția creșterii distanței dintre conductoare, deci este o forță de respingere.

CAPITOLUL 1

CONCEPTE DE BAZĂ ÎN TEORIA CIRCUITELOR ELECTRICE

1.1. SEMNALE ELECTRICE

Semnalele electrice sunt elemente de bază ale teoriei circuitelor electrice, purtătoare de energie şi informaţie. O caracteristică importantă a unui semnal electric este modul de variaţie a acestuia în timp. Notând cu $x_S(t)$ **valoarea instantanee** a unui semnal (valoarea semnalului la momentul *t*), vom face o clasificare a celor mai utilizate semnale electrice în aplicaţiile tehnice, în funcţie de modul cum variază în timp această mărime.

1. Semnale continue (semnale de curent continuu)

Semnalele continue se caracterizează prin faptul că valoarea lor rămâne constantă în timp (fig.1.1,a), deci:

$$x_S(t) = X_S, \tag{1.1}$$

unde X_S poate fi pozitiv sau negativ. Pentru a putea fi identificate cu uşurinţă, mărimile electrice caracteristice acestor semnale se notează cu litere mari: *U, V, I.*

2. Funcţia treaptă

Valoarea instantanee a acestui semnal satisface următoarele relaţii:

$$\begin{cases} x_s(t) = 0, \quad \text{pentru t} < 0, \\ x_s(t) = X_m, \quad \text{pentru t} \geq 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

unde X_m este **amplitudinea treptei** (fig. 1.1,b).

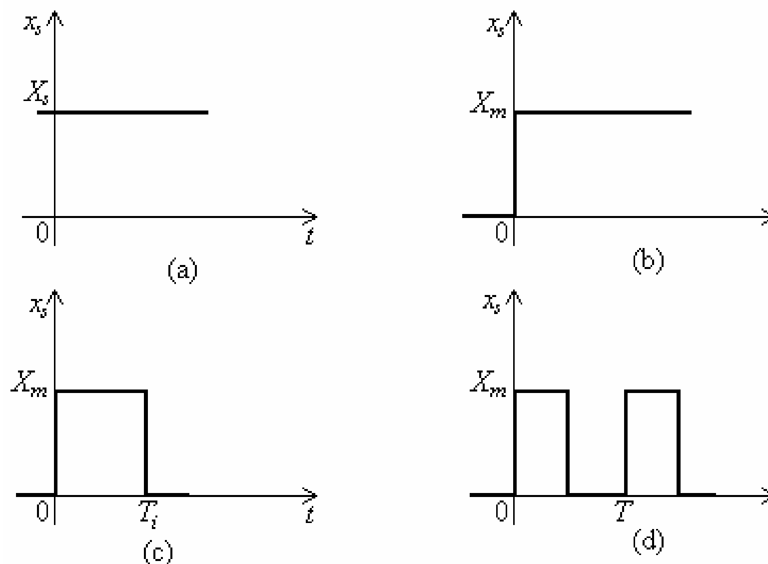


Fig. 1.1. Tipuri de semnale.

3. Impulsul

Dacă în cazul anterior, la momentul $t = T_i$ semnalul se anulează, adică:

$$\begin{cases} x_s(t) = 0, \ \text{pentru} \ t<0 \\ x_s(t) = X_m, \ \text{pentru} \ 0 \le t \le T_i, \\ x_s(t) = 0, \ \text{pentru} \ t>T_i \end{cases} \tag{1.3}$$

se obține semnalul de tip **impuls**, reprezentat în figura 1.1,c.
X_m se numeşte **amplitudinea** impulsului, iar T_i - **durata** impulsului.
O secvență de impulsuri repetate periodic (fig.1.1, d) se numeşte **tren de impulsuri**.

4. Semnale periodice

Un semnal a cărui succesiune de valori se reproduce, în aceeaşi ordine, la fiecare T secunde se numeşte semnal periodic cu perioada T. Valoarea semnalului satisface ecuația:

$$x_s(t) = x_s(t \pm nT) \ , \tag{1.4}$$

pentru orice t şi n = 1,2,3,... .

Din această categorie fac parte semnalele sinusoidale (fig.1.2,a), rectangulare (fig.1.2,b), triunghiulare (fig.1.2,c), dinți de fierăstrău (fig.1.2,d).

Numărul de cicluri de oscilații efectuate într-o secundă se numeşte **frecvență** şi se măsoară în hertzi [Hz]. Prin definiție deci:

$$f = \frac{1}{T}. \tag{1.5}$$

Din relația (1.5) rezultă că un semnal de curent continuu poate fi privit ca un semnal periodic cu $T \to \infty$, adică $f = 0$.

În cazul semnalelor periodice se defineşte **valoarea medie pe o perioadă a semnalului**:

$$X_{med} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x_s(t) \mathrm{d}t, \tag{1.6}$$

care este independentă de t_1.

5. Semnale sinusoidale (semnale de curent alternativ)

Un semnal periodic a cărui valoare medie pe o perioadă este nulă se numeşte **semnal alternativ**. Un semnal alternativ a cărui expresie instantanee se reprezintă cu ajutorul funcției sinus se numeşte **semnal sinusoidal** sau **semnal de curent alternativ**. Un astfel de semnal este cel din figura 1.2,a, care alternează sinusoidal între valorile extreme $+X_m$ şi $-X_m$, iar valoarea X_m se numeşte **amplitudine** sau valoare de vârf (valoarea instantanee maximă pe o perioadă) a undei sinusoidale. Din punct de vedere energetic, semnalul se caracterizează prin mărimea numită valoare efectivă, definită prin relația:

$$X = X_m / \sqrt{2}. \tag{1.7}$$

Un semnal de curent alternativ se reprezintă sub forma:

$$x_s(t) = X_m \sin 2\pi f t = \sqrt{2} X \sin \omega t, \tag{1.8}$$

unde $\omega = 2\pi f$ se numeşte **pulsație** a mărimii alternative şi se măsoară în rad/s.

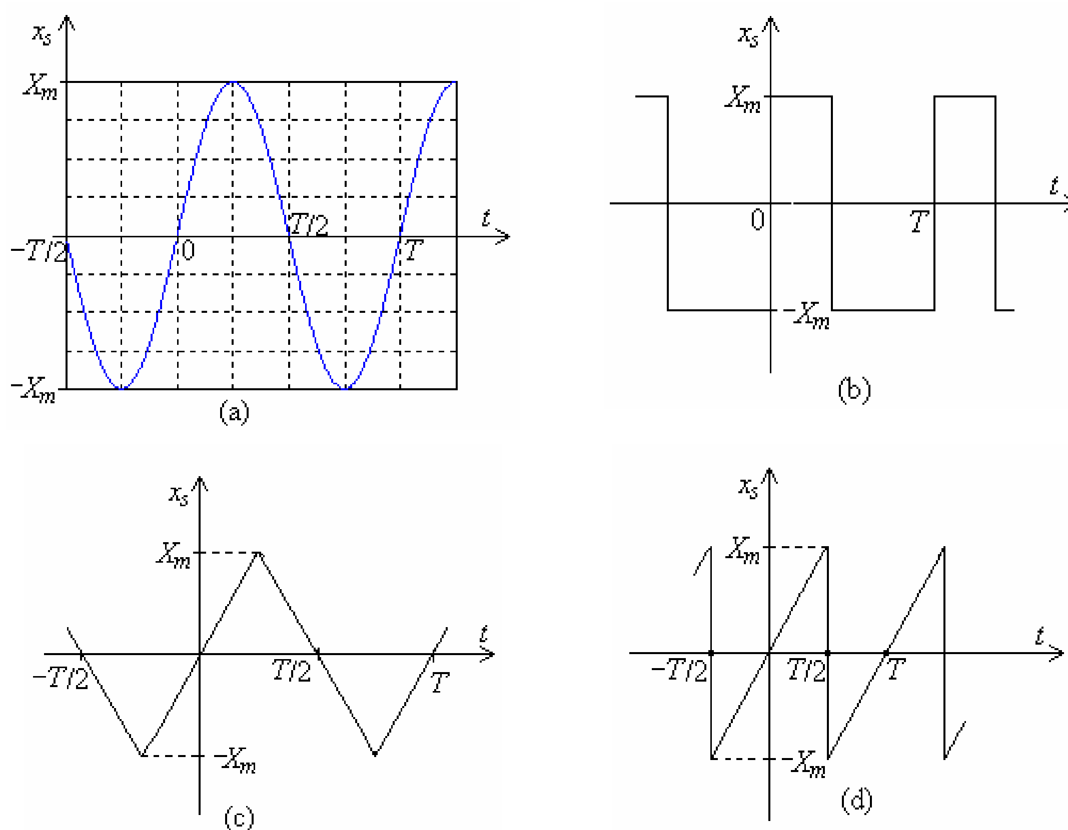


Fig. 1.2. Tipuri de semnale periodice.

6. Semnale analogice şi digitale

Un semnal care variază continuu în timp într-o anumită plajă (fig.1.3) se numeşte **semnal continuu** sau **analogic**. Sistemele electrice care operează în domeniul generării sau procesării acestor semnale formează clasa **circuitelor analogice**.

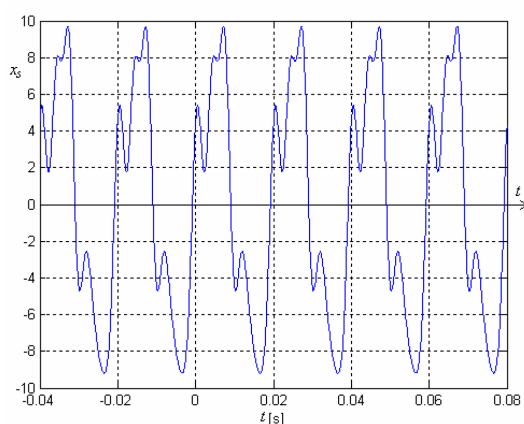


Fig.1.3. Semnal analogic continuu.

Prin contrast, semnalele care pot lua numai un set limitat de valori se numesc **semnale discrete** sau **digitale** (numerice).

Semnalele cu două valori (0 sau X_m), de tipul trenului de impulsuri, se numesc **semnale binare**.

Sistemele electrice care operează cu astfel de semnale se numesc **circuite digitale**. În cadrul acestei clase de circuite un rol de primă importanţă îl au calculatoarele electronice.

Avantajul major al reprezentării informaţiei în formă discretă (în particular binară) constă în faptul că semnalele digitale sunt mult mai uşor de generat, procesat, transmis şi stocat decât semnalele analogice.

1.2. ELEMENTE DE CIRCUIT

1.2.1. Aproximațiile teoriei circuitelor electrice cu parametri concentrați

Regimurile circuitelor electrice se pot studia cu ajutorul ecuațiilor cu derivate parțiale ale câmpului electromagnetic (ecuațiile lui Maxwell) în condiții date. Prin utilizarea elementelor de circuit cu parametri concentrați studiul circuitelor electrice se simplifică; în locul ecuațiilor cu derivate parțiale intervin ecuații diferențiale, mai simplu de rezolvat.

Teoria circuitelor electrice cu *parametri concentrați* se elaborează prin particularizare din teoria câmpului electromagnetic, în următoarele condiții de aproximare:

1. **Caracterul cvasistaționar al regimului**, care presupune neglijarea curentului de deplasare i_D ($i_D = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$) peste tot, cu excepția dielectricului condensatoarelor (asigurând astfel închiderea circuitului). Regimul cvasistaționar este astfel caracterizat prin existența curentului de conducție în conductoare şi a celui de deplasare în condensatoarele cu dielectric perfect izolant.

2. **Localizarea energiei câmpului magnetic** numai în bobine şi a **energiei câmpului electric** numai în condensatoare (deşi i_D stabileşte câmp magnetic în dielectricul condensatoarelor şi câmpul magnetic variabil în timp din bobine produce câmp electric, acestea se vor neglija).

3. **Se admite** că intensitatea curentului care iese dintr-o bornă a unui element de circuit este egală cu intensitatea curentului care intră prin cealaltă bornă. Această condiție presupune că cea mai mare dintre dimensiunile l ale elementului de circuit este mult mai mică decât lungimea de undă cea mai mică, λ, care intervine în semnalul electric. Astfel în circuitele electrice cu parametri concentrați curentul electric se stabileşte instantaneu, efectul de propagare fiind neglijabil. Considerând un conductor de lungime l parcurs de curentul

$$i(x,t) = I_m \sin 2\pi f\left(t - \frac{x}{c}\right), \tag{1.9}$$

unde x este variabila spațială, c este viteza de propagare a undei electromagnetice (egală cu viteza luminii), iar f - frecvența, dacă

$$2\pi f\,\frac{x}{c} << 1\,,\ \text{adică}\ \frac{x}{\lambda} << 1 \Rightarrow \frac{l}{\lambda} << 1\,,\ \text{cu}\ \lambda = \frac{c}{f}, \tag{1.10}$$

intensitatea $i(x,t)$ se poate aproxima cu expresia:

$$i(t) \cong I_m \sin 2\pi f t, \tag{1.11}$$

valabilă pentru frecvențe joase.

Observație: Pentru frecvențe ridicate sau pentru circuite extinse în spații mari (dimensiunea l este comparabilă cu lungimea de undă a semnalului), propagarea energiei nemaifiind instantanee nu se mai poate neglija variabila spațială. În această situație, în reprezentarea circuitului se utilizează elemente infinit mici repartizate pe toată lungimea acestuia. Se ajunge astfel la circuite cu parametri repartizați (distribuiți).

4. **Caracterul filiform al conductoarelor**, care presupune ca secțiunea transversală pe liniile de curent să fie suficient de mică pentru ca intensitatea curentului să fie repartizată practic uniform pe această secțiune. Această ipoteză implică neglijarea repartiției neuniforme a curentului variabil în timp pe secțiunea conductorului (efectul pelicular). În acest sens, teoria circuitelor electrice este exclusiv o teorie a elementelor de circuit filiforme.

În regim variabil, satisfacerea condiției caracterului filiform al conductoarelor se reduce la verificarea condiției:

$$a << \delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \sigma \mu}} \quad , \tag{1.12}$$

unde: a este dimensiunea liniară cea mai mică a secțiunii transversale a conductorului (dacă este circular, raza acestuia), iar δ este adâncimea de pătrundere a undelor electromagnetice în mediul conductor caracterizat prin conductivitatea σ şi permeabilitatea μ .

1.2.2. Mărimi şi relații fundamentale pentru teoria circuitelor electrice

În acest paragraf se vor prezenta relații ale teoriei câmpului electromagnetic pentru regimul cvasistaționar, utilizate în teoria circuitelor electrice:

- *tensiunea electrică* $u = \int_C \overline{E}\,\overline{\mathrm{d}s}$, cu formele particulare:

• tensiunea în lungul firului u_f - când curba C pe care se face integrarea este luată în lungul axei unui fir conductor;

• tensiunea la borne u_b - când curba C este luată între două borne de acces;

• tensiunea condensatorului u_C - când curba C este luată între armături, prin dielectric.

Sensul de referință al tensiunii coincide cu sensul elementului de arc $\overline{\mathrm{d}s}$.

- *tensiunea electromotoare de contur* $e_\Gamma = \oint_\Gamma (\overline{E} + \overline{E}_i)\overline{\mathrm{d}s}$, cu formele particulare:

• t.e.m. imprimată e_i - când $\overline{E} = 0$;

• t.e.m. indusă e - când $\overline{E}_i = 0$

Sensul de referință al t.e.m. coincide cu sensul elementului de arc $\overline{\mathrm{d}s}$.

- *intensitatea curentului de conducție* $i = \int_S \overline{J}\overline{n}_S \mathrm{d}A$.

Sensul de referință al curentului coincide cu sensul versorului normalei $\overline{n}_S$.

- *sarcina electrică q a armăturii condensatorului* de la care porneşte curba C pe care este definită u_C;

- *fluxul magnetic al bobinei*, φ, calculat pe o suprafață sprijinită pe conturul ce trece prin axul firului bobinei şi se închide prin linia tensiunii la borne, printr-o regiune cu câmp magnetic neglijabil.

Sensul versorului normalei la suprafața S este asociat cu sensul de parcurgere al firului bobinei după regula burghiului drept.

- *legea inducției electromagnetice* $e_\Gamma = -\frac{\mathrm{d}\varphi_{S_\Gamma}}{\mathrm{d}t}$;

- *legea conducției electrice* $u_f + e_i = Ri$;

- *legea conservării sarcinii electrice* $i_\Sigma = -\frac{\mathrm{d}q_\Sigma}{\mathrm{d}t}$;

- *teorema continuității curentului de conducție* $i_\Sigma = 0$;

- *teorema capacității electrice* $q = Cu_C$;

- *relațiile lui Maxwell referitoare la inductivități* $\varphi_k = L_k i_k + \sum_{j \neq k} L_{kj} i_j$;

- *teorema energiei electrice* $W_e = \frac{1}{2} q u_C$;

- *teorema energiei magnetice* $W_m = \frac{1}{2} \sum_k \varphi_k i_k$;

- *legea transformării energiei electromagnetice în procesul de conducție* $P_J = u_f \cdot i$.

1.2.3. Clasificarea elementelor de circuit

Elementele de circuit sunt modele idealizate (prin selectarea numai a uneia dintre proprietățile lor electrice sau magnetice, considerată esențială, şi neglijarea celorlalte), precis definite, cu ajutorul cărora putem reprezenta (modela) dispozitivele electrice şi electronice, care sunt obiecte fizice reale.

Dacă notăm cu $x(t)$ valoarea instantanee a semnalului de intrare aplicat elementului de circuit şi cu $y(t)$ valoarea instantanee a semnalului de ieşire, relația dintre cele două mărimi, care în cazul cel mai general se poate scrie sub forma

$$y(t) = y(x(t), t), \tag{1.13}$$

se numeşte **ecuație caracteristică** a elementului de circuit.

După tipul ecuației (1.13), elementele de circuit se clasifică în:

- *elemente liniare invariabile în timp*:

$$y(t) = Kx(t), \tag{1.14}$$

unde K este o constantă.

- *elemente liniare variabile în timp (parametrice)*:

$$y(t) = K(t)x(t). \tag{1.15}$$

- *elemente neliniare invariabile în timp*:

$$f(x(t), y(t)) = 0. \tag{1.16}$$

- *elemente neliniare variabile în timp*:

$$g(x(t), y(t), t) = 0. \tag{1.17}$$

Un element de circuit este caracterizat printr-o relație între curentul şi tensiunea la bornele sale. Independent de natura perechii de mărimi (x, y), tensiunea $u(t)$ şi intensitatea curentului $i(t)$ sunt univoc determinate la bornele elementului de circuit şi produsul lor:

$$p(t) = u(t)i(t) \tag{1.18}$$

se numeşte **putere instantanee**, iar integrala în raport cu timpul a puterii instantanee pe intervalul (t_1, t_2) se numeşte **energie electrică**

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p(t)\mathrm{d}t. \tag{1.19}$$

Din punctul de vedere al valorilor puterii instantanee, elementele de circuit pot fi clasificate în două categorii:

- elemente de circuit pasive, pentru care în orice punct al caracteristicii de funcționare $p > 0$, ceea ce înseamnă că elementul de circuit primeşte putere pe la borne;
- elemente de circuit active (sau surse), pentru care cel puțin într-un punct al caracteristicii de funcționare $p < 0$, ceea ce înseamnă că elementul de circuit cedează putere pe la borne.

1.2.4. Elemente de circuit pasive

1.2.4.1. Rezistorul

Este un element de circuit a cărui ecuație de funcționare este de forma (1.20) şi se numeşte *caracteristică tensiune-curent*, sau de forma (1.21) şi se numeşte *caracteristică curent-tensiune*:

$$u(t) = u\big(i(t), t\big), \tag{1.20}$$

sau

$$i(t) = i\big(u(t), t\big). \tag{1.21}$$

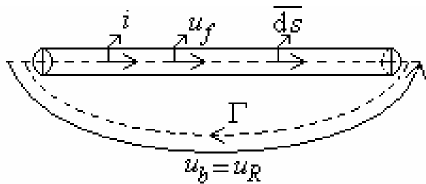


Fig.1.4. Un conductor filiform de lungime finită.

Ecuația caracteristică a rezistorului se determină plecând de la teoria câmpului electromagnetic, în următoarele ipoteze (care selectează proprietatea esențială): rezistorul este un fir conductor, care fiind parcurs de un curent electric de conducție degajă căldură datorită efectului electrocaloric ($R \neq 0$), nu produce câmp magnetic ($\varphi = 0$), nu acumulează sarcină electrică ($q = 0$) şi nu conține surse de câmp electric imprimat ($e_i = 0$).

Aplicând *legea inducției electromagnetice* pe curba Γ (fig.1.4) şi *legea conducției electrice*, ținând seama de ipotezele asumate, se obține succesiv:

$$e_\Gamma = \oint_\Gamma \overline{E}\,\overline{\mathrm{d}s} = u_f - u_b = -\frac{\mathrm{d}\varphi_{S_\Gamma}}{\mathrm{d}t} = 0\,, \tag{1.22}$$

din care rezultă

$$u_f = u_b \tag{1.23}$$

şi

$$u_f + e_i = u_f = Ri\,. \tag{1.24}$$

Din ecuațiile (1.23) şi (1.24) rezultă că

$$u_b = u_R = Ri\,. \tag{1.25}$$

a) Rezistorul liniar invariabil în timp. Acest element de circuit, reprezentat simbolic în figura 1.5,a, are *ecuația caracteristică* (numită şi ecuație *constitutivă*)

$$u(t) = Ri(t) \tag{1.26}$$

sau

$$i(t) = Gu(t), \tag{1.27}$$

unde $R > 0$ este *rezistența* elementului măsurată în ohmi $[\Omega]$ şi $G > 0$ este *conductanța* acestuia, măsurată în siemens $[S]$.

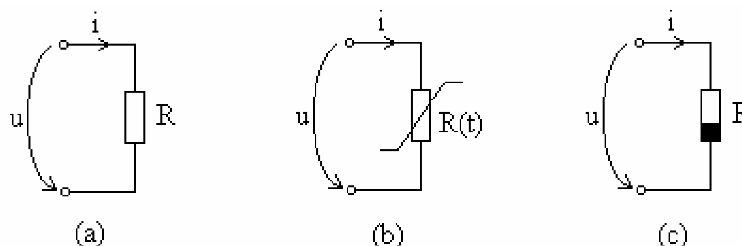


Fig. 1.5. Simbolurile rezistoarelor.

Ecuațiile (1.25) şi (1.26) reprezintă în planul (*u,i*) o dreaptă ce trece prin origine (fig.1.6,a); ca urmare, tensiunea şi curentul au aceeaşi formă de variație în timp. Înmulțind ecuația (1.25) cu *i*(*t*) sau (1.26) cu *u*(*t*) se obține puterea instantanee primită pe la borne de rezistor:

$$p(t) = u(t)i(t) = Ri^2(t) = Gu^2(t) . \qquad (1.28)$$

Indiferent de sensul de referință al tensiunii sau curentului, $p > 0$ şi corespunde efectului electrocaloric de transformare ireversibilă a energiei electrice în căldură.

Dacă $R = 0$ ($G \to \infty$) ecuația (1.26) devine:

$$u(t) = 0 \qquad (1.29)$$

şi elementul se numeşte *scurtcircuit* (fig. 1.6,b).

Dacă $R \to \infty$ ($G = 0$) ecuația (1.27) devine:

$$i(t) = 0 \qquad (1.30)$$

şi elementul se numeşte *circuit deschis* sau latură în gol (fig.1.6,c).

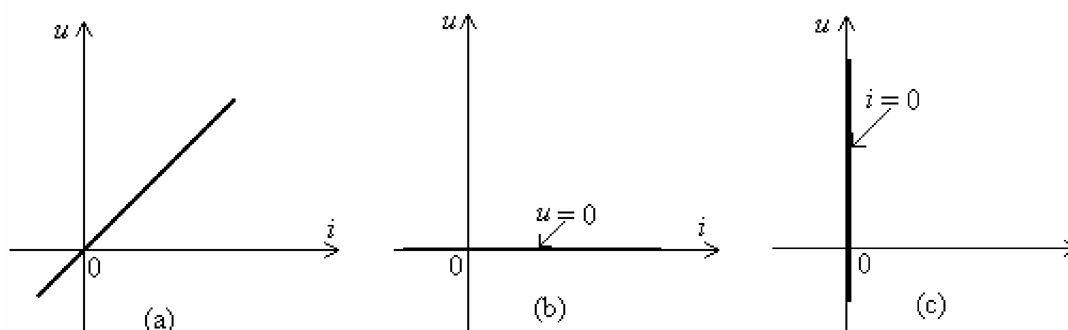


Fig.1.6. Caracteristicile (*u,i*) ale rezistoarelor liniare.

b) Rezistorul liniar variabil în timp (parametric), are ecuația caracteristică

$$u(t) = R(t)i(t) , \qquad (1.31)$$

unde *R*(*t*) se numeşte *rezistență parametrică*. Simbolul lui este reprezentat în figura 1.5,b.

Un exemplu de astfel de element de circuit este potențiometrul.

Caracteristicile (1.31) reprezintă în planul (*u, i*) o familie de drepte ce trec prin origine (fig.1.7), deci forma de variație în timp a tensiunii este diferită de cea a curentului. Acest tip de element poate fi folosit la modelarea unui contactor real (fig.1.8), cu ajutorul unui contactor ideal şi a două rezistoare liniare şi invariabile în timp, R_1 de valoare foarte mare şi R_2 de valoare foarte mică.

c) Rezistorul neliniar

Ecuația caracteristică a *rezistorului neliniar invariabil în timp* este:

$$f\big(u(t), i(t)\big) = 0, \qquad (1.32)$$

iar a celui *variabil în timp*

$$g\big(u(t), i(t), t\big) = 0, \qquad (1.33)$$

simbolul fiind prezentat în figura 1.5,c.

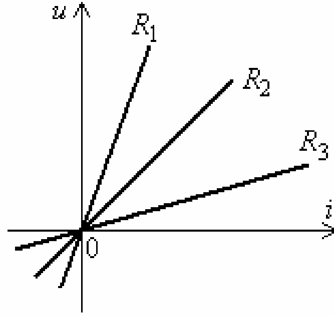


Fig. 1.7. Caracteristica (u,i) a rezistorului parametric.

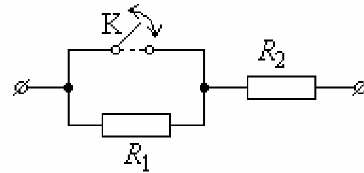


Fig. 1.8. Modelul contactorului real.

După forma ecuației caracteristice, aceste elemente pot fi simetrice sau nesimetrice în raport cu originea. Din punct de vedere al mărimii care fixează univoc poziția punctului de funcționare pe curba caracteristică, rezistoarele neliniare se clasifică în:

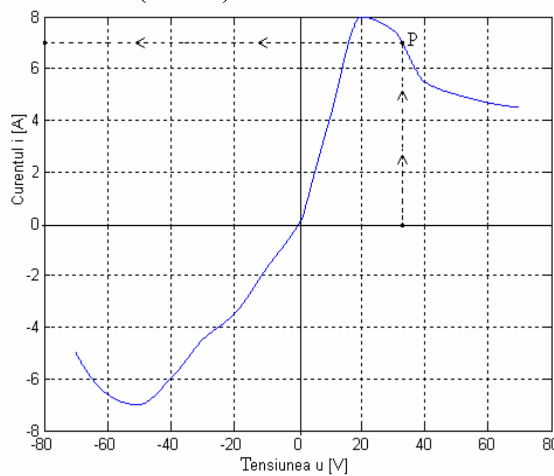
• rezistoare neliniare controlate în tensiune, având ecuația caracteristică (fig.1.9,a) de forma

$$i(t) = i\big(u(t)\big) \quad \text{sau} \quad i = \hat{i}(u)\,; \qquad (1.34)$$

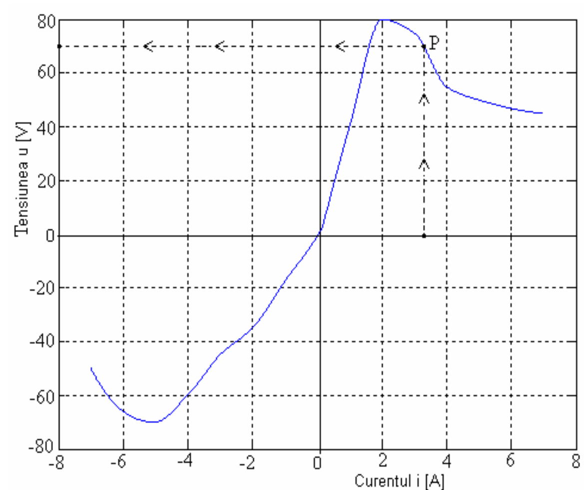
• rezistoare neliniare controlate în curent, având ecuația caracteristică (fig.1.9,b) de forma

$$u(t) = u\big(i(t)\big) \quad \text{sau} \quad u = \hat{u}(i)\,. \qquad (1.35)$$

Un rezistor neliniar caracterizat de faptul că pentru orice tensiune u dată (curent i dat) curentul i (tensiunea u) este unic specificat (specificată) se numește rezistor neliniar controlat în tensiune (curent).



(a)



(b)

Fig. 1.9. Caracteristicile rezistoarelor neliniare:

a) Rezistorul neliniar controlat în tensiune (c.u.); b) Rezistorul neliniar controlat în curent (c.i.).

Din categoria rezistoarelor neliniare simetrice fac parte: tubul cu fir incandescent şi termistorul, a căror rezistenţă variază cu temperatura, varistorul a cărui caracteristică este controlată în tensiune şi dioda cu gaz, având caracteristica controlată în curent.

Dioda cu joncţiune, dioda Zener şi dioda tunel sunt rezistoare neliniare nesimetrice cu caracteristică controlată în tensiune. Un alt exemplu este arcul electric în curent continuu şi în curent alternativ, care poate fi modelat printr-un rezistor neliniar variabil în timp.

1.2.4.2. Bobina

Bobina necuplată magnetic are ecuaţia de funcţionare de forma

$$\varphi(t) = \varphi\big(i(t), t\big), \tag{1.36}$$

numită *caracteristică flux-curent*.

Ecuaţia caracteristică explicită se obţine pe baza relaţiilor din teoria câmpului electromagnetic şi a următoarelor ipoteze care selectează proprietatea esenţială: bobina este realizată dintr-un fir conductor care, fiind parcurs de un curent electric produce câmp magnetic ($\varphi \neq 0$), dar în el nu se transformă energie prin efect electrocaloric ($R = 0$), nu acumulează sarcină electrică ($q = 0$) şi nu are surse de câmp electric imprimat ($e_i = 0$).

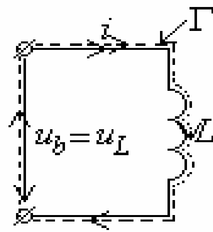


Fig. 1.10. Simbolul bobinei liniare.

Aplicând *legea inducţiei electromagnetice* şi *legea conducţiei electrice* elementului reprezentat în figura 1.10, în ipotezele enunţate se obţine:

$$e_\Gamma = \oint_\Gamma \overline{E}\,\overline{\mathrm{d}s} = u_f - u_b = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}, \tag{1.37}$$

respectiv

$$u_f + e_i = Ri \qquad \Rightarrow \qquad u_f = 0 \tag{1.38}$$

Din ecuaţiile (1.36) şi (1.37) rezultă

$$u_b = u_L = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}, \tag{1.39}$$

numită **ecuaţia de evoluţie** a bobinei, din care, prin integrare pe intervalul (0, t) se obţine

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t u(t')\mathrm{d}t'; \qquad \varphi(0) = \int_{-\infty}^{0} u(t')\mathrm{d}t'; \tag{1.40}$$

Relaţia (1.40) numită şi **ecuaţie de ereditate** a bobinei, arată că fluxul magnetic la momentul t depinde de valorile anterioare ale tensiunii, deci bobina este un element cu **memorie**. De asemenea rezultă că în intervalul $(-\infty, \infty)$ *fluxul magnetic în bobină este o funcţie absolut continuă în timp*. Se spune că fluxul are un caracter conservativ.

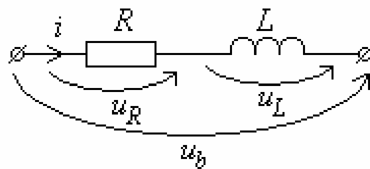


Fig. 1.11. Circuitul echivalent al bobinei liniare reale.

Dacă rezistenţa bobinei este nenulă ($R \neq 0$), ecuaţia (1.38) pentru bobina reală (fig.1.11) capătă forma:

$$u_b = u_f + \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = Ri + \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = u_R + u_L, \tag{1.41}$$

unde

u_R se numeşte *cădere de tensiune rezistivă*, iar u_L- *cădere de tensiune inductivă*.

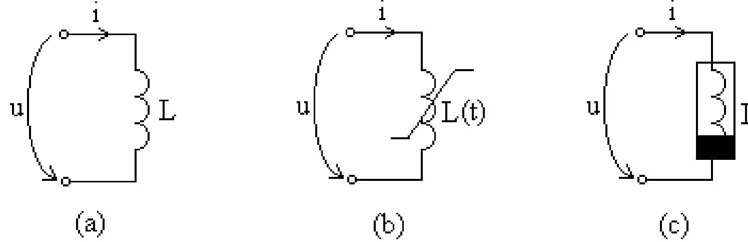


Fig. 1.12. Simbolurile bobinelor.

a) Bobina liniară, invariabilă în timp şi necuplată magnetic, cu simbolul din figura 1.12,a, are ecuaţia caracteristică

$$\varphi(t) = Li(t), \tag{1.42}$$

unde $L > 0$ este *inductivitatea* măsurată în henry [H], constantă pentru o anumită bobină.

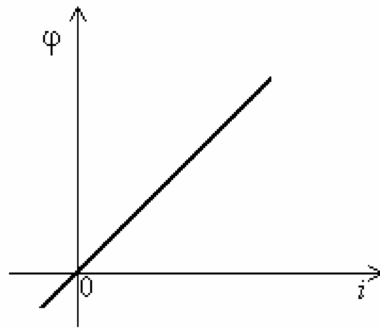


Fig. 1.13. Caracteristica (φ,*i*) a bobinei liniare.

În planul (φ,i) caracteristica (1.42) este o dreaptă ce trece prin origine (fig.1.13); în consecinţă, fluxul magnetic şi curentul au aceeaşi formă de variaţie în timp.

Ţinând seama de ecuaţia (1.42), din (1.39) se obţine ecuaţia caracteristică :

$$u(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}, \tag{1.43}$$

din care, prin integrare pe intervalul (0,*t*) rezultă

$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L}\int_0^t u(t')\mathrm{d}t'; \qquad i(0) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^0 u(t')\mathrm{d}t'. \tag{1.44}$$

Integrând ecuaţia (1.43) pe intervalul $(0, t + \mathrm{d}t)$ şi scăzând apoi membru cu membru ecuaţia (1.44), se obţine:

$$i(t + \mathrm{d}t) - i(t) = \frac{1}{L}\int_t^{t+\mathrm{d}t} u(t')\mathrm{d}t'. \tag{1.45}$$

Dacă tensiunea este mărginită, $u(t) < U$ în intervalul $[0, T]$, atunci integrala din (1.45) tinde către zero când $\mathrm{d}t \to 0$, şi deci se anulează şi membrul stâng al acestei ecuaţii. Altfel spus, în aceste circumstanţe *curentul prin bobină este uniform continuu în intervalul* (0,*T*). El nu poate avea un salt brusc de la o valoare finită la o altă valoare finită.

Bobina liniară invariabilă în timp şi necuplată magnetic este complet caracterizată de inductivitatea proprie L şi de intensitatea curentului în momentul iniţial $i(0)$. Proprietăţile de continuitate ale fluxului magnetic şi curentului electric prin bobină vor fi utilizate în studiul regimului tranzitoriu.

Înmulțind ecuația (1.43) cu $i\mathrm{d}t'$ şi integrând pe intervalul $(0,t)$ în condiția $i(0)=0$, se obține energia W_m acumulată în câmpul magnetic al bobinei:

$$W_m = \int_0^t u(t')i(t')\mathrm{d}t' = L\int_0^i i'\mathrm{d}i' = \frac{1}{2}Li^2(t) = \varphi(t)i(t) = \frac{1}{2}\frac{\varphi^2(t)}{L}, \qquad (1.46)$$

a cărei valoare este pozitivă.

b) Bobina liniară, variabilă în timp (parametrică) şi necuplată magnetic, are simbolul din figura 1.12,b şi ecuația caracteristică

$$\varphi(t) = L(t)i(t), \qquad (1.47)$$

unde $L(t)$ se numeşte *inductivitate parametrică.*

Ținând seama de ecuația (1.47), ecuația (1.39) conduce la

$$u(t) = L(t)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + i(t)\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}. \qquad (1.48)$$

Primul termen din membrul drept se numeşte *cădere de tensiune inductivă prin pulsație*, iar al doilea - *cădere de tensiune inductivă parametrică.*

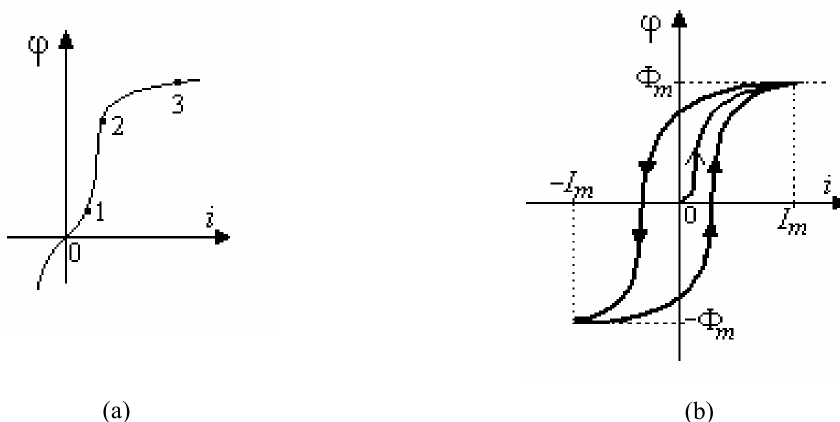
În planul (φ,i) ecuația (1.48) reprezintă o familie de drepte ce trec prin origine; ca urmare, fluxul magnetic şi curentul au forme diferite de variație.

Un exemplu de inductor parametric îl constituie un solenoid în interiorul căruia miezul magnetic se deplasează alternativ.

c) Bobina neliniară este o bobină cu miez feromagnetic ce intră în componența releelor, electromagneților, transformatoarelor şi maşinilor electrice. Caracteristica ei flux-curent, numită caracteristică de magnetizare, este de forma:

$$g(\varphi(t), i(t), t) = 0. \qquad (1.49)$$

În funcție de materialul feromagnetic din care este confecționat miezul bobinei, caracteristica de magnetizare poate avea forma din figura 1.14,a (corespunzătoare materialelor magnetice moi) sau din figura 1.14,b (corespunzătoare materialelor magnetice dure).



(a) (b)

Fig. 1.14. Caracteristicile (φ,*i*) ale bobinelor neliniare:
a) Materiale magnetice moi;
b) Materiale magnetice dure.

Pe porțiunea 1-2 a caracteristicii din figura 1.14,a, bobina poate fi considerată liniară, iar fluxul magnetic şi curentul au aceeaşi formă de variație în timp, spre deosebire de porțiunea 2-3, care este neliniară şi corespunde unor forme diferite de variație în timp ale fluxului

magnetic şi curentului. Peste punctul 3, fluxul rămâne practic constant, iar bobina devine saturată magnetic.

Caracteristica din figura 1.14,b se numeşte *curbă de histerezis*.

Bobinele cu miez de fier pot fi modelate ca elemente de circuit, aproximând corespunzător forma caracteristicii, de exemplu prin segmente de dreaptă.

d) Bobine cuplate magnetic

Se spune că o bobină s parcursă de curentul i_s este *cuplată magnetic* cu alte (l-1) bobine dacă fluxul magnetic φ_s este funcţie şi de intensităţile curenţilor ce parcurg aceste bobine, ecuaţia caracteristică a bobinei s fiind

$$\varphi_s = \varphi(i_1(t), i_2(t), ..., i_s(t), ..., i_l(t), t). \tag{1.50}$$

Dacă bobinele sunt liniare şi invariabile în timp, ţinând seama de relaţiile lui Maxwell pentru inductivităţi, ecuaţia caracteristică (1.50) devine

$$\varphi_s = \sum_{k=1}^{l} L_{sk} i_k \tag{1.51}$$

în care mărimea

$$L_{ss} = L_s \overset{d}{=} \frac{\varphi_s}{i_s}\Big|_{i_k=0, k\neq s} > 0, \tag{1.52}$$

se numeşte *inductivitate proprie*, iar mărimea

$$L_{sk} = L_{ks} \overset{d}{=} \frac{\varphi_s}{i_k}\Big|_{i_s=0, s\neq k}, \tag{1.53}$$

putând fi pozitivă sau negativă, se numeşte *inductivitate mutuală*.

Pentru a stabili ce semn se ia în consideraţie în calculele din teoria circuitelor pentru inductivitatea mutuală, în schemele electrice se evidenţiază cu * bornele polarizate ale bobinelor cuplate magnetic. Dacă sensurile de referinţă ale curenţilor i_s şi i_k faţă de bornele polarizate sunt identice (ambii intră sau ies din aceste borne), inductivitatea mutuală este pozitivă. În caz contrar, este negativă.

Tensiunea u_s la bornele bobinei cuplate magnetic se calculează înlocuind relaţia (1.51) în (1.39). Se obţine astfel

$$u_s = \sum_{k=1}^{l} L_{sk}\frac{\mathrm{d}i_k}{\mathrm{d}t} = L_s\frac{\mathrm{d}i_s}{\mathrm{d}t} + \sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{l} L_{sk}\frac{\mathrm{d}i_k}{\mathrm{d}t}, \tag{1.54}$$

unde primul termen din membrul drept se numeşte *cădere de tensiune inductivă proprie*, iar al doilea - *cădere de tensiune inductivă mutuală*.

Înmulţind ecuaţia (1.54) cu $i_s\mathrm{d}t'$ şi integrând pe intervalul (0, t) în ipoteza $i(0)$ = 0, se obţine expresia energiei magnetice înmagazinate în bobina s:

$$W_{ms} = \int_0^t u_s i_s \mathrm{d}t' = \frac{1}{2}L_s i_s^2 + \sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{l} \int_0^i L_{sk} i_s' \mathrm{d}i_k' . \tag{1.55}$$

Primul termen din membrul drept se numeşte *energie magnetică proprie* şi este strict pozitiv, iar al doilea se numeşte *energie magnetică mutuală* şi poate fi pozitiv sau negativ.

Energia magnetică totală a sistemului de l bobine cuplate magnetic are expresia

$$W_m = \sum_{k,s=1}^{l} L_{sk} \int_0^i i_s^{'} \mathrm{d}i_k^{'} \,. \tag{1.56}$$

În cazul particular a două bobine cuplate magnetic, se obține

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + L_{12} i_1 i_2 \,, \tag{1.57}$$

unde primul şi al doilea termen reprezintă energia magnetică înmagazinată în prima, respectiv a doua bobină, iar ultimul termen reprezintă energia magnetică de interacțiune.

1.2.4.3. Condensatorul

Are ecuația *caracteristică sarcină-tensiune* sau *tensiune-sarcină*

$$q(t) = q\big(u(t), t\big), \tag{1.58}$$

respectiv

$$u(t) = u\big(q(t), t\big). \tag{1.59}$$

La fel ca şi în cazul celor două elemente de circuit, prezentate mai sus, condensatorul ideal poate fi studiat cu ajutorul legilor câmpului electromagnetic şi al ipotezelor de idealizare potrivit cărora condensatorul este un sistem de conductoare, care fiind parcurs de un curent electric de conducție poate acumula sarcină electrică ($q \neq 0$), dar nu degajă căldură ($R = 0$), nu produce câmp magnetic ($\varphi = 0$) şi nu conține surse de câmp electric imprimat ($e_i = 0$).

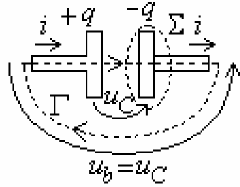


Fig. 1.15. Shema de principiu a unui condensator.

Aplicând *legea inducției electromagnetice* pe curba Γ (fig.1.15) în ipotezele asumate se obține

$$e_\Gamma = u_f + u_C - u_b = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{1.60}$$

iar *legea conducției electrice* aplicată conductoarelor (fire şi armături) conduce la

$$u_f + e_i = u_f = Ri = 0. \tag{1.61}$$

Din relațiile (1.60) şi (1.61) rezultă

$$u_b = u_C. \tag{1.62}$$

Considerând dielectricul condensatorului perfect izolant, *legea conservării sarcinii electrice* conduce la $i_\Sigma = i$, şi cum $q_\Sigma = -q$, se obține relația dintre intensitatea curentului electric de conducție şi sarcina electrică sub forma **ecuației de evoluție**

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}. \tag{1.63}$$

Integrată pe intervalul (0, *t*), ecuația (1.63) conduce la

$$q(t) = q(0) + \int_0^t i(t')\mathrm{d}t'; \qquad q(0) = \int_{-\infty}^0 i(t')\mathrm{d}t'. \tag{1.64}$$

Relația (1.64) numită **ecuația de ereditate** a condensatorului, arată că sarcina electrică la momentul *t*, depinde de valorile anterioare ale curentului; prin urmare, condensatorul este un element cu **memorie**.

Rezultă de asemenea că în intervalul $(-\infty, \infty)$ *sarcina electrică este o funcție absolut continuă în timp*; altfel spus, sarcina electrică nu variază discontinuu (are caracter conservativ).

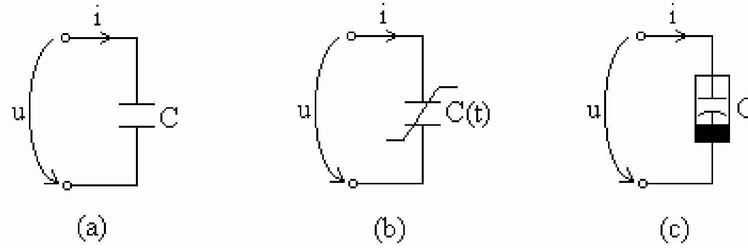


Fig. 1.16. Simbolurile condensatoarelor.

a) Condensatorul liniar invariabil în timp, al cărui simbol este reprezentat în figura 1.16,a, are ecuația caracteristică (constitutivă)

$$q(t) = Cu(t), \tag{1.65}$$

sau

$$u(t) = Sq(t), \tag{1.66}$$

unde $C > 0$ se numeşte *capacitate* şi se măsoară în farazi [F], iar $S = 1/C$ se numeşte *elastanță* şi se măsoară în $[F]^{-1}$.

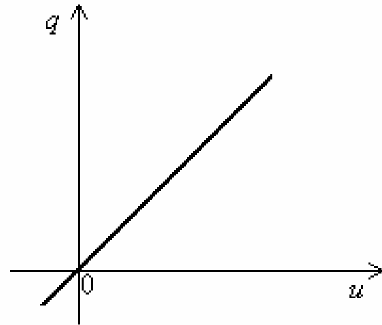


Fig. 1.17. Caracteristica (q,u) a unui condensator liniar.

În planul (q, u) ecuația (1.65) reprezintă o dreaptă ce trece prin origine (fig.1.17), deci sarcina electrică şi tensiunea au aceeaşi formă de variație în timp.

Ținând seama de (1.65), ecuația (1.63) devine

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}, \tag{1.67}$$

care prin integrare pe intervalul (0, t) conduce la

$$u(t) = u(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t')\mathrm{d}t'; \qquad u(0) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^0 i(t')\mathrm{d}t'. \tag{1.68}$$

Condensatorul liniar şi invariabil în timp este complet determinat de capacitatea C şi de tensiunea inițială $u(0)$.

Înmulțind ecuația (1.67) cu $u\mathrm{d}t'$ şi integrând pe intervalul (0, t) în ipoteza $u(0) = 0$, se obține energia acumulată în câmpul electric al condensatorului în acest interval

$$W_e = \int_0^t u(t')i(t')\mathrm{d}t' = C\int_0^u u'\mathrm{d}u' = \frac{1}{2}Cu^2(t) = \frac{1}{2C}q^2(t) = \frac{1}{2}q(t)u(t), \tag{1.69}$$

a cărei valoare este pozitivă.

Printr-o demonstrație similară celei pentru curentul prin bobină, se poate arăta că dacă intensitatea curentului prin condensator este mărginită, $i(t) < I$ în intervalul $[0,T]$, atunci *tensiunea electrică la bornele condensatorului variază continuu* în intervalul $(0,T)$. Altfel spus, tensiunea la bornele unui condensator liniar invariabil în timp nu poate varia brusc de la o valoare finită la o altă valoare finită.

Proprietatea de continuitate a sarcinii electrice şi a tensiunii la bornele condensatorului va fi folosită în studiul regimului tranzitoriu.

b) Condensatorul liniar variabil în timp (parametric) are ecuația caracteristică

$$q(t) = C(t)u(t), \tag{1.70}$$

unde *C*(*t*) se numeşte *capacitate parametrică*. Simbolul grafic al acestui element de circuit este prezentat în figura 1.16,b.

Din relația (1.63), ținând seama de (1.70), se obține

$$i(t) = C(t)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t)\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}. \tag{1.71}$$

Primul termen din membrul drept se numeşte *componentă de pulsație a curentului*, iar al doilea - *componentă parametrică*.

În planul (q, u) ecuația (1.69) defineşte o familie de drepte ce trec prin origine, deci curbele de variație ale tensiunii şi sarcinii electrice sunt diferite.

Un exemplu de condensator liniar variabil în timp este condensatorul cu armătură vibrantă.

c) Condensatorul neliniar

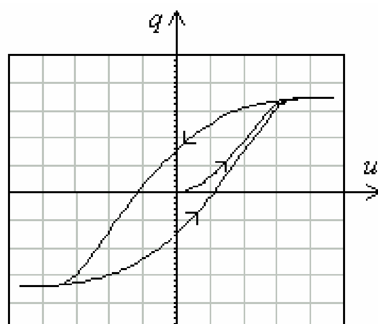


Fig. 1.18. Caracteristica (q,u) a unui condensator neliniar.

Condensatoarele reale au caracteristica q(u) neliniară (în general variabilă în timp), de forma

$$f\big(q(t), u(t), t\big) = 0, \tag{1.72}$$

reprezentată printr-o curbă de histerezis (fig. 1.18).

Ca şi la bobina cu miez feromagnetic, condensatorul neliniar poate fi modelat ca element de circuit, aproximând caracteristica sarcină-tensiune prin segmente de dreaptă.

1.2.5. Elemente de circuit active

1.2.5.1. Surse independente

Sursele independente sunt elemente de circuit care modelează generatoarele de semnal. Ele se numesc independente pentru că mărimea care le caracterizează (t.e.m. sau intensitatea curentului electric) este independentă de mărimile electrice din restul circuitului. În continuare vom introduce cele două tipuri de surse independente din teoria circuitelor electrice: sursa independentă de tensiune şi sursa independentă de curent.

1. Sursa ideală independentă de tensiune este un element activ având simbolul din figura 1.19,a şi următoarea ecuație caracteristică (scrisă pentru sensurile de referință adoptate):

$$u(t) = e(t), \quad \forall i. \tag{1.73}$$

Ecuația (1.73) poate fi dedusă pe baza teoriei câmpului electromagnetic. Astfel, în ipotezele de idealizare, sursa ideală de tensiune este un element care, fiind parcurs de un curent electric de conducție, transformă energia electromagnetică în alte forme decât energie electrică

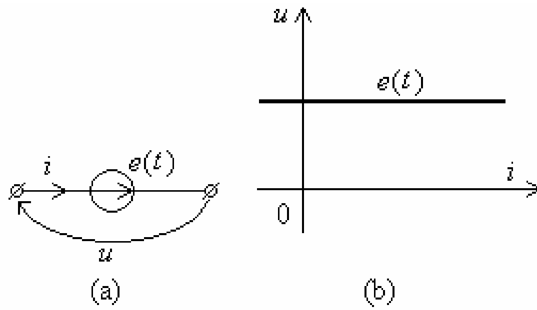


Fig. 1.19. Simbolul şi caracteristica (*u,i*) a unei surse ideale independente de tensiune.

sau magnetică $(e_i \neq 0)$, nu degajă căldură $(R = 0)$, nu produce câmp magnetic (φ = 0) şi nu acumulează sarcină electrică $(q = 0)$.

Aplicând relația de definiție a t.e.m. de contur (fig.1.20), se obține:

$$e_\Gamma = e = \oint_\Gamma \left(\overline{E} + \overline{E}_i\right)\overline{ds} = \oint_\Gamma \overline{E}\,\overline{ds} + \oint_\Gamma \overline{E}_i\,\overline{ds} = u_f + u_b + e_i \tag{1.74}$$

.

Cum *legea conducției electrice* în acest caz conduce la

$$u_f + e_i = Ri = 0, \tag{1.75}$$

înlocuind în relația (1.73), se obține:

$$e = u_b = u, \tag{1.76}$$

adică relația (1.73).

În planul (u, i) caracteristica de funcționare este o dreaptă paralelă cu axa curentului (fig.1.19,b). Din ecuația (1.73) rezultă că sursa independentă de tensiune este un caz particular de rezistor neliniar controlat în curent, caracterizată de faptul că pentru orice curent dat, tensiunea este unic specificată.

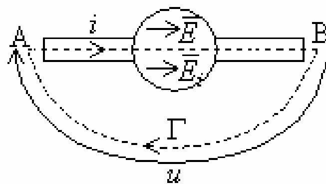


Fig. 1.20. Schema de principiu a unei surse independente de tensiune.

Dacă $e(t) = 0$, caracteristica (1.73) ia forma (1.29) şi sursa ideală independentă de tensiune devine un scurtcircuit $(R = 0)$, proprietate importantă în cadrul teoriei circuitelor electrice, folosită pentru pasivizarea acestor surse.

Semnificația fizică a definiției sursei ideale independente de tensiune este că circuitul conectat la bornele sursei nu influențează forma de undă a tensiunii ei, ci numai curentul care circulă prin sursă.

Cu sensurile de referință din figura 1.19,a, puterea cedată de sursă circuitului extern este:

$$p(t) = u(t)i(t) = e(t)i(t). \tag{1.77}$$

Dacă elementul de circuit degajă căldură prin efect electrocaloric $(r \neq 0)$, reprezentarea lui este cea din figura 1.21,a, iar ecuația de funcționare este:

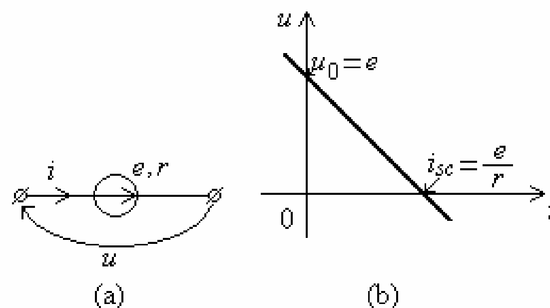


Fig. 1.21. Simbolul şi caracteristica (*u,i*) a unei surse reale independente de tensiune.

$$u = e - ri. \qquad (1.78)$$

Un astfel de element se numeşte *sursă reală de tensiune*. Caracteristica de funcționare (1.78) este o dreaptă care nu trece prin origine (fig. 1.21,b).

Înmulțind relația (1.78) cu $i(t)$, se obține puterea electrică cedată la borne de sursă

$$p(t) = u(t)i(t) = e(t)i(t) - ri^2(t). \qquad (1.79)$$

Relația (1.73) arată că nu putem conecta în paralel (între aceleaşi borne) surse ideale de tensiune cu valori diferite ale tensiunilor electromotoare.

2. Sursa ideală independentă de curent

O sursă de energie electromagnetică având proprietatea de a debita un curent $j(t)$ independent de rețeaua conectată la bornele ei, se numeşte *generator ideal de curent*.

Semnificația fizică a definiției sursei ideale independente de curent este că, de data aceasta, este prescrisă curba de variație a curentului sursei. Ea nu este influențată de tensiunea la borne determinată de circuitul extern, astfel încât ecuația caracteristică a elementului este:

$$i(t) = j(t), \quad \forall u, \qquad (1.80)$$

iar simbolul este cel din figura 1.22,a.

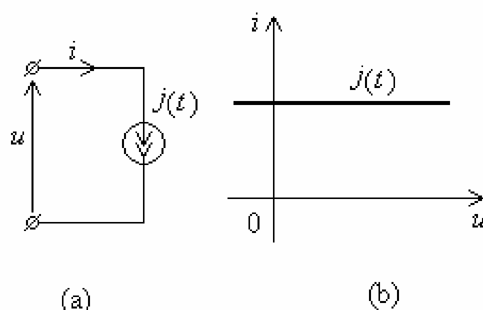


Fig.1.22. Simbolul şi caracteristica (*i,u*) a unei surse ideale independente de curent.

În planul (*i,u*) caracteristica este o dreaptă paralelă cu axa tensiunii (fig. 1.22,b).

Sursa independentă de curent este un caz particular de rezistor neliniar controlat în tensiune, deoarece, conform ecuației caracteristice, pentru orice tensiune curentul este unic specificat.

Dacă $j(t) = 0$, caracteristica se reprezintă pe axa tensiunii şi sursa ideală independentă de curent devine o latură deschisă ($R \to \infty$), proprietate de asemenea importantă în cadrul teoriei circuitelor electrice, legată de pasivizarea acestor surse.

Pentru sensurile de referință adoptate în figura 1.22,a, puterea cedată de sursă circuitului extern este

$$p(t) = u(t)i(t) = u(t)j(t). \qquad (1.81)$$

Schema echivalentă a unei surse reale de curent este prezentată în figura 1.23,a, iar ecuația de funcționare este:

$$i(t) = j(t) - gu(t). \tag{1.82}$$

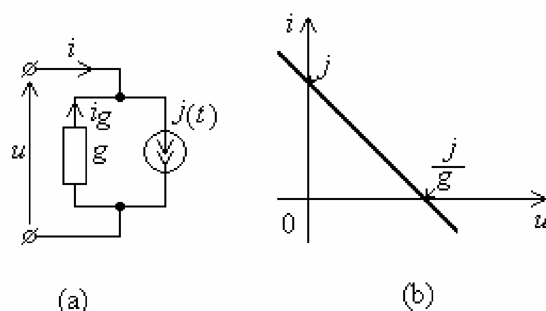


Fig. 1.23. Simbolul şi caracteristica (*i,u*) a unei surse reale independente de curent.

Caracteristica de funcționare este o dreaptă care nu trece prin origine (fig. 1.23,b). Înmulțind relația (1.82) cu $u(t)$ se obține puterea electrică cedată la borne de sursă:

$$p(t) = u(t)i(t) = u(t)j(t) - gu^2(t). \tag{1.83}$$

Relația (1.80) arată că nu putem conecta în serie (pe aceeaşi latură) surse de curent cu valori diferite ale curenților injectați.

Celelalte tipuri de elemente de circuit (sursele comandate, transformatorul ideal, gyratorul, amplificatorul operațional, nulorul, noratorul, tranzistoarele etc) vor fi prezentate în următoarele capitole.

1.3. CLASIFICAREA CIRCUITELOR ELECTRICE

Circuitele sau rețelele electrice sunt ansambluri de elemente de circuit conectate în diverse moduri prin suprapunerea bornelor acestora. Se obține astfel o structură cu un număr n de borne (poli sau terminale) de acces. Fiecare bornă se caracterizează prin curentul i_k şi potențialul v_k, iar diferența potențialelor a două borne se numeşte *tensiune la borne*.

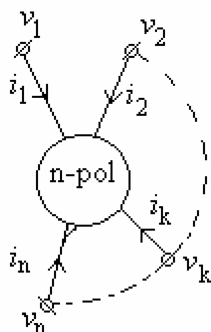


Fig. 1.24. Circuit n-pol.

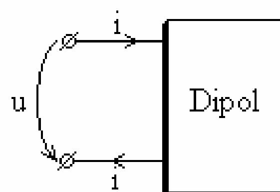


Fig. 1.25. Circuit dipol (bipol).

Un circuit cu n borne de acces se numeşte multipol electric sau n-pol electric (fig. 1.24). În particular, dacă $n = 2$, circuitul se numeşte **dipol**, dacă $n = 3$ - **tripol** şi dacă $n = 4$ - **cuadripol** electric. Întâlnită şi în reprezentarea elementelor de circuit pasive, structura de tip dipol (bipol) a circuitelor electrice (fig. 1.25), se caracterizează prin intensitatea curentului absorbit printr-o bornă şi prin tensiunea între cele două borne. Relația $u = f(i)$ sau $i = g(u)$ se

numeşte **caracteristica dipolului**. Pentru sensurile de referinţă ale curentului şi tensiunii la borne din figură reprezentând **convenţia de la receptoare**, puterea absorbită pe la borne de dipol, $p = ui > 0$, iar dipolul se numeşte *receptor*. Pentru un sens invers al tensiunii la borne-**convenţia de la generatoare**, puterea la bornele dipolului $p = -ui < 0$, iar dipolul se numeşte *generator*.

Prin definiţie circuitele ideale *n* - pol satisfac următoarele condiţii:

- în fiecare moment suma algebrică a intensităţilor curenţilor bornelor de acces este nulă;
- în fiecare moment puterea electromagnetică totală primită din exterior de circuitul *n* - pol se exprimă conform teoremei puterii electromagnetice prin relaţia:

$$p = \sum_{k=1}^{n} v_k i_k . \qquad (1.84)$$

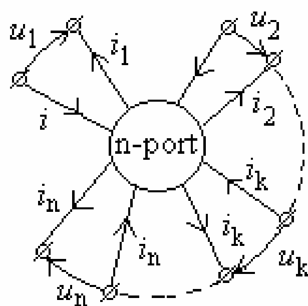


Fig. 1.26. Circuit n-port.

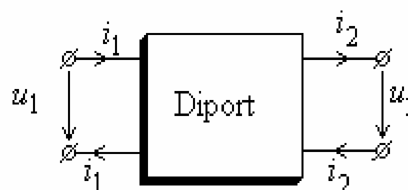


Fig. 1.27. Circuit diport (biport).

Asocierea a două borne ai căror curenţi sunt egali în valoare absolută şi opuşi ca semn constituie o poartă. Un multipol ale cărui borne sunt grupate astfel încât să constituie *n* porţi se numeşte multiport sau *n* - port (fig.1.26). El se caracterizează prin tensiunile porţilor şi prin intensităţile curenţilor acestora. Cuadripolul, având bornele grupate în două porţi, este un **diport** (fig. 1.27).

1.4. REGIMURILE DE FUNCŢIONARE ALE CIRCUITELOR ELECTRICE

După natura funcţiilor care exprimă variaţia în timp a intensităţilor curenţilor şi tensiunilor, regimurile de funcţionare ale circuitelor electrice se clasifică în:

a) **regim de curent continuu** - în care mărimile de excitaţie, intensităţile curenţilor, tensiunile şi potenţialele electrice sunt constante în timp;

b) **regim variabil** - în care mărimile de excitaţie, intensităţile curenţilor, tensiunile şi potenţialele electrice sunt funcţii oarecare de timp;

c) **regim periodic** - în care mărimile de excitaţie, intensităţile curenţilor, tensiunile şi potenţialele electrice sunt funcţii periodice de timp.

Un regim periodic particular foarte important în practică este regimul sinusoidal.

Regimurile variabile prin care se face trecerea de la unele regimuri de curent continuu sau regimuri periodice la alte regimuri de curent continuu sau periodice se numesc **regimuri tranzitorii**.

Rezolvarea sistemelor de ecuații ce descriu funcționarea circuitelor electrice în unul din regimurile de mai sus prezintă particularități specifice fiecărui regim, ceea ce determină abordarea de tehnici de analiză specifice. Acestea se grupează în trei mari categorii:

1. ***Analiza regimurilor de curent continuu***, cuprinzând metode de analiză ce conduc la rezolvarea unui sistem de ecuații algebrice care descriu funcționarea circuitului. Efortul de calcul este determinat exclusiv de numărul de ecuații ale sistemului. Cele mai utilizate metode matematice în acest caz sunt algebra matriceală şi metodele numerice de rezolvare a sistemelor de ecuații algebrice;

2. ***Analiza regimurilor sinusoidale***, cu ajutorul metodei simbolice a reprezentării în complex. Prin intermediul acestei tehnici, numită şi metoda simbolică, sistemul de ecuații diferențiale ce descriu funcționarea circuitului în regim sinusoidal se transformă într-un sistem de ecuații algebrice, satisfăcute de valorile complexe ale necunoscutelor, a cărui rezolvare este mult mai simplă. Analiza se încheie prin revenirea din domeniul complex în domeniul real, obținându-se astfel valorile instantanee ale mărimilor electrice calculate - curenți, tensiuni, potențiale electrice;

3. ***Analiza regimurilor variabile oarecare***, prin metoda operațională. Tehnica cea mai utilizată de analiză folosită în acest caz se bazează pe transformata Laplace şi permite transformarea ecuațiilor diferențiale ale circuitului în ecuații algebrice, satisfăcute de transformatele Laplace ale necunoscutelor. Metoda este similară celei simbolice folosite în analiza regimurilor sinusoidale. După obținerea soluțiilor sub forma transformatelor Laplace (numite funcții imagine), se aplică transformata Laplace inversă pentru a se obține valorile instantanee ale necunoscutelor (numite funcții original). Pentru rezolvarea acestor regimuri există însă şi alte metode, care se bazează pe utilizarea altor transformate, sau pe alte principii. Evident, metoda operațională nu se aplică la circuitele neliniare.

1.5. TEOREMELE GENERALE ALE TEORIEI CIRCUITELOR ELECTRICE

1.5.1. Teoremele lui Kirchhoff

a) În regim cvasistaționar *legea conservării sarcinii electrice* pentru o suprafată închisă Σ care înconjoară un nod oarecare (n_j) al circuitului, intersectează toate conductoarele laturilor $l_k \in (n_j)$ şi nu trece prin dielectricii condensatoarelor (fig.1.28), conduce la

$$i_\Sigma = -\frac{\mathrm{d}q_\Sigma}{\mathrm{d}t} = 0. \qquad (1.85)$$

Dacă se atribuie semnul (+) curenților care ies din nodul (n_j) (au sensul de referință acelaşi cu al normalei $\overline{n}_\Sigma$) şi semnul (-) celor care intră în nod, relația (1.85) conduce la

$$\sum_{l_k \in (n_j)} (A) i_k = 0. \qquad (1.86)$$

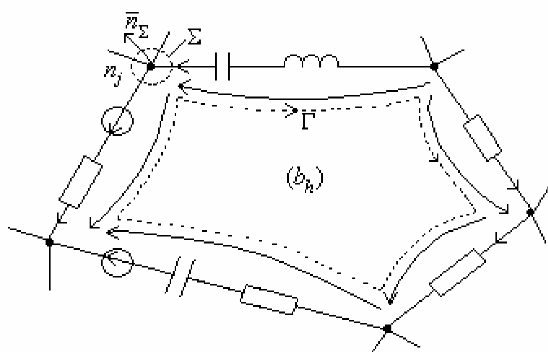


Fig. 1.28. O buclă de circuit.

Relația (1.86) reprezintă prima teoremă a lui Kirchhoff, care se enunță astfel: *suma algebrică a intensităților curenților din laturile l_k incidente în nodul (n_j) al unui circuit este nulă*.

b) Aplicând *legea inducției electromagnetice* pe conturul Γ, în ipoteza localizării câmpului magnetic numai în bobine (având o valoare nulă în afara elementelor de circuit) se obține

$$e_{\Gamma} = \oint_{\Gamma} \overline{E}\,\overline{ds} = -\frac{\mathrm{d}\varphi_{S_{\Gamma}}}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{1.87}$$

Descompunând curba închisă Γ într-o sumă de curbe deschise ce urmăresc liniile tensiunilor la bornele laturilor l_k ce formează bucla (b_h) a circuitului, relația (1.87) conduce la

$$\sum_{l_k \in (b_h)} {}_{(A)} u_k = 0, \tag{1.88}$$

relație ce reprezintă teorema a doua a lui Kirchhoff: *suma algebrică a tensiunilor la bornele laturilor* l_k *aparținând buclei* (b_h) *a unui circuit este nulă*.

Din modul de deducere al ecuației (1.88) rezultă că semnul (+) se atribuie tensiunilor la borne al căror sens de referință coincide cu cel al curbei Γ şi semnul (-) celorlalte.

Observație

Teoremele lui Kirchhoff obținute sub formele (1.86) şi (1.88) sunt independente de natura elementelor de circuit şi de modul de variație în timp a tensiunilor şi curenților. Ele sunt consecințe ale structurii topologice (derivând din modul de interconexiune a elementelor de circuit) a rețelei.

1.5.2 Teorema lui Tellegen

Aceasta este o teoremă generală, reprezentând o consecință directă a teoremelor lui Kirchhoff.

Fiind date două regimuri oarecare de funcționare ale unui circuit electric, notate cu (′) respectiv (″), curenții şi tensiunile corespunzătoare, care verifică independent cele două teoreme ale lui Kirchhoff, satisfac următoarele relații:

$$\left(\boldsymbol{u}_l'\right)^{\mathrm{t}} \cdot \boldsymbol{i}_l'' = \mathbf{0} \tag{1.89}$$

şi

$$\left(\boldsymbol{u}_l'\right)^{\mathrm{t}} \cdot \boldsymbol{i}_l'' - \left(\boldsymbol{u}_l''\right)^{\mathrm{t}} \cdot \boldsymbol{i}_l' = \mathbf{0}, \tag{1.90}$$

unde $\boldsymbol{u}_l$ este *vectorul tensiunilor* laturilor (porților) circuitului, iar $\boldsymbol{i}_l$ este *vectorul intensităților curenților* laturilor (porților) circuitului.

Demonstrarea celor două relații [5] se bazează pe proprietatea de ortogonalitate a matricelor de incidență laturi-secțiuni şi laturi-bucle, ceea ce le conferă valabilitate atât pentru regimuri diferite, produse de excitații sau condiții inițiale diferite, într-un acelaşi circuit, cât şi pentru regimuri diferite ale unor circuite diferite, dar având aceeaşi structură topologică (acelaşi graf).

1.5.3. Teorema conservării puterilor

Pentru cazul particular când cele două regimuri se confundă, teorema lui Tellegen conduce la următoarea relație între tensiunile şi curenții porților, corespunzătoare unui regim oarecare al unui circuit:

$$\boldsymbol{u}_l^{\mathrm{t}} \cdot \boldsymbol{i}_l = \mathbf{0}. \tag{1.91}$$

Relația (1.91) reprezintă *teorema conservării puterilor instantanee*. Dacă numărul total al porților (elementelor) circuitului este n_p, relația (1.91) poate fi exprimată în forma:

$$\boldsymbol{u}_l^{\mathrm{t}} \cdot \boldsymbol{i}_l = \sum_{k=1}^{n_p} u_k i_k = \sum_{k=1}^{n_p} p_k , \tag{1.92}$$

unde $p_k = u_k i_k$, reprezintă puterea instantanee primită prin poarta k a (elementului) circuitului, când sensurile curentului şi tensiunii la bornele porţii sunt asociate după convenţia de la receptoare.

Din (1.91) şi (1.92) rezultă expresia

$$\sum_{k=1}^{n_p} u_k i_k = \sum_{k=1}^{n_p} p_k = 0 , \tag{1.93}$$

cu enunţul: *suma algebrică a puterilor instantanee primite la porţile (bornele elementelor) unui circuit este în fiecare moment nulă*.

1.5.4. Teorema surselor ideale cu acţiune nulă (Vaschy)

a) Teorema surselor ideale de tensiune cu acţiune nulă: *dacă se introduc în serie cu fiecare element conectat într-un nod al unui circuit surse ideale de tensiune, având aceeaşi t.e.m. şi orientate la fel faţă de nod* (fig.1.29), *tensiunile şi curenţii prin elementele circuitului nu se modifică.*

Demonstraţia teoremei este evidentă, căci introducerea surselor de tensiune nu schimbă ecuaţiile lui Kirchhoff: prima nu se modifică, iar în a doua termenii noi care apar ($\pm e$), se anulează reciproc.

Aplicaţii ale teoremei: pasivizarea unei laturi (element) din circuit, anularea tensiunii iniţiale a unui condensator (echivalentă cu o sursă de t.e.m.), anularea fluxului magnetic iniţial, respectiv a curentului iniţial al unei bobine (condiţia iniţială nenulă fiind reprezentată printr-o sursă echivalentă de tensiune).

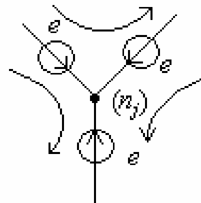


Fig. 1.29. Referitor la teorema surselor ideale independente de tensiune cu acţiune nulă.

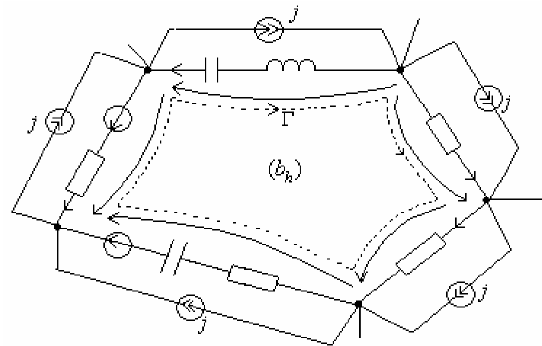


Fig. 1.30. Referitor la teorema surselor ideale independente de curent cu acţiune nulă.

b) Teorema surselor ideale de curent cu acţiune nulă: *dacă în paralel cu fiecare element (latură) de circuit ce formează un contur închis* (*bucla* b_h) *se conectează câte o sursă ideală de curent, orientată în sensul buclei şi având aceeaşi intensitate* (fig.1.30), *tensiunile şi curenţii prin elementele circuitului nu se modifică*.

Validitatea teoremei este evidentă, căci introducerea surselor de curent nu schimbă ecuaţiile Kirchhoff : în prima termenii noi ($\pm j$) care apar se anulează reciproc, iar a doua nu se modifică.

Aplicaţii ale teoremei: pasivizarea unei laturi (element) din circuit, anularea sarcinii electrice iniţiale, respectiv a tensiunii iniţiale a unui condensator (condiţia iniţială nenulă fiind

reprezentată printr-o sursă echivalentă de curent), anularea curentului inițial al unei bobine (echivalent cu o sursă de curent).

BIBLIOGRAFIE

1. **L.O. Chua, P.M. Lin,** "Computer-aided analysis of electronic circuits", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

2. **L.O. Chua, C.A. Desoer, E.S. Kuh**, "Linear and nonlinear circuits", McGraw-Hill Book Company, New York, 1987.

3**. A.F. Schwarz**, "Computer-aided design of microelectronic circuits and systems. Fundamentals, Methods and Tools", Academic Press, New York, 1987.

4. **C.I. Mocanu,** "Teoria circuitelor electrice", Editură Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.

5. **M. Preda, P. Cristea,** "Bazele electrotehnicii", vol. II. Circuite electrice, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980.

6**. M. Hasler, J. Neirynck,** "Circuits nonlinéaires", Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, 1985.

7. **N. Balabanian**, T. Bickart, S. Seshu, "Teoria modernă a circuitelor", Editura Tehnică, Bucureşti, 1974.

8. W. J. McCalla, "Fundamentals of Computer-Aided Circuit Simulation", Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordecht/Lancaster, 1988.

9. **S. Franco**, "Electric Circuits Fundamentals", Saunders College Publishing, New York, 1995.

10**. A. Timotin**, Viorica Hortopan, A. Ifrim, M. Preda, "Lecții de Bazele Electrotehnicii", Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1970.

11**. A. Moraru**, "Bazele electrotehnicii", vol. II. Teoria circuitelor, Tipografia Universității Politehnica Bucureşti, 1993.

12. **D. Topan**, "Circuits électriques", Editura Universitaria, Craiova, 1996.

13. **M. Iordache, M. Perpelea**, "Analiza asistata de calculator a circuitelor electrice si electronice neliniare complexe de mari dimensiuni", Editura Didactica si Pedagogica, Bucureşti, 1995.

14. **Lucia Dumitriu, M., Iordache**, “Teoria modernă a circuitelor electrice - Vol. I - Fundamentare teoretică, Aplicații, Algoritmi şi Programe de calcul”, Editura All Educational S.A., Bucureşti 1998.

15. **M.Iordache, Lucia Dumitriu**, “Teoria modernă a circuitelor electrice - Vol. II - Fundamentare teoretică, Aplicații, Algoritmi şi Programe de calcul”, Editura All Educational S.A., Bucureşti 2000.

16. **M. Iordache, Lucia Dumitriu,** “Simularea asistată de calculator a circuitelor analogice”, Editura POLITEHNICA Press, Bucureşti 2002 (450).

17. **M. Iordache**, **L. Mandache,** “Analiza asistată de calculator a circuitelor analogice neliniare”, Editura POLITEHNICA Press, Bucureşti 2004.

18. **Lucia Dumitriu, M. Iordache**, “Simularea numerică a circuitelor analogice cu programul PSPICE”, Editura MATRIX ROM, Bucureşti, 2006.

19. **M. Iordache, L. Mandache, M. Perpelea**, “Analyse numérique circuits analogiques non linéaires”, Groupe Genoyer, Marseille, 2006.

CAPITOLUL 2

CIRCUITE ELECTRICE DE CURENT CONTINUU (C.C.)

2.1. INTRODUCERE

Circuitele de c.c. sunt circuite care conțin rezistoare dipol, multipol (n-pol), rezistoare multiport (n-port) şi surse independente de tensiune şi de current constante în timp. În categoria rezistoarelor multipol şi multiport sunt incluse elemente ideale de circuit precum gyratoarele, sursele comandate, tranzistoarele şi amplificatoarele operaționale modelate prin circuite de c.c.

Un circuit de c.c. este **liniar** dacă, după pasivizarea surselor independente, el conține numai rezistoare dipol, multipol şi/sau multiport liniare (având relația între tensiunile şi curenții bornelor sau porților exprimată prin ecuații liniare) şi este **neliniar** dacă, după pasivizarea surselor independente, conține cel puțin un rezistor neliniar.

În teoria circuitelor electrice, circuitele de c.c. au un rol fundamental, deoarece:

- sunt utilizate în modelarea multor probleme inginereşti;
- analiza circuitelor nerezistive - invariabile sau variabile în timp (parametrice) - în regim dinamic se reduce, după substituirea tuturor bobinelor şi condensatoarelor cu modele discrete de circuit asociate unui algoritm implicit de integrare, la analiza, la fiecare pas de timp, a unui şir de circuite rezistive (liniare sau neliniare) asociate algoritmului ales.

Observații

1. Un circuit rezistiv (în care sursele independente pot fi variabile în timp) poate fi complet rezolvat, având soluție unică, dacă teoremele lui Kirchhoff şi ecuațiile constitutive ale laturilor sunt simultan satisfăcute de un set unic de tensiuni la bornele laturilor $u_1(t),...,u_l(t)$ şi un set unic de curenți de laturi $i_1(t),...,i_l(t)$, pentru orice t, cu condiția ca circuitul să nu conțină bucle formate numai din surse ideal de tensiune şi/sau secțiuni alcătuite numai din surse ideale de curent.

2. Circuitele electrice rezistive pot fi studiate atât în regim de curent continuu, cât şi în regimuri variabile (cazul particular sinusoidal). Un circuit care conține toate tipurile de elemente de circuit pasive, dar ale cărui mărimi de excitație (surse de tensiune şi/sau surse de curent) sunt invariabile în timp, este un circuit rezistiv, deoarece bobinele şi condensatoarele în curent continuu nu intervin prin parametrii lor caracteristici, având un comportament particular:

- dacă curentul ce parcurge bobina este continuu (constant) $i_L = I$ pentru $-\infty < t < \infty$, ecuația caracteristică a bobinei devine $u_L = L\mathrm{d}i_L / \mathrm{d}t = 0$, deci bobina se comportă în curent continuu ca un scurtcircuit ($R = 0$);
- dacă tensiunea la bornele condesatorului este continuă (constantă) $u_C = U$ pentru $-\infty < t < \infty$, ecuația caracteristică a condensatorului devine $i_C = C\mathrm{d}u_C / \mathrm{d}t = 0$, deci condensatorul se comportă ca o latură deschisă ($R \to \infty$).

3. În regim de curent continuu bobina şi condensatorul acumulează însă energie:

- din ecuația $i_L(t) = I = ct.$ rezultă că bobina parcursă de curentul I acumulează energia magnetică constantă în timp $W_m = LI^2 / 2$;
- din ecuația $u_C(t) = U = ct.$ rezultă că sub tensiune constantă la borne condensatorul acumulează energie electrică constantă în timp $W_e = CU^2 / 2$.

2.2. RELAȚII DE BAZĂ ALE CIRCUITELOR ELECTRICE REZISTIVE

O categorie importantă de circuite electrice sunt circuitele rezistive liniare care funcționează în regim de curent continuu. Ele sunt importante atât pentru aplicațiile tehnice în care intervin cât şi pentru facilitățile pe care le oferă introducerii metodelor de analiză ale teoriei circuitelor electrice.

Studiul circuitelor rezistive liniare în curent continuu oferă posibilitatea introducerii conceptelor de **echivalență** şi **modelare,** care vor fi apoi utilizate pentru simplificarea analizei circuitelor complexe.

Vom prezenta în continuare cele mai importante relații şi teoreme ale circuitelor de curent continuu.

2.2.1. Legea lui Ohm generalizată

Legea conducției electrice în formă integrală, aplicată unei porțiuni neramificate de conductor care poate fi reprezentată simbolic prin latura activă din figura 2.1, conduce la ecuația

$$U + E = RI, \tag{2.1}$$

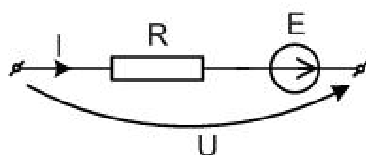


Fig. 2.1. Structura unei laturi.

unde U este tensiunea la bornele laturii, I curentul care o parcurge, R rezistența electrică a laturii, iar E - t.e.m. a sursei independente de tensiune din latură.

După cum se observă, sensurile de referință ale tensiunii la borne şi curentului sunt asociate după *convenția de la receptoare*.

Relația (2.1) poate fi scrisă sub forma:

$$U = RI - E, \tag{2.2}$$

sau

$$I = GU + GE, \tag{2.3}$$

cunoscute sub numele de **ecuațiile caracteristice** $U(I)$ respectiv $I(U)$ **ale laturii**.

2.2.2. Teoremele lui Kirchhoff

Rezolvarea circuitelor electrice de curent continuu constă în determinarea valorilor intensităților curenților din laturi şi a tensiunilor la bornele acestora, când se cunosc rezistențele laturilor, parametrii surselor comandate şi t.e.m. ale surselor independente de tensiune sau intensitățile surselor independente de curent. Cum între tensiunea şi curentul unei laturi există relația (2.2) - excepție fac laturile cu sursă de curent - rezolvarea acestor circuite revine, în ultimă instanță, la determinarea curenților din laturile circuitului, aleşi ca necunoscute fundamentale.

Pentru un circuit cu l laturi, conținând numai rezistoare, surse de tensiune independente şi surse de tensiune comandate (ambele tipuri putând fi ideale sau nu), deci un circuit de tipul (R, E, E_C), numărul de *necunoscute curenți de laturi* este egal cu l.

Pentru circuite conținînd în plus față de elementele de mai sus, surse independente şi comandate de curent (care impun curentul în latură), deci în cazul general, pentru circuite de tipul (R, E, E_C, J, J_C), *numărul minim de necunoscute* reprezentând curenți de laturi, este $l - l_J - l_{Jc}$, unde l_J şi l_{Jc} reprezintă numărul laturilor cu surse independente, respectiv comandate de curent.

Prima teoremă a lui Kirchhoff. Legea conservării sarcinii electrice în curent continuu capătă forma

$$\sum_{l_k \in (n_j)} (A) I_k = 0, \qquad j = \overline{1, n-1}. \tag{2.4}$$

Pentru un circuit cu un număr total n de noduri, se pot scrie cu ajutorul relației (2.4) un număr de $n-1$ *ecuații independente*, în tot atâtea noduri.

A doua teoremă a lui Kirchhoff are forma

$$\sum_{l_k \in (b_h)} (A) U_k = 0, \qquad h = \overline{1, b}, \tag{2.5}$$

numită *forma în tensiuni* a teoremei a doua a lui Kirchhoff. Această relație poate fi aplicată în $b = l - n + 1$ bucle independente ale circuitului.

Cu ajutorul ecuației caracteristice a laturii sub forma (2.2), ecuația (2.5) poate fi scrisă ca

$$\sum_{l_k \in (b_h)} (A) R_k I_k = \sum_{l_k \in (b_h)} (A) E_k, \qquad h = \overline{1, b}, \tag{2.6}$$

numită *forma în curenți a teoremei a doua a lui Kirchhoff* şi având enunțul:

Suma algebrică a căderilor de tensiune pe laturile l_k aparținând buclei b_h a unui circuit este egală cu suma algebrică a t.e.m. din laturile buclei.

Se consideră pozitivi termenii $R_k I_k$ şi E_k în cazul când sensul curentului I_k , respectiv al t.e.m. E_k, coincide cu sensul convențional de parcurgere a buclei.

Relațiile (2.4) şi (2.6) conduc la un sistem de ecuații în *necunoscute curenți de laturi*.

Prelucrând relația (2.4) în funcție de relația (2.3), se obține *forma în tensiuni a primei teoreme a lui Kirchhoff*

$$\sum_{l_k \in (n_j)} (A)\ G_k U_k = - \sum_{l_k \in (n_j)} (A) G_k E_k \tag{2.7}$$

Termenii pozitivi din sumele algebrice corespund tensiunilor U_k respectiv surselor E_k ce "ies" din nodul (n_j).

Relațiile (2.5) împreună cu relațiile (2.7), formează un sistem de ecuații în care *necunoscutele sunt tensiunile la bornele laturilor*.

2.2.3. Teorema conservării puterilor

Teorema lui Telegen (§ 1.5.2) pentru circuitele de c.c. are forma

$$\sum_{k=1}^{l} U_k I_k = 0. \tag{2.8}$$

Folosind ecuația caracteristică a laturii (2.2), relația (2.8) devine

$$\sum_{k=1}^{l} E_k I_k = \sum_{k=1}^{l} R_k I_k^2, \tag{2.9}$$

numită **ecuația de bilanț al puterilor**. Semnificația relației (2.9) este următoarea:

Suma algebrică a puterilor electromagnetice generate de sursele de tensiune este egală cu suma puterilor consumate în rezistoarele circuitului, prin efect Joule-Lenz.

Dacă circuitul este de tipul (R, E, E_C, J, J_C), ecuația bilanțului de puteri este:

$$\sum_{k=1}^{l} E_k I_k + \sum_{k=1}^{l} E_{ck} I_k + \sum_{k=1}^{l} U_{J_k} J_k + \sum_{k=1}^{l} U_{J_{ck}} J_{ck} = \sum_{k=1}^{l} R_k I_k^2 \; . \tag{2.10}$$

Exemplul 2.1: Să se rezolve, folosind teoremele lui Kirchhoff, circuitul din figura 2.2, pentru care se cunosc următoarele valori:

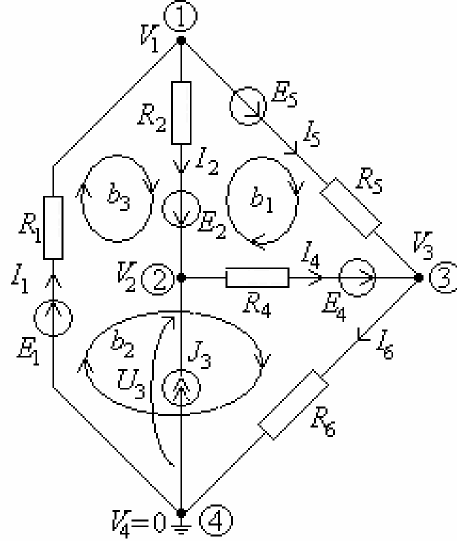


Fig. 2.2. Schema circuitului.

R_1= 4Ω, R_2= 1Ω, R_4= 2Ω,

R_5= 5Ω, R_6= 4Ω,

E_1= 5 V, E_2= 5 V, E_4= 22 V,

E_5= 10 V, J_3= 3 A.

Numărul necunoscutelor curenți de laturi este l-l_J = 5. Pentru a obține un sistem cu 5 ecuații în aceste necunoscute, se aplică prima teoremă a lui Kirchhoff în n-1= 3 noduri ş teorema a doua în (l-l_J)-n+1 =2 bucle.

Se obțin astfel următoarele ecuații Kirchhoff în curenți:

$$(n_1)\text{: } -I_1 + I_2 + I_5 = 0\,; \quad (n_2)\text{: } -I_2 + I_4 = J_3\,; \quad (n_3)\text{: } -I_4 - I_5 + I_6 = 0\,;$$

$$(b_1)\text{: } -R_2 I_2 - R_4 I_4 + R_5 I_5 = -E_2 - E_4 + E_5\,; \; (b_2)\text{: } R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_4 I_4 + R_6 I_6 = E_1 + E_2 + E_4\,.$$

Substituind valorile parametrilor şi apoi rezolvînd sistemul de ecuații astfel obținut, rezultă:

$$I_1 = 1\text{A},\; I_2 = 2\text{A},\; I_4 = 5\text{A},\; I_5 = -1\text{A},\; I_6 = 4\text{A}.$$

Tensiunile laturilor se determină cu relațiile:

$$U_1 = R_1 I_1 - E_1 = -1\text{V},\; U_2 = R_2 I_2 - E_2 = -3\text{V},\; U_3 = U_1 + U_2 = -4\text{V},$$
$$U_4 = R_4 I_4 - E_4 = -12\text{V},\; U_5 = R_5 I_5 - E_5 = -15\text{V},\;\; U_6 = R_6 I_6 = 16\text{V}.$$

Tensiunea U_3 s-a calculat folosind teorema a doua a lui Kirchhoff pe bucla b_3.

Sistemul de ecuații Kirchhoff în tensiuni are forma:

$$(n_1)\text{: } -G_1 U_1 + G_2 U_2 + G_5 U_5 = G_1 E_1 - G_2 E_2 - G_5 E_5\,;$$
$$(n_2)\text{: } -G_2 U_2 + G_4 U_4 = G_2 E_2 + J_3 - G_4 E_4\,;$$
$$(n_3)\text{: } -G_4 U_4 - G_5 U_5 + G_6 U_6 = G_4 E_4 + G_5 E_5\,;$$
$$(b_1)\text{: } -U_2 - U_4 + U_5 = 0\,; \quad (b_2)\text{: } U_1 + U_2 + U_4 + U_6 = 0\,.$$

După înlocuirea valorilor numerice ale parametrilor se rezolvă sistemul algebric astfel rezultat şi se obțin valorile necunoscutelor U_1, U_2, U_4, U_5 şi U_6:

$$U_1 = -1\text{V},\; U_2 = -3\text{V},\; U_4 = -12\text{V},\; U_5 = -15\text{V} \;\text{ şi }\; U_6 = 16\text{V}.$$

Tensiunea U_3 se calculează cu teorema a doua a lui Kirchhoff:

$$U_3 = U_1 + U_2 = -1 - 3 = -4\text{V} \quad \text{sau} \quad U_3 = -U_4 - U_6 = 12 - 16 = -4\text{V}.$$

Puterile generate, respectiv consumate în circuit sunt:

$$P_g = E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_4 I_4 + E_5 I_5 - U_3 J_3 = 5 + 10 + 110 - 10 + 12 = 127\text{W},$$

$$P_c = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 + R_6 I_6^2 = 4 + 4 + 50 + 5 + 64 = 127\text{W}.$$

2.2.4. Teorema superpoziției

Într-un circuit electric liniar cu n surse independente, din care n_E surse de tensiune şi n_J surse de curent, intensitatea curentului electric din orice latură este suma algebrică a intensităților curenților pe care i-ar stabili în acea latură fiecare dintre surse, dacă s-ar afla singură în rețea, celelalte surse independente fiind pasivizate.

Demonstrația teoremei se bazează pe caracterul liniar al ecuațiilor obținute prin aplicarea teoremelor lui Kirchhoff. Fie matricele de incidență a laturilor la noduri, $\boldsymbol{A}$, şi a laturilor la bucle $\boldsymbol{B}$, obținute din graful unui circuit având n_E şi n_J surse de tensiune, respectiv de curent.

Curenții şi tensiunile la bornele laturilor circuitului satisfac ecuațiile lui Kirchhoff:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_l = \boldsymbol{0}\,, \quad \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_l = \boldsymbol{0}. \tag{2.11}$$

Presupunând că în circuit acționează o singură sursă de tensiune, celelalte surse fiind pasivizate - cele de tensiune, dacă sunt ideale prin scurtcircuitare şi dacă sunt reale prin substituirea cu rezistența lor internă, iar cele de curent, dacă sunt ideale prin deconectare şi dacă sunt reale prin înlocuirea cu conductanța lor internă - ecuațiile lui Kirchhoff capătă forma:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_{E_k} = \boldsymbol{0} \quad , \quad \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_{E_k} = \boldsymbol{0}. \tag{2.12}$$

Dacă circuitul conține toate cele n surse, vectorii curenților din laturi şi ale tensiunilor la bornele acestora sunt

$$\boldsymbol{I}_l^{'} = \sum_{k=1}^{n_E} \boldsymbol{I}_{E_k} + \sum_{k=1}^{n_J} \boldsymbol{I}_{J_k}\,, \quad \boldsymbol{U}_l^{'} = \sum_{k=1}^{n_E} \boldsymbol{U}_{E_k} + \sum_{k=1}^{n_J} \boldsymbol{U}_{J_k}\,. \tag{2.13}$$

Aceşti vectori satisfac teoremele lui Kirchhoff. Ținând seama de ecuațiile (2.11) ÷ (2.13) se obține

$$\sum_{k=1}^{n_E} \boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_{E_k} + \sum_{k=1}^{n_J} \boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_{J_k} = \boldsymbol{A}\left(\sum_{k=1}^{n_E} \boldsymbol{I}_{E_k} + \sum_{k=1}^{n_J} \boldsymbol{I}_{J_k} \right) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_l^{'} = \boldsymbol{0}\,,$$

$$\sum_{k=1}^{n_E} \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_{E_k} + \sum_{k=1}^{n_J} \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_{J_k} = \boldsymbol{B}\left(\sum_{k=1}^{n_E} \boldsymbol{U}_{E_k} + \sum_{k=1}^{n_J} \boldsymbol{U}_{J_k} \right) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_l^{'} = \boldsymbol{0}\,. \tag{2.14}$$

Ecuațiile (2.10) şi (2.14) fiind identice, rezultă $\boldsymbol{I}_l^{'} = \boldsymbol{I}_l$ şi $\boldsymbol{U}_l^{'} = \boldsymbol{U}_l$.

O *demonstrație alternativă* pleacă de la cele două teoreme ale lui Kirchhoff scrise sub forma (2.4), respectiv (2.6). Rezolvând sistemul de ecuații obținut prin regula lui Cramer, rezultă pentru curentul din latura i o expresie de forma:

$$I_i = G_{i1}E_1 + \ldots + G_{ij}E_j + \ldots + G_{il}E_l = \sum_{j=1}^{l} G_{ij}E_j = \sum_{j=1}^{l} I_{ij}\,, \tag{2.15}$$

unde G_{ij} se numeşte *conductanță de transfer* de la latura j la latura i şi, pentru circuitele reciproce (a se vedea paragraful 2.2.5), satisface condiția:

$$G_{ij} = G_{ji}, \qquad (2.16)$$

iar

$$I_{ij} = I_i \Big|_{E_j \neq 0;\ E_i = 0} \quad \text{cu} \quad i \neq j \qquad (2.17)$$

reprezintă curentul din latura i când toate t.e.m. ale surselor de tensiune din circuit sunt nule în afară de E_j.

2.2.5. Teorema reciprocității

Curentul dintr-o latură h a unui circuit liniar pasiv produs de o sursă ideală independentă de tensiune plasată în latura j este egal cu curentul pe care l-ar stabili în latura j aceeaşi sursă conectată în latura h.

Fie circuitul liniar pasiv din figura 2.3, la care se pun în evidență laturile j şi h.

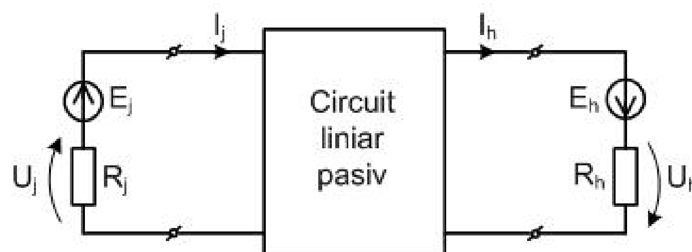


Fig. 2.3. Circuit asociat teoremei reciprocității, când se folosesc surse ideale independente de tensiune.

Considerăm două regimuri distincte (′) şi (″), caracterizate prin prezența sursei de tensiune E în primul regim în latura j şi în al doilea regim în latura h, adică: $E_j^{'} = E,\ E_h^{'} = 0$, respectiv $E_j^{''} = 0,\ E_h^{''} = E$.

Demonstrația se bazează pe teorema lui Tellegen (§ 1.5.2) conform căreia se poate scrie:

$$\sum_{k=1}^{l} U_k^{'} I_k^{''} - E_j^{'} I_j^{''} = 0, \qquad (2.18)$$

respectiv

$$\sum_{k=1}^{l} U_k^{''} I_k^{'} - E_h^{''} I_h^{'} = 0, \qquad (2.19)$$

unde

$$E_j^{'} = E_h^{''} = E;\ U_k^{'} = R_k I_k^{'};\ U_k^{''} = R_k I_k^{''}. \qquad (2.20)$$

Ținând seama de relațiile (2.20) din (2.18) şi (2.19) rezultă

$$I_h^{'} = I_j^{''}. \qquad (2.22)$$

O *demonstrație alternativă* se bazează pe relațiile (2.15) şi (2.16). Notând cu G_{hj} conductanța de transfer între laturile j şi h, deoarece

$$G_{hj} = G_{jh}, \qquad (2.22)$$

înmulțind ambii membri cu $E_j = E_h = E$ se obține, conform relației (2.15):

$$I_h = I_j. \qquad (2.23)$$

Dacă în locul sursei ideale independente de tensiune se foloseşte o sursă ideală independentă de curent (fig.2.4) se poate demonstra similar că

$$U_h^{'} = U_j^{''}, \qquad (2.24)$$

adică

Tensiunea la bornele unei laturi h a unui circuit liniar pasiv, datorată unei surse de curent plasată în paralel cu latura j, este egală cu tensiunea la bornele laturii j, dacă aceeaşi sursă de curent este plasată în paralel cu latura h.

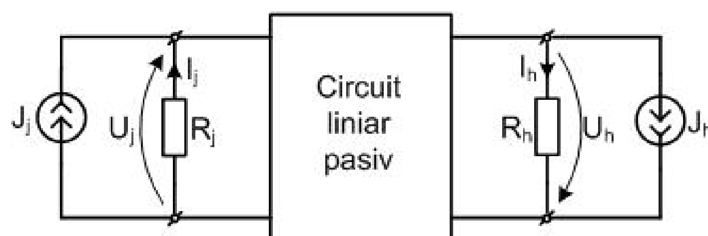


Fig. 2.4. Circuit asociat teoremei reciprocității, când se folosesc surse ideale independente de curent.

Un circuit care satisface proprietățile exprimate prin relațiile (2.21) şi (2.24) se numeşte **circuit reciproc**. Un astfel de circuit nu poate conține surse comandate şi/sau gyratoare.

2.2.6. Teorema compensației

Înlocuirea unui rezistor R_p având tensiunea la borne $U_p = R_p I_p$, printr-o sursă ideală de tensiune cu t.e.m. $E_p = R_p I_p$, corespunzătoare aceleiaşi tensiuni la borne, nu modifică intensitățile curenților din circuit.

Demonstrația teoremei urmăreşte echivalența sistemelor de ecuații ale celor două circuite. Curenții circuitului din figura 2.5,a satisfac ecuațiile lui Kirchhoff:

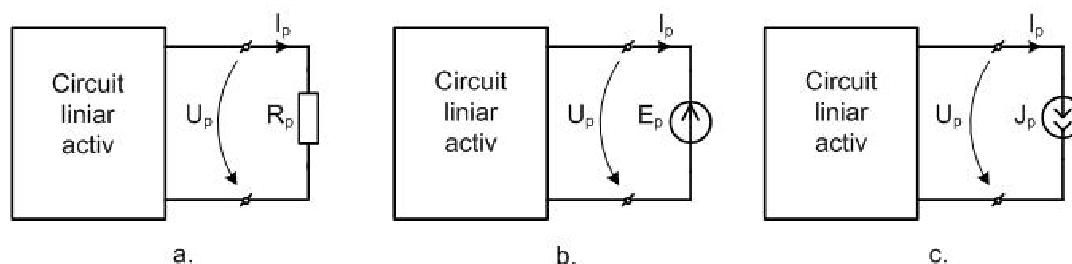


Fig. 2.5. Circuite asociate teoremei compensație.

$$\sum_{l_k \in (n_j)} I_k = 0, \qquad j = \overline{1, n-1}, \qquad (2.25)$$

$$\sum_{l_k \in (b_h)} (A) R_k I_k = \sum_{l_k \in (b_h)} (A) E_k, \qquad h = \overline{1, b}, \qquad (2.26)$$

iar curenții circuitului din figura 2.5,b satisfac aceleaşi ecuații, în care termenul $R_p I_p$ trece din membrul stâng al ecuației (2.26) în membrul drept, cu semn schimbat, corespunzător sursei ideale de tensiune E_p. Pentru ca sursa să compenseze efectul rezistorului este deci necesar ca

$$E_p = U_p,\tag{2.27}$$

adică sensul sursei să fie cel din figura 2.5,b, opus sensului de referință al curentului.

O altă variantă a teoremei constă în înlocuirea rezistorului printr-o sursă ideală de curent J_p (fig. 2.5,c), care satisface relația

$$J_p = I_p,\tag{2.28}$$

şi implicit nu modifică tensiunile (şi evident nici curenții) din circuit.

Demonstrația este evidentă, curentul prin latura p fiind acelaşi cu cel prin rezistor, în timp ce tensiunea U_p, impusă de circuitul extern laturii p, se aplică sursei de curent fără nici o restricție.

2.2.7. Teorema lui Vratsano

Derivata rezistenței de intrare R_i (rezistența echivalentă a circuitului văzută la bornele sursei) în raport cu o rezistență oarecare R_j a circuitului (fig. 2.6,a) este egală cu pătratul raportului dintre intensitatea curentului prin latura j, I_j, şi a curentului I_i de la intrare, adică

$$\frac{\mathrm{d}R_i}{\mathrm{d}R_j} = \left(\frac{I_j}{I_i}\right)^2.\tag{2.29}$$

Pentru *demonstrație* se folosesc teorema compensației şi teorema superpoziției. Variația rezistenței R_j cu dR_j determină variații ale tuturor curenților circuitului, deci şi a curentului de intrare I_i cu dI_i (fig. 2.6,b). Conform teoremei compensației, variația rezistenței dR_j poate fi înlocuită (fig. 2.6,c) cu o sursă ideală de tensiune

$$\mathrm{d}E_j = \mathrm{d}R_j(I_j + \mathrm{d}I_j) \cong I_j\mathrm{d}R_j.\tag{2.30}$$

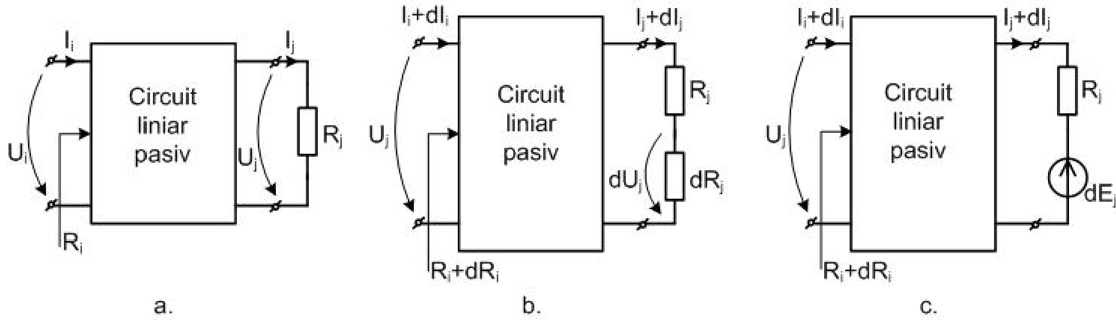


Fig. 2.6. Circuite asociate teoremei Vratsano.

Aplicând teorema superpoziției în circuitul din figura 2.6,c, folosind relația (2.15) şi ținând seama de (2.30), se obține:

$$I_i + \mathrm{d}I_i = I_i - G_{ij}\mathrm{d}E_j = I_i - G_{ij}I_j\mathrm{d}R_j.\tag{2.31}$$

Din relația (2.31) se obține variația curentului la intrarea circuitului

$$\mathrm{d}I_i = -G_{ij}I_j\mathrm{d}R_j.\tag{2.32}$$

Pe de altă parte, la o variație a rezistenței de intrare a circuitului, curentul de intrare, definit inițial (fig. 2.6,a) ca

$$I_i = \frac{U_i}{R_i}, \qquad (2.33)$$

variază după relația

$$I_i + \mathrm{d}I_i = \frac{U_i}{R_i + \mathrm{d}R_i}, \qquad (2.34)$$

din care, ținând seama de (2.31), se obține:

$$\mathrm{d}I_i = -\frac{\mathrm{d}R_i}{R_i(R_i + \mathrm{d}R_i)} U_i \cong -\frac{\mathrm{d}R_i}{R_i^2} U_i. \qquad (2.35)$$

Egalând expresiile (2.32) şi (2.35) rezultă:

$$G_{ij} U_i I_j \mathrm{d}R_j = I_i^2 \mathrm{d}R_i. \qquad (2.36)$$

Deoarece, conform relațiilor (2.15) şi (2.16)

$$G_{ij} U_i = G_{ji} U_i = I_j, \qquad (2.37)$$

relația (2.37) poate fi pusă sub forma (2.30).

2.2.8. Teoremele de transfigurare a circuitelor electrice

2.2.8.1. Echivalența circuitelor

În analiza modelelor sistemelor fizice, conceptul de **echivalență** joacă un rol foarte important, determinând modificări topologice ale modelului, de natură să reducă gradul de complexitate al acestuia.

Un sistem complet de relații independente între curenții şi tensiunile (sau potențialele) bornelor de acces ale unui multipol se numeşte sistem de ecuații ale multipolului (circuitului).

Doi multipoli descrişi de sisteme echivalente de ecuații se numesc multipoli echivalenți sau *circuite electrice echivalente*. În particular, doi dipoli care, sub aceeaşi tensiune la borne, absorb (sau injectează) acelaşi curent, se numesc *dipoli echivalenți*. Pentru ca două sisteme de ecuații să fie echivalente este necesar ca ele să conțină aceleaşi variabile (necunoscute), prin urmare o condiție necesară pentru echivalența multipolilor (circuitelor) este să aibe acelaşi număr de borne.

Substituirea unui multipol (circuit) dat printr-un multipol (circuit) echivalent se numeşte **transfigurare electrică**. Transfigurarea electrică conservă relațiile dintre curenții şi tensiunile bornelor de acces şi prin urmare curenții şi tensiunile în circuitul exterior celui transfigurat nu se modifică.

2.2.8.2. Echivalența surselor reale

O sursă reală de energie electrică admite două scheme echivalente: una ca sursă de tensiune şi alta ca sursă de curent (fig.2.7).

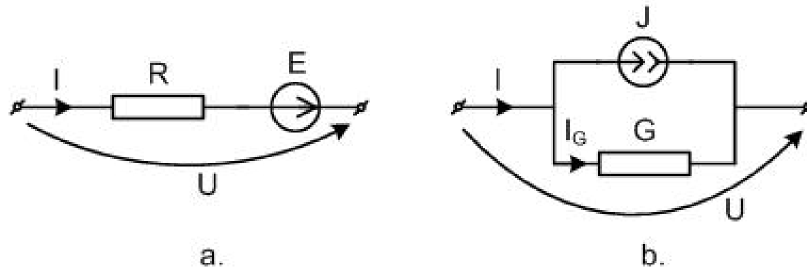


Fig. 2.7. Echivalența dintre o sursă reală independentă de tensiune şi o sursă reală independentă de curent.

Caracteristica *I*(*U*) a laturii cu sursă de tensiune este:

$$I = GU + GE. \tag{2.38}$$

Relația (2.38) poate fi scrisă sub forma

$$I = I_G + J, \tag{2.39}$$

unde $I_G = GU$ şi $J = GE$ şi corespunde schemei derivație cu sursă de curent. Cele două scheme sunt deci echivalente dacă sunt satisfăcute relațiile

$$J = \frac{E}{R} \quad \text{şi} \quad G = \frac{1}{R} \tag{2.40}$$

Latura generalizată de circuit (fig. 2.8,a) admite două scheme echivalente:

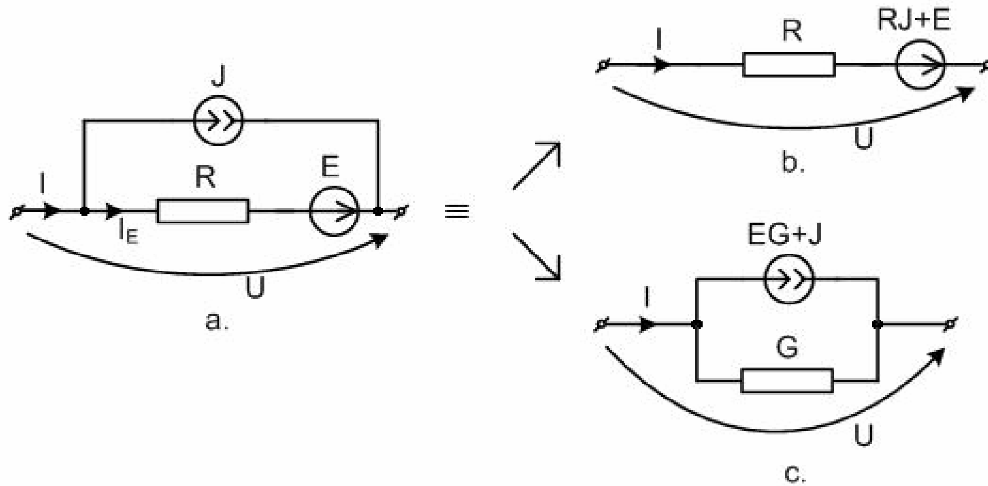


Fig. 2.8. Structura laturii generalizate de circuit.

una cu sursă de tensiune (b) şi alta cu sursă de curent (c).

Cele două transfigurări se obțin pe baza următoarelor relații rezultate prin prelucrarea ecuațiilor caracteristice ale laturilor:

$$U = RI_E - E = R(I - J) - E = RI - RJ - E = RI - (RJ + E), \tag{2.41}$$

respectiv

$$I = I_E + J = GU + (GE + J).\qquad (2.42)$$

2.2.8.3. Transfigurarea serie

Fie *n* laturi active conectate în serie (astfel încât să fie parcurse de acelaşi curent), reprezentate în figura 2.9,a.

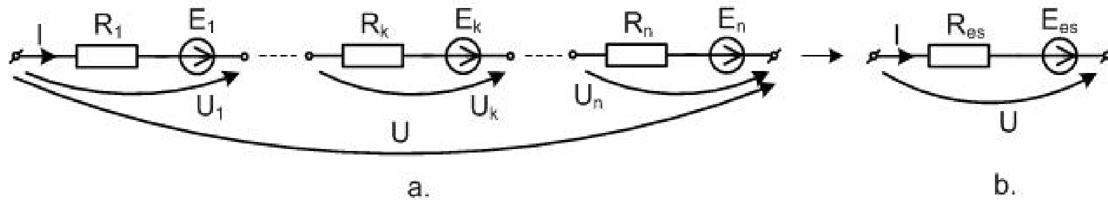


Fig. 2.9. Conectarea în serie a *n* dipoli activi (E_k, R_k).

Ecuaţiile de funcţionare ale circuitului serie sunt:

$$I_1 = ... = I_k = ... = I_n = I\,,\qquad (2.43)$$

$$U = U_1 + ... + U_k + ... + U_n = \sum_{k=1}^{n} U_k.\qquad (2.44)$$

Folosind ecuaţia caracteristică a laturii pentru a exprima tensiunea U_k, se obţine:

$$U = \sum_{k=1}^{n} U_k = \sum_{k=1}^{n} R_k I_k - \sum_{k=1}^{n} E_k = \left(\sum_{k=1}^{n} R_k\right) I - \sum_{k=1}^{n} E_k.\qquad (2.45)$$

Ecuaţia (2.46) se poate exprima sub forma:

$$U = R_{es} I - E_{es},\qquad (2.46)$$

care corespunde circuitului echivalent din figura 2.9,b.

Deci circuitele din figurile 2.9,a şi b sunt echivalente dacă sunt satisfăcute relaţiile:

$$R_{es} = \sum_{k=1}^{n} R_k \ \text{ şi } \ E_{es} = \sum_{k=1}^{n} E_k.\qquad (2.47)$$

Dacă laturile din figura 2.9,a sunt reprezentate prin scheme echivalente cu sursă de curent (fig. 2.10,a), se obţine schema de conexiune serie din figura 2.10,a.

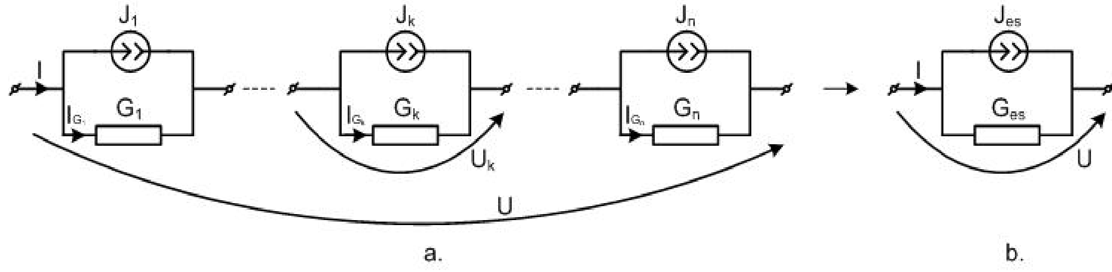


Fig. 2.10. Conectarea în serie a *n* dipoli activi (J_k, G_k).

Pe baza ecuației (2.44) se obține:

$$U = \sum_{k=1}^{n} U_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{I_{G_k}}{G_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{I - J_k}{G_k} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{G_k} \right) I - \sum_{k=1}^{n} \frac{J_k}{G_k} = \frac{I}{G_{es}} - \frac{J_{es}}{G_{es}}. \qquad (2.48)$$

Relația (2.49) corespunde schemei echivalente din figura 2.10,b.
Condițiile de echivalență a celor două scheme sunt, conform relației (2.48):

$$\frac{1}{G_{es}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{G_k} \quad \text{şi} \quad J_{es} = G_{es} \sum_{k=1}^{n} \frac{J_k}{G_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{J_k}{G_k}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{G_k}}. \qquad (2.49)$$

2.2.8.4. Transfigurarea paralel

Când *n* laturi active se conectează între aceleaşi două noduri astfel încât să aibă aceeaşi tensiune la borne, se obține o conexiune paralel (fig. 2.11,a).

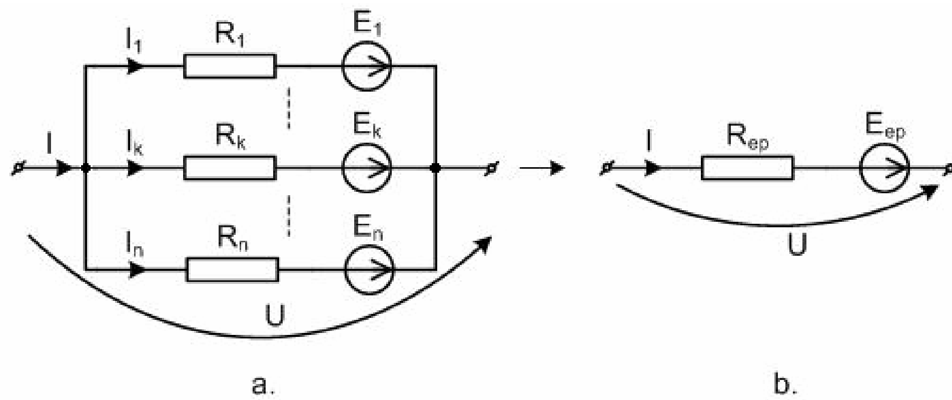


Fig. 2.11. Conectarea în paralel a *n* dipoli activi (E_k, R_k).

Ecuațiile de funcționare ale circuitului sunt:

$$U_1 = \ldots = U_k = \ldots = U_n = U, \qquad (2.50)$$

$$I = I_1 + \ldots + I_k + \ldots + I_n = \sum_{k=1}^{n} I_k . \tag{2.51}$$

Folosind ecuația caracteristică a laturii pentru a exprima curentul I_k, se obține:

$$I = \sum_{k=1}^{n} I_k = \sum_{k=1}^{n} G_k U_k + \sum_{k=1}^{n} G_k E_k = \left(\sum_{k=1}^{n} G_k \right) U + \sum_{k=1}^{n} G_k E_k . \tag{2.52}$$

Ecuația (2.52) se poate pune sub forma:

$$I = G_{ep} U + G_{ep} E_{ep} , \tag{2.53}$$

care corespunde circuitului echivalent din figura 2.11,b.

Condițiile de echivalență a celor două circuite sunt:

$$G_{ep} = \sum_{k=1}^{n} G_k , \quad \text{respectiv} \quad \frac{1}{R_{ep}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k} \quad \text{şi} \quad E_{ep} = \frac{\sum_{k=1}^{n} G_k E_k}{G_{ep}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} G_k E_k}{\sum_{k=1}^{n} G_k} . \tag{2.54}$$

Dacă laturile din figura 2.11,a sunt reprezentate prin scheme cu surse de curent (fig. 2.12,a), din relația (2.52) se obține:

$$I = \sum_{k=1}^{n} I_k = \sum_{k=1}^{n} (J_k + G_k U_k) = \sum_{k=1}^{n} J_k + \left(\sum_{k=1}^{n} G_k \right) U = J_{ep} + G_{ep} U . \tag{2.55}$$

Relația (2.54) corespunde schemei echivalente din figura 2.12,b.
Condițiile de echivalență a celor două scheme rezultă din ultima ecuație:

$$J_{ep} = \sum_{k=1}^{n} J_k \quad \text{şi} \quad G_{ep} = \sum_{k=1}^{n} G_k . \tag{2.56}$$

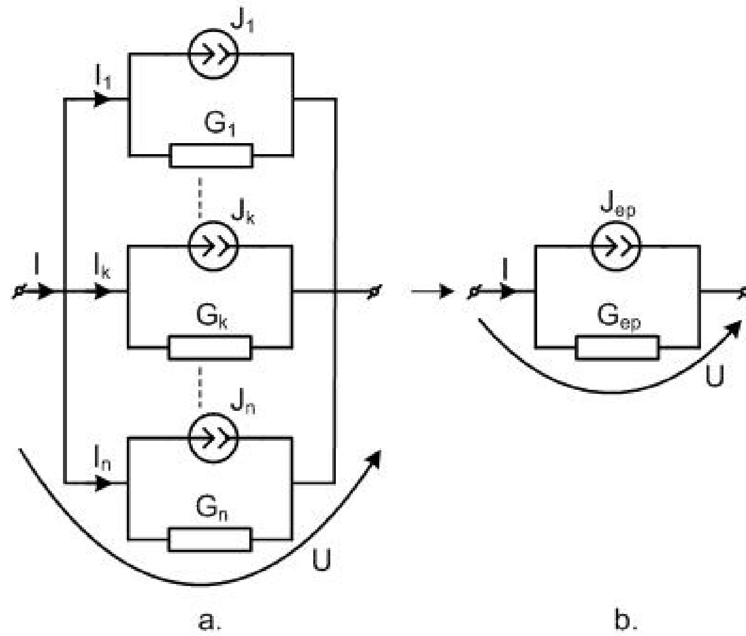


Fig. 2.12. Conectarea în paralel a *n* dipoli activi (J_k, G_k).

2.2.8.5. Transfigurarea stea-poligon complet

Conectarea a *n* laturi într-un nod comun (fig. 2.13,a) formează un circuit în stea. Nodul 0 se numeşte punct neutru.

Curentul I_j care intră în borna de acces *j* a circuitului stea, poate fi exprimat cu legea lui Ohm:

$$I_j = G_j U_j + G_j E_j, \quad j = \overline{1,n}. \tag{2.57}$$

Exprimând tensiunea U_j ca diferență de potențiale, se obține:

$$I_j = G_j V_j - G_j V_0 + G_j E_j. \tag{2.58}$$

Aplicând prima teoremă a lui Kirchhoff în nodul 0 rezultă:

$$\sum_{j=1}^{n} I_j = \sum_{j=1}^{n} G_j V_j - V_0 \sum_{j=1}^{n} G_j + \sum_{j=1}^{n} G_j E_j = 0, \tag{2.59}$$

din care se determină potențialul punctului neutru:

$$V_0 = \frac{\sum_{j=1}^{n} G_j V_j + \sum_{j=1}^{n} G_j E_j}{\sum_{j=1}^{n} G_j}. \tag{2.60}$$

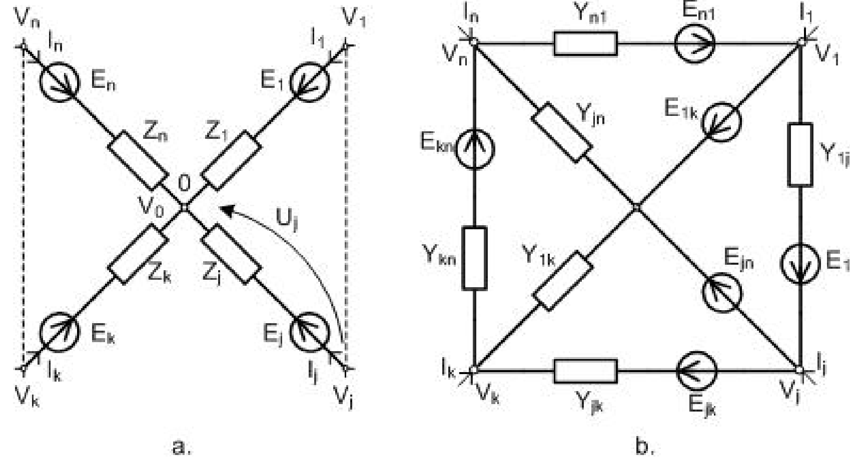


Fig. 2.13. Transfigurarea stea – poligon complet.

Substituind relația (2.60) în (2.58) şi modificând notația indicelui în raport cu care se face însumarea în (3.73), se obține:

$$I_j = G_j V_j - \frac{\sum_{k=1}^{n} G_k V_k + \sum_{k=1}^{n} G_k E_k}{\sum_{k=1}^{n} G_k} G_j + G_j E_j = \frac{G_j}{\sum_{k=1}^{n} G_k}\Big(V_j \sum_{k=1}^{n} G_k - \sum_{k=1}^{n} G_k V_k -$$
$$- \sum_{k=1}^{n} G_k E_k + E_j \sum_{k=1}^{n} G_k\Big) = \frac{G_j}{\sum_{k=1}^{n} G_k}\left(\sum_{k=1}^{n} G_k U_{jk} + \sum_{k=1}^{n} G_k (E_j - E_k)\right), \quad j = \overline{1,n}. \tag{2.61}$$

Se poate găsi totdeauna un circuit în poligon complet (fig. 2.13,b) echivalent unui circuit în stea dat.

Curentul din latura jk, I_{jk}, se determină cu ajutorul legii lui Ohm:

$$I_{jk} = G_{jk} U_{jk} + G_{jk} E_{jk}, \tag{2.62}$$

iar curentul I_j care intră în borna de acces j, se determină cu ajutorul primei teoreme a lui Kirchhoff, în funcție de curenții laturilor poligonului:

$$I_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} G_{jk} U_{jk} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} G_{jk} E_{jk}, \quad j = \overline{1,n}. \tag{2.63}$$

Comparând relațiile (2.61) şi (2.63), se obține

$$G_{jk} = \frac{G_j G_k}{\sum_{k=1}^{n} G_k}, \quad \text{pentru} \quad j,k = \overline{1,n} \quad \text{şi} \quad j \neq k \tag{2.64}$$

şi

$$\sum_{k=1}^{n} G_{jk} E_{jk} = \sum_{k=1}^{n} \frac{G_j G_k}{\sum_{k=1}^{n} G_k} (E_j - E_k), \quad \text{pentru} \quad j = \overline{1,n} \quad \text{şi} \quad k \neq j. \tag{2.65}$$

Deoarece, pentru circuitele reciproce, $G_{jk} = G_{kj}$, numărul relațiilor independente de forma (2.64) este

$$n_G = \frac{n(n-1)}{2}. \tag{2.66}$$

Aceste ecuații permit calculul tuturor conductanțelor poligonului complet. Numărul de ecuații independente de tipul (2.65) este

$$n_E = n - 1. \tag{2.67}$$

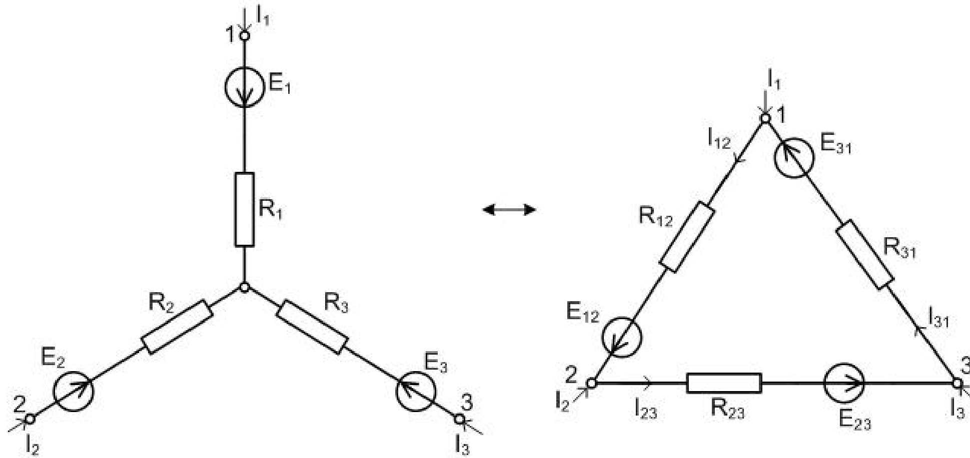


Fig. 2.14. Transfigurare stea – triunghi cu laturi active.

Cum în cazul general numărul de surse de tensiune este egal cu cel al conductanțelor şi cum $n_E < n_G$, rezultă că sistemul de ecuații (2.65) este nedeterminat. Relațiile de tip (2.65) sunt satisfăcute dacă

$$E_{jk} = E_j - E_k, \quad \text{pentru} \quad j,k = \overline{1,n} \, . \tag{2.68}$$

În consecință, relațiile de transfigurare a unui circuit cu conexiune stea într-un circuit cu conexiune poligon complet sunt (2.64) şi (2.68).

În general, transfigurarea inversă (din poligon complet în stea) nu este posibilă deoarece numărul n al conductanțelor necunoscute G_k este mai mic decât numărul ecuațiilor de tip (2.64), cu excepția cazului $n = 3$.

Relațiile pentru transfigurarea în ambele sensuri (fig. 2. 14) sunt date mai jos.

- transfigurarea stea-triunghi:

$$R_{12} = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_3}; \quad R_{23} = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_1}; \quad R_{31} = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_2}; \tag{2.69}$$

$$E_{12} = E_1 - E_2;\;\; E_{23} = E_2 - E_3;\;\; E_{31} = E_3 - E_1, \qquad)$$

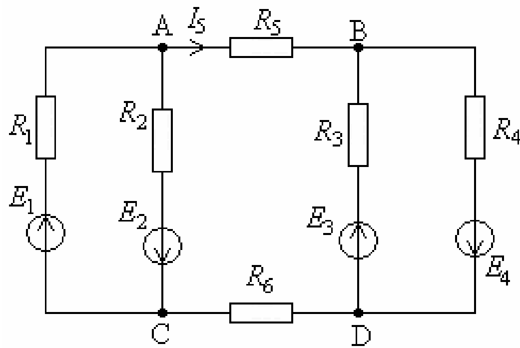
- transfigurarea triunghi-stea:

$$R_1 = \frac{R_{31}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}};\;\; R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}};\;\; R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}};$$

$$E_1 = \frac{G_2E_{12}+G_3E_{13}}{G_1+G_2+G_3};\;\; E_2 = \frac{G_3E_{23}+G_1E_{21}}{G_1+G_2+G_3};\;\; E_3 = \frac{G_1E_{31}+G_2E_{31}}{G_1+G_2+G_3}. \qquad (2.70)$$

Din punctul de vedere al analizei circuitelor electrice, transfigurarea stea-poligon complet prezintă o mare importanță, deoarece eliminarea punctului neutru reduce cu o unitate numărul nodurilor circuitului. Prin transfigurări succesive se pot elimina toate nodurile interioare ale unui multipol.

Exemplul 2.2: Să se calculeze curentul I_5 din circuitul reprezentat în figura 2.15,a, pentru care se dau:



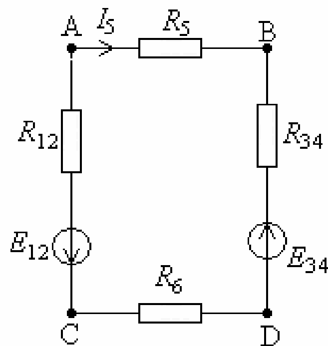
$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 10\Omega$, $R_6 = 5\Omega$,

$E_1 = 135$ V, $E_2 = 25$ V,

$E_3 = 85$ V; $E_4 = 75$ V.

Fig. 2.15,a. Schema circuitului.

Se transfigurează circuitul ca în figura 2.15,b, obținându-se:



$$E_{12} = \frac{E_1G_1 - E_2G_2}{G_1+G_2} = $$

$$= \frac{135\cdot\frac{1}{10} - 25\cdot\frac{1}{10}}{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}} = \frac{110}{2} = 55\text{V};$$

Fig. 2.15,b. Circuitul echivalent.

$$R_{12} = \frac{1}{G_1+G_2} = \frac{10}{2} = 5\Omega,$$

$$E_{34} = \frac{-E_3G_3 + E_4G_4}{G_3+G_4} = \frac{-85\cdot\frac{1}{10} + 75\frac{1}{10}}{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}} = \frac{-10}{2} = -5\text{V};$$

$$R_{34} = \frac{1}{G_3 + G_4} = \frac{10}{2} = 5\Omega.$$

Curentul I_5 se calculează cu relația:

$$I_5 = \frac{E_{12} + E_{34}}{R_{12} + R_5 + R_{34} + R_6} = \frac{55 - 5}{5 + 10 + 5 + 5} = \frac{50}{25} = 2\text{A}.$$

2.2.9. Teoremele divizoarelor de tensiune şi de curent

Teorema divizorului de tensiune stabileşte modul în care se distribuie tensiunea aplicată unei conexiuni serie de rezistoare (fig. 2.16).

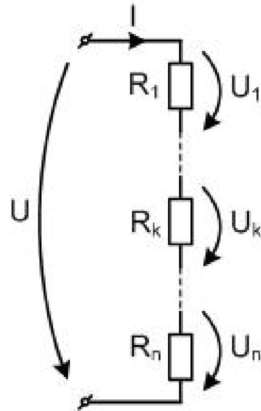


Fig. 2.16. Divzorul de tensiune.

Fiind date valorile rezistențelor R_j, $j = \overline{1,n}$ şi valoarea tensiunii aplicate, U, se cere tensiunea U_j.

Aplicând legea lui Ohm şi ținând seama de relațiile (2.47) pentru laturi pasive, se obține:

$$U_j = R_j I = R_j \frac{U}{R_{es}} = \frac{R_j}{\sum_{k=1}^{n} R_k} U. \qquad (2.71)$$

Teorema divizorului de curent stabileşte modul în care se distribuie curentul în rezistoarele unei conexiuni paralel (fig. 2.17).

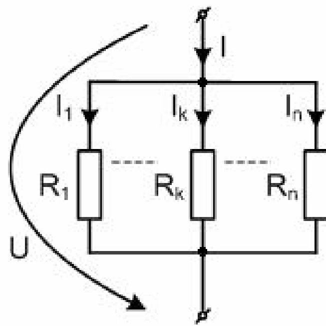


Fig. 2.17. Divizorul de curent.

Se cunosc valorile rezistențelor R_j, $j = \overline{1,n}$ şi valoarea curentului total I şi se cere curentul I_j.

Aplicând legea lui Ohm şi ținând seama de relațiile (2.54) pentru laturi pasive, se obține:

$$I_j = \frac{U}{R_j} = \frac{R_{ep} I}{R_j} = \frac{1}{R_j \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}} I. \qquad (2.72)$$

2.2.10. Teoremele generatoarelor echivalente

Teorema generatorului echivalent de tensiune (teorema lui Thévenin)

Orice dipol liniar activ (fig. 2.18,a) admite, în raport cu oricare două borne de acces A şi B, o schemă echivalentă serie (fig. 2.18,b), formată dintr-o sursă ideală independentă de tensiune cu t.e.m. E_e egală cu tensiunea la bornele circuitului în regim de mers în gol (fig. 2,19,a) şi o

rezistență R_e egală cu rezistența echivalentă a circuitului pasivizat în raport cu bornele de acces (fig. 2.19,b).

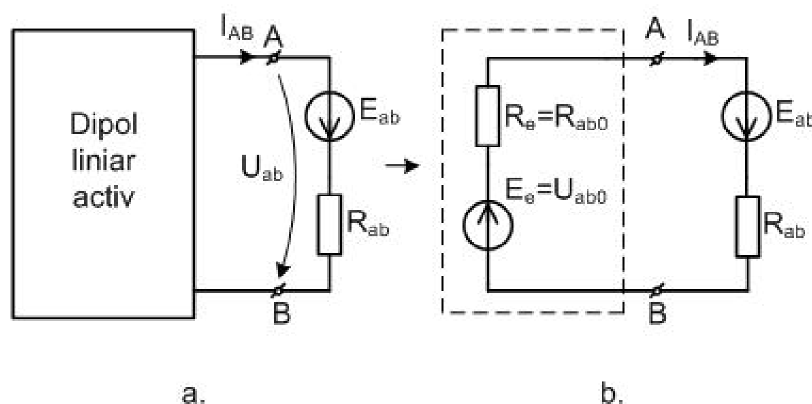


Fig. 2.18. Referitor la teorema generatorului echivalent de tensiune.

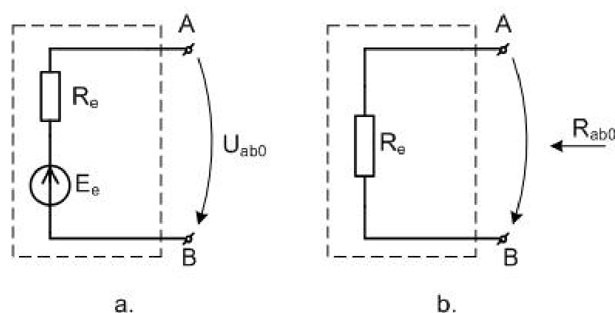


Fig. 2.19. Semnificația parametrilor din teorema lui Thévenin.

Schema echivalentă din figura 2.19,b, care poate fi obținută prin oricare din metodele de transfigurare a circuitelor electrice, permite calculul curentului din latura AB cu relația:

$$I_{AB} = \frac{U_{AB0} + E_{AB}}{R_{AB0} + R_{AB}}, \qquad (2.73)$$

obținută prin aplicarea teoremei a doua a lui Kirchhoff.

Teorema generatorului echivalent de curent (teorema lui Norton)

Orice dipol liniar activ (fig. 2.20,a) admite, în raport cu oricare două borne de acces A şi B, o schemă echivalentă derivație (fig. 2.20,b), formată dintr-o sursă ideală independentă de curent J_e, al cărei curent este egal cu intensitatea curentului debitat de circuit în regim de scurtcircuit la bornele A şi B (fig. 2.21), şi o conductanță G_e egală cu conductanța echivalentă a circuitului pasivizat în raport cu bornele de acces (egală cu inversul lui R_{AB0}).

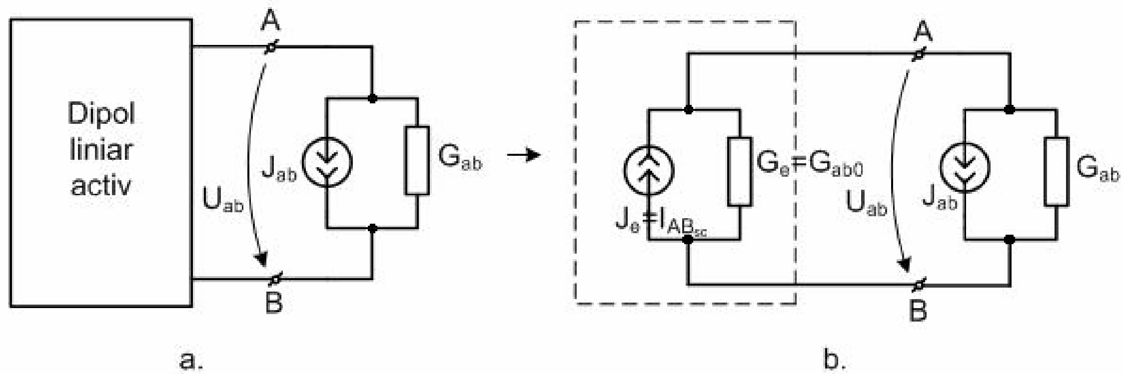


Fig. 2.20. Referitor la teorema generatorului echivalent de curent.

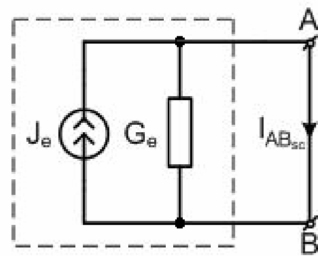


Fig. 2.21. Semnificația parametrilor din teorema lui Norton.

Schema echivalentă din figura 2.20,b, care poate fi obținută prin metode de transfigurare, permite calculul tensiunii la bornele laturii AB. Pentru aceasta se aplică prima teoremă a lui Kirchhoff şi se obține:

$$-J_e + G_e U_{AB} + J_{AB} + G_{AB} U_{AB} = 0, \quad (2.74)$$

din care rezultă:

$$U_{AB} = \frac{I_{ABsc} - J_{AB}}{G_{AB0} + G_{AB}}. \quad (2.75)$$

2.2.11. Teorema transferului maxim de putere

Fie un circuit dipolar liniar activ. Să se determine condițiile pe care trebuie să le satisfacă elementul de circuit care, conectat între bornele A şi B, să permită un transfer maxim de putere pe la aceste borne.

Se pot studia trei situații:

a) La bornele dipolului se conectează un rezistor de rezistență R_{AB} (fig. 2.22).

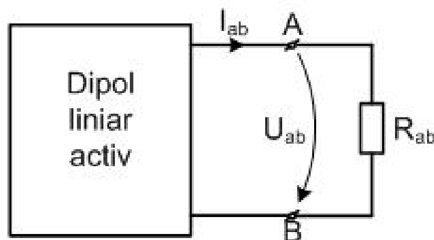


Fig. 2.22. Referitor la transferul maxim de putere.

Puterea debitată de dipol la bornele A,B, egală cu cea absorbită de rezistor, este:

$$P_c = U_{AB} I_{AB} = R_{AB} I_{AB}^2 = G_{AB} U_{AB}^2. \quad (2.76)$$

Reprezentând dipolul cu schema echivalentă serie (fig.2.18,b) se exprimă curentul cu relația

$$I_{AB} = \frac{U_{AB0}}{R_{AB0} + R_{AB}} \quad (2.77)$$

şi înlocuind în (2.76) se obține:

$$P_c = R_{AB} I_{AB}^2 = R_{AB} \frac{U_{AB0}^2}{(R_{AB0} + R_{AB})^2}. \quad (2.78)$$

Dacă se reprezintă dipolul cu schema echivalentă paralel (fig. 2.20,b) se exprimă tensiunea cu relația

$$U_{AB} = \frac{I_{ABsc}}{G_{AB0} + G_{AB}} \tag{2.79}$$

şi înlocuind în (2.79), se obține

$$P_c = G_{AB} U_{AB}^2 = G_{AB} \frac{I_{ABsc}^2}{(G_{AB0} + G_{AB})^2}. \tag{2.80}$$

Relațiile (2.78) şi (2.80) sunt echivalente. Din condiția de maxim a funcției $P_c(R_{AB})$, $(\mathrm{d}P_c(R_{AB}) / \mathrm{d}R_{AB}) = 0$, rezultă

$$R_{AB} = R_{AB0}, \tag{2.81}$$

reprezentând valoarea rezistenței rezistorului care, conectat între bornele A şi B, permite un transfer maxim de putere pe la aceste borne.

În cazul adoptării schemei echivalente serie, puterea totală debitată de sursă este

$$P_g = E_e I_{AB} = U_{AB0} \frac{U_{AB0}}{R_{AB0} + R_{AB}} = \frac{U_{AB0}^2}{R_{AB0} + R_{AB}}. \tag{2.82}$$

În figura 2.23,a sunt reprezentate funcțiile $P_c(R_{AB})$ şi $P_g(R_{AB})$, corespunzătoare relațiilor (2.78) şi, respectiv, (2.82).

Randamentul transferului de putere este

$$\eta = \frac{P_c}{P_g} = \frac{R_{AB}}{R_{AB0} + R_{AB}}, \tag{2.83}$$

cu valoarea $\eta = 0{,}5$ la transfer maxim de putere (fig. 2.24,a).

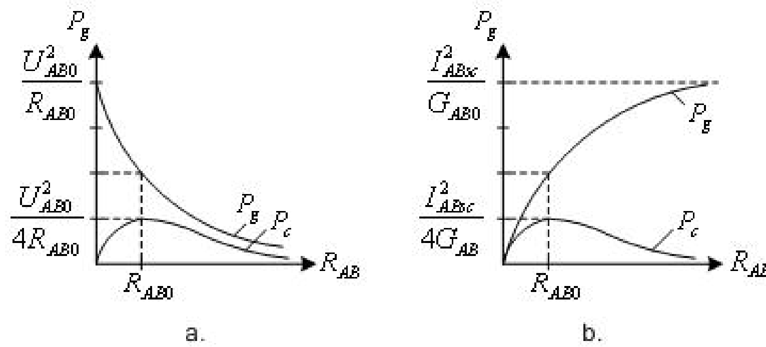


Fig. 2.23. Caracteristicile $P_c(R_{AB})$ şi $P_g(R_{AB})$.

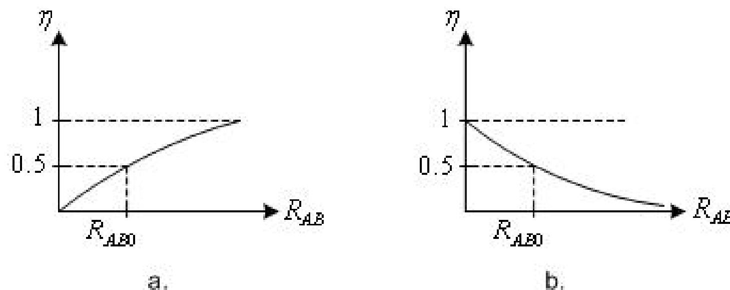


Fig. 2.24. Caracteristicile randamentului.

Calculând puterea totală generată de sursă în cazul schemei paralel se obține

$$P_g = U_{AB} J_e = \frac{I_{ABsc}}{G_{AB0} + G_{AB}} I_{ABsc} = \frac{I_{ABsc}^2}{G_{AB0} + G_{AB}}. \quad (2.84)$$

Reprezentând funcțiile $P_c(R_{AB})$ şi $P_g(R_{AB})$ corespunzătoare relațiilor (2.80) şi, respectiv, (2.84), se obțin caracteristicile din figura 2.23,b.

Randamentul transferului de putere este în acest caz

$$\eta = \frac{P_c}{P_g} = \frac{G_{AB}}{G_{AB0} + G_{AB}} = \frac{R_{AB0}}{R_{AB0} + R_{AB}}, \quad (2.85)$$

cu valoarea $\eta = 0,5$ la transfer maxim de putere (fig. 2.24,b).

b) La bornele dipolului se conectează o sursă ideală independentă de tensiune (fig.2.25,a).

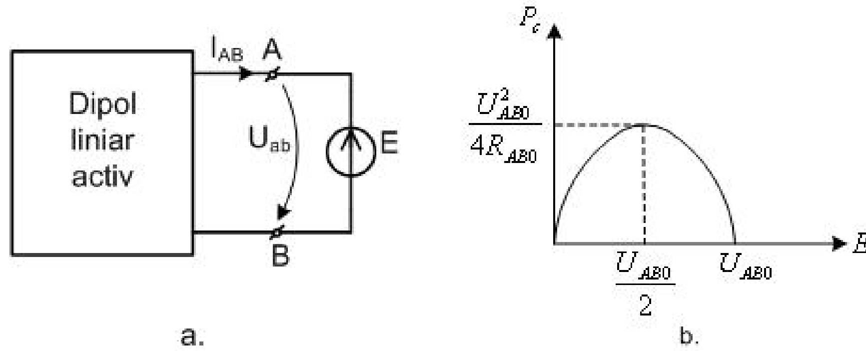


Fig. 2.25. Teorema transferului maxim de putere când la bornele A, B se conectează o sursă ideală independentă de tensiune.

Puterea debitată de dipol, egală cu cea absorbită de sursa E, este:

$$P_c = U_{AB} I_{AB} = E I_{AB}. \quad (2.86)$$

Luând în considerare schema echivalentă serie, se exprimă curentul cu relația

$$I_{AB} = \frac{U_{AB0} - E}{R_{AB0}} \quad (2.87)$$

şi, înlocuind în (2.87), se obține:

$$P_c = E I_{AB} = E \frac{U_{AB0} - E}{R_{AB0}}. \quad (2.88)$$

Aplicând condiția de maxim funcției $P_c(E)$, rezultă:

$$E = U_{AB0} / 2. \quad (2.89)$$

Deci, pentru ca pe la bornele A, B ale acestui circuit să aibe loc un transfer maxim de putere, este necesar ca sursa independentă de tensiune să aibe valoarea t.e.m. dată de relația (2.89) şi sensul din figură.

Reprezentarea funcției $P_c(E)$ este dată în figura 2.25,b.

c) La bornele dipolului se conectează o sursă ideală de curent (fig.2.26,a).

Puterea debidată de dipol, egală cu cea absorbită de sursa de curent, este:

$$P_c = U_{AB} I_{AB} = U_{AB} J \ . \qquad (2.90)$$

Considerând schema echivalentă paralel (fig. 2.22,b), exprimând tensiunea la borne cu relația

$$U_{AB} = \frac{I_{ABsc} - J}{G_{AB0}} \qquad (2.91)$$

şi înlocuind în (2.90), se obține:

$$P_c = U_{AB} J = J \frac{I_{ABsc} - J}{G_{AB0}}. \qquad (2.92)$$

Maximul funcției $P_c(J)$ se obține pentru

$$J = I_{ABsc} / 2. \qquad (2.93)$$

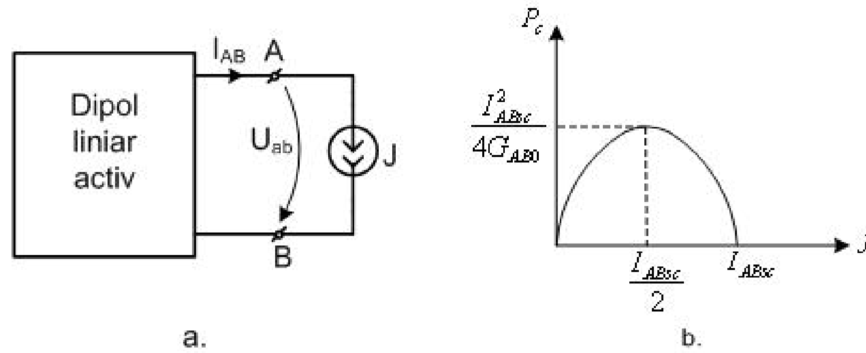


Fig. 2.26. Teorema transferului maxim de putere când la bornele A, B se conectează o sursă ideală independentă de curent.

Pentru a avea deci transfer maxim de putere pe la bornele circuitului din figura 2.26,a, este necesar ca sursa ideală independentă de curent să aibe valoarea curentului dată de relația (2.93) şi sensul din figură.

Variația funcției $P_c(J)$ este reprezentată în figura 2.26,b.

Puterea maximă transferată de dipol pe la borne poate fi exprimată cu una din expresiile:

$$P_{max} = \frac{U^2_{AB0}}{4R_{AB0}} = \frac{I^2_{ABsc}}{4G_{AB0}} = \frac{U_{AB0} I_{ABsc}}{4}, \qquad (2.94)$$

între mărimile din (2.95) existând relațiile

$$I_{ABsc} = \frac{U_{AB0}}{R_{AB0}} \qquad (2.95)$$

Şi

$$G_{AB0} = 1 / R_{AB0}. \qquad (2.96)$$

O sarcină care satisface condiția de transfer maxim de putere se numeşte *sarcină adaptată*.

Exemplul 2.3: Pentru circuitul din figura 2.27,a, în care se cunosc:

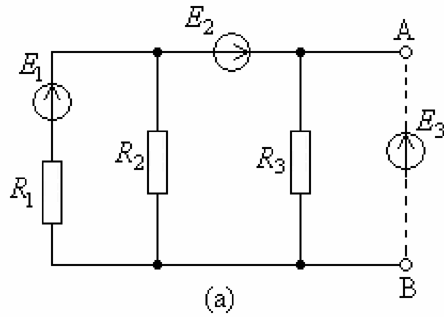


Fig. 2.27,a. Schema inițială a circuitului.

$R_1 = 3\Omega$, $R_2 = R_3 = 6\Omega$,

$E_1 = 36$ V, $E_2 = 16$ V,

se cer:

a) generatoarele echivalente Thévenin ți Norton la bornele A, B;

b) valoarea t.e.m. şi sensul unei surse de tensiune care, conectată între bornele A şi B, ar absorbi puterea maximă debitată de dipol.

a) Se transfigurează circuitul ca în figurile 2.27,b,c,d, în care:

$$E_{12} = \frac{E_1 G_1}{G_1 + G_2} = \frac{36 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{12}{\frac{3}{6}} = 24\,\text{V};$$

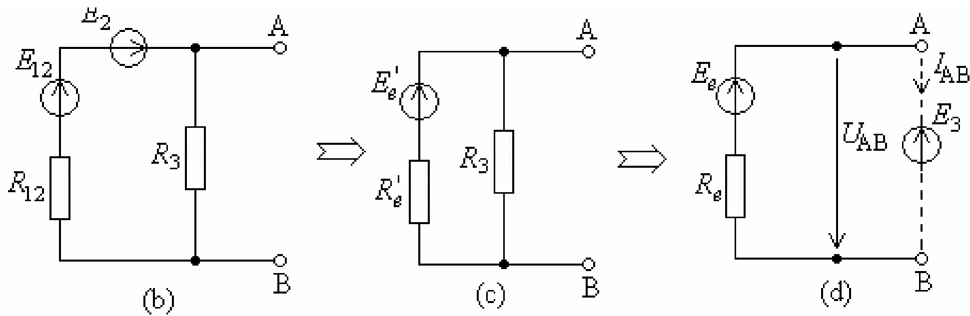


Fig. 2.27,b,c,d. Transfigurările succesive ale circuitului din figura 2.27,a.

$$R_{12} = \frac{1}{G_1 + G_2} = \frac{6}{3} = 2\Omega,$$

apoi:

$$E_e^{'} = E_{12} + E_2 = 24 + 16 = 40\,\text{V}; \;\; R_e^{'} = R_{12} = 2\Omega$$

şi în final:

$$E_e = U_{AB0} = \frac{G'_e E'_e}{G'_e + G_3} = \frac{40 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}} = \frac{20}{\frac{4}{6}} = 30\,\text{V},$$

respectiv

$$R_e = R_{AB0} = \frac{1}{G'_e + G_3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}\Omega.$$

Evident, parametrii circuitului echivalent Norton au valorile:

$$G_e = G_{AB0} = \frac{1}{R_{AB0}} = \frac{2}{3}\text{S}; \; J_e = I_{ABsc} = \frac{U_{AB0}}{R_{AB0}} = 20\text{A}.$$

b) Puterea debitată de dipol se exprimă cu relația:

$$P_g = U_{AB} I_{AB} = E_3 \frac{E_e - E_3}{R_e}.$$

Condiția de transfer maxim de putere la bornele A,B, $\frac{dP}{dE_3} = 0$, conduce la relația E_e - $2E_3$= 0, de unde se obține valoarea t.e.m. a sursei de tensiune care satisface această condiție:

$$E_3 = \frac{E_e}{2} = \frac{U_{AB0}}{2} = 15\text{V}.$$

Sensul sursei este cel din figură.

2.2.12. Relații între mărimile unui dipol

Fie dipolul activ reprezentat în figura 2.28. Ne interesează relația existentă între mărimile caracteristice ale unei laturi interioare şi cele de la bornele A,B.

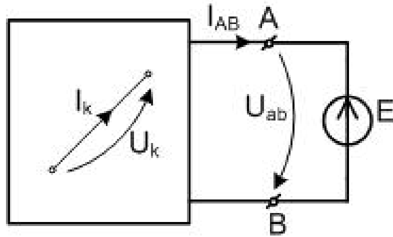


Fig. 2.28. Schema dipolului activ.

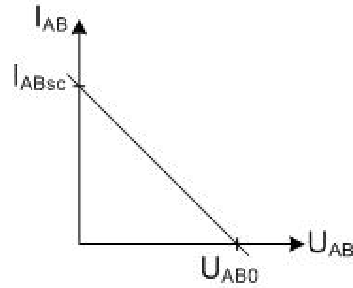


Fig. 2.29. Caracteristica dipolului activ.

Aplicând *teorema superpoziției*, curentul laturii interioare k se poate exprima ca suma dintre două componente: una produsă de sursele interne când sursa conectată la borne este pasivizată, şi alta produsă de sursa externă când sursele interne sunt pasivizate:

$$I_k = I_k^{E_i} + I_k^{E}. \quad (2.97)$$

Notând prima componentă cu I_{ksc}, aceasta având semnificația curentului laturii când bornele dipolului sunt scurtcircuitate, şi exprimând-o pe a doua în funcție de conductanța de transfer G_{ke} şi sursa de la borne, se obține

$$I_k = I_{ksc} + (-G_{ke} U_{AB}). \quad (2.98)$$

Pentru regimul de funcționare cu bornele A,B în gol, caracterizat prin valorile I_{AB} = 0 şi $U_{AB} = U_{AB0}$, ecuația (2.98) devine

$$I_{kg} = I_{ksc} + (-G_{ke} U_{AB0}). \quad (2.99)$$

Multiplicând ecuațiile (2.98) cu U_{AB0} şi, respectiv, (2.99) cu ($-U_{AB}$) şi apoi adunându-le, se obține

$$U_{AB0} I_k - U_{AB} I_{kg} = (U_{AB0} - U_{AB}) I_{ksc}. \quad (2.100)$$

de unde se exprimă curentul laturii *k*:

$$I_k = \left(1 - \frac{U_{AB}}{U_{AB0}}\right) I_{ksc} + \frac{U_{AB}}{U_{AB0}} I_{kg}. \tag{2.101}$$

Caracteristica dipolului la borne este reprezentată în figura 2.29 şi se exprimă cu relaţia

$$\frac{U_{AB}}{U_{AB0}} + \frac{I_{AB}}{I_{ABsc}} = 1, \tag{2.102}$$

în funcţie de care se prelucrează ecuaţia (2.101) la forma

$$I_k = \frac{I_{AB}}{I_{ABsc}} I_{ksc} + \frac{U_{AB}}{U_{AB0}} I_{kg}. \tag{2.103}$$

Similar se obţine

$$U_k = \frac{I_{AB}}{I_{ABsc}} U_{ksc} + \frac{U_{AB}}{U_{AB0}} U_{kg}. \tag{2.104}$$

2.3. ANALIZA CIRCUITELOR DE C. C. LINIARE - METODE ŞI ALGORITMI DE CALCUL

2.3.1. Metoda teoremelor lui Kirchhoff

Pentru un circuit de c.c. liniar conex (între oricare două noduri există cel puţin o cale) cu *l* laturi, conţinând rezistoare şi surse independente de tensiune şi *n* noduri, aplicarea celor două teoreme ale lui Kirchhoff conduce la obţinerea unui sistem complet de *l* ecuaţii, din care *n*−1 ecuaţii de tipul (2.4) şi *l*–*n*+1 ecuaţii de tipul (2.6), în *l* necunoscute curenţi de laturi.

Dacă circuitul conţine şi surse de tensiune comandate, relaţia (2.6) devine

$$\sum_{l_k \in (b_h)} (A) R_k I_k = \sum_{l_k \in (b_h)} (A) E_k + \sum_{l_k \in (b_h)} (A) E_{ck}, \quad h = \overline{1,b}, \quad b = l - n + 1, \tag{2.106}$$

iar t.e.m. ale surselor comandate (E_{ck}) se exprimă prin ecuaţiile de comandă prelucrate în funcţie de necunoscutele curenţi de laturi. În cazul circuitelor care conţin şi surse de curent independente şi/sau comandate, numărul de necunoscute curenţi de laturi este $l–l_J$. Acestea se obţin prin rezolvarea unui sistem de ecuaţii obţinut prin aplicarea primei teoreme a lui Kirchhoff în *n*−1noduri independente şi a celei de-a doua ecuaţii într-un *număr de bucle independente redus* la $b_r= l–n+1– (l_J+l_{Jc})$, unde l_J reprezintă numărul de laturi cu surse de curent independente, iar l_{Jc} reprezintă numărul de laturi cu surse de curent comandate. Acestui sistem i se adaugă ecuaţiile de comandă ale surselor comandate prelucrate în funcţie de necunoscutele curenţi de laturi.

Observaţii

1. Pentru a se obţine numărul de bucle b_r, deci pentru a se obţine un număr redus de ecuaţii ale sistemului, este necesară o alegere corespunzătoare a buclelor independente, astfel încât nici una din ele să nu treacă prin laturi cu surse independente şi/sau comandate de curent. În caz contrar, numărul de necunoscute ale sistemului va fi $l + l_{Jc}$, din care $l - l_J$ vor fi necunoscute curenţi de laturi, iar restul de $l_J + l_{Jc}$ vor fi necunoscutele tensiuni la bornele surselor independente şi/sau comandate de curent, ecuaţia generală, corespunzătoare celei de-a doua teoreme a lui Kirchhoff fiind exprimată cu relaţia (2.106):

$$\sum_{l_k \in (b_h)} (A) R_k I_k + \sum_{l_k \in (b_h)} (A) U_{J_k} + \sum_{l_k \in (b_h)} (A) U_{J_{ck}} = \sum_{l_k \in (b_h)} (A) E_k + \sum_{l_k \in (b_h)} (A) E_{ck}, \quad h = \overline{1,b}. \tag{2.106}$$

2. Este evident că alegerea unui număr redus de bucle b_r prezintă avantajul obținerii unui sistem redus de ecuații, deci a reducerii efortului de calcul; pe de altă parte relația (2.106) permite scrierea sistematică a sistemului de ecuații;

3. Odată calculați curenții din laturi, tensiunile la bornele laturilor se pot determina în modul următor:

- pentru laturile fără surse de curent se aplică ecuația caracteristică (2.2) sau teorema a doua a lui Kirchhoff;
- pentru laturile formate din surse independente sau comandate de curent, numai cu ajutorul teoremei a doua a lui Kirchhoff;

4. Dacă circuitul conține şi surse de curent, atunci ecuația (2.7) devine:

$$\sum_{l_k \in (n_j)} (A) G_k U_k = J_{n_j}, \qquad (2.107)$$

unde

$$J_{n_j} = -\sum_{l_k \in (n_j)} (A) I_{sc}^{E_k} - \sum_{l_k \in (n_j)} (A) I_{sc}^{J_k} = -\sum_{l_k \in (n_j)} (A) G_k E_k - \sum_{l_k \in (n_j)} (A) J_k \qquad (2.108)$$

este curentul de scurtcircuit injectat în nodul n_j.

Algoritmul de aplicare al metodei teoremelor lui Kirchhoff

Pasul 1. Se determină numărul nodurilor şi al laturilor circuitului;

Pasul 2. Se aleg sensuri de referință şi se ataşează simboluri pentru intensitățile curenților din laturi;

Pasul 3. Se calculează numărul redus de bucle ale circuitului şi se aleg aceste bucle stabilindu-se un sens de parcurgere pentru fiecare;

Pasul 4. Se scriu ecuațiile corespunzătoare primei teoreme a lui Kirchhoff în (n–1) noduri independente şi ecuațiile corespunzătoare celei de-a doua teoreme pe cele $b_r = l - n + 1 - (l_J + l_{Jc})$ bucle independente;

Pasul 5. Se rezolvă sistemul de ecuații obținut prin completarea celui de la pasul 4 cu ecuațiile de comandă ale surselor de curent şi de tensiune comandate, prelucrate în funcție de curenții laturilor, determinându-se intensitățile curenților din laturi;

Pasul 6. Se validează rezultatul cu ajutorul bilanțului puterilor.

Analiza asistată de calculator a circuitelor electrice necesită **formularea matriceală a ecuațiilor circuitului**. Pentru ***circuite reciproce***, luând în considerare structura laturii standard prezentată în figura 2.30, formularea matriceală a teoremelor lui Kirchhoff şi a ecuațiilor caracteristice (constitutive) ale laturilor conduce la ecuațiile

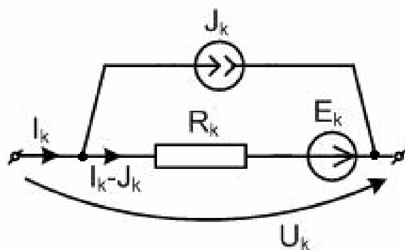


Fig. 2.30. Structura standard a laturii de circuit.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_l = \boldsymbol{0} \qquad (2.109)$$

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_l = \boldsymbol{0} \qquad (2.210)$$

$$\boldsymbol{U}_l = \boldsymbol{R}_l(\boldsymbol{I}_l - \boldsymbol{J}_l) - \boldsymbol{E}_l \qquad (2.111$$

Cele 2l ecuații (2.109), (2.110) şi (2.111) determină în mod univoc curenții şi tensiunile laturilor circuitului, dacă se dau valorile rezistențelor laturilor, ale t.e.m. ale surselor de tensiune şi ale intensităților curenților surselor de curent.

Înlocuind relația (2.111) în (2.110) şi cuplând apoi cu (2.109) se obține *forma matriceală a ecuațiilor circuitului în curenții laturilor:*

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{BR}_l \end{bmatrix} \boldsymbol{I}_l = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{BE}_l + \boldsymbol{BR}_l \boldsymbol{J}_l \end{bmatrix}, \tag{2.112}$$

unde $\boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{B}$) este matricea $(n\text{-}1)\times l$ $(b\times l)$ de incidență redusă laturi - noduri (laturi - bucle), $\boldsymbol{I}_l$ ($\boldsymbol{U}_l$) este vectorul $(l\times 1)$ al curenților (tensiunilor) laturilor circuitului, $\boldsymbol{R}_l$ este matricea diagonală $(l\times l)$ a rezistențelor laturilor circuitului, iar $\boldsymbol{E}_l$ ($\boldsymbol{J}_l$) este vectorul $(l\times 1)$ al t.e.m. (curenților) surselor independente de tensiune (curent).

Sistemul de ecuații (2.112) se rezolvă în raport cu vectorul curenților laturilor $\boldsymbol{I}_l$, apoi cu ecuațiile (1.111) se determină tensiunile la bornele laturilor.

2.3.2. Metoda curenților de buclă

Pentru circuitele de mari dimensiuni, sistemul de ecuații obținut prin aplicarea teoremelor lui Kirchhoff, fie în varianta hibridă cu l necunoscute, fie în varianta cu număr redus la $l\text{–}l_J$ necunoscute, poate fi de dimensiuni prea mari. Apare deci necesitatea utilizării unor metode alternative de analiză a circuitelor electrice, care să reducă numărul ecuațiilor ce descriu funcționarea circuitului, respectiv numărul variabilelor independente.

Una din aceste metode este metoda curenților de buclă, care asociază circuitului un nou set de necunoscute - curenții de bucle $\boldsymbol{I}_b$, în număr de $l\text{–}n\text{+}1$, introduse astfel încât să verifice prima teoremă a lui Kirchhoff. Prin urmare, curenții laturilor se exprimă ca sumă algebrică a curenților de buclă ce trec prin latura respectivă (fig. 2.31):

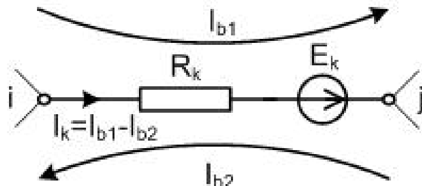


Fig. 2.31. Exprimarea curenților laturilor în funcție de curenții de buclă.

$$I_k = \sum_{b_g \in (l_k)} (A) I_{bg}. \tag{2.113}$$

Noile necunoscute se determină cu ajutorul teoremei a doua a lui Kirchhoff sub forma obținută prin prelucrarea relației (2.6), în funcție de (2.113). Se obține *forma compactă a ecuațiilor circuitului în necunoscute curenți de bucle*:

$$\sum_{g=1}^{b} (A) R_{hg} I_{bg} = E_{bh}, \qquad b = l - n + 1, \text{ şi } \quad h = \overline{1, b}, \tag{2.114}$$

unde:

- $R_{hh} = \sum_{l_k \in b_h} R_k$ reprezintă rezistența proprie a buclei h, egală cu suma rezistențelor R_k ale laturilor ce compun bucla, $R_{hh} > 0$;
- $R_{hg} = \sum_{l_k \in (b_h \cap b_g)} R_k$ reprezintă rezistența mutuală dintre bucla h (în care se scrie teorema a doua a lui Kirchhoff) şi bucla g, egală cu suma algebrică a rezistențelor laturilor comune celor două bucle; ea este pozitivă sau negativă, după cum sensurile celor două bucle coincid sau nu prin laturile comune;

- $E_{bh} = \sum_{l_k \in b_h} (A) E_k$ reprezintă t.e.m. a buclei b_h, egală cu suma algebrică a t.e.m. ale surselor independente şi/sau comandate de tensiune din laturile buclei (E_k are semnul (+) dacă sensul ei coincide cu cel al buclei b_h).

Dacă în circuit există surse de tensiune şi/sau de curent comandate, sistemul de ecuații (2.114) se completează cu ecuațiile de comandă exprimate în funcție de necunoscutele metodei, I_{bg}.

Numărul de variabile independente introdus de metoda curenților de buclă este $b = l - n + 1$. Pentru circuitele fără surse de curent aceste necunoscute se determină prin rezolvarea sistemului (2.114).

În cazul când circuitul conține surse de curent independente şi/sau comandate, unor variabile li se pot atribui valorile curenților acestor surse. Pentru aceasta, asocierea variabilelor I_b cu cele $l - n + 1$ bucle independente ale circuitului se face astfel încât prin fiecare latură cu sursă de curent J sau J_c să treacă un singur curent de buclă şi numai unul. Conform relației (2.113) acest curent de buclă va avea valoarea curentului sursei:

$$I_{bk} = J_k, \quad k = \overline{1, l_J} \quad \text{şi/sau} \quad I_{bj} = J_{cj}, \quad j = \overline{1, l_{Jc}} \quad . \qquad (2.115)$$

Pentru restul variabilelor, în număr de $l - n + 1 - (l_J + l_{Jc})$, se aplică relația (1.114) *într-un număr redus de bucle*, deci $h = \overline{1, b_r}$. Sistemului obținut din ecuațiile (2.114) şi (2.115) i se adaugă ecuațiile de comandă ale surselor comandate, exprimate în funcție de necunoscutele metodei, I_{bg}.

Observație

Pentru circuitele care conțin surse de curent independente J şi/sau comandate J_c, metoda curenților de buclă permite o reducere a numărului de ecuații ale sistemului (2.114) cu numărul total al acestor surse de curent, în condițiile alegerii corespunzătoare a buclelor.

Algoritmul de aplicare al metodei curenților de buclă

Pasul 1. Se determină numărul de noduri, numărul de laturi şi numărul surselor de curent ;

Pasul 2. Se determină numărul variabilelor independente introduse de metodă: $l - n + 1$;

Pasul 3. Se aleg $(l_J + l_{Jc})$ bucle care să conțină câte o singură sursă de curent independentă sau comandată şi li se ataşează câte un curent de buclă al cărui sens va fi acelaşi cu al sursei de curent; curenții acestor bucle vor fi exprimați cu relațiile (2.115);

Pasul 4. Pentru restul de bucle independente, în număr redus la $b_r = l - n + 1 - (l_J + l_{Jc})$, se atribuie tot atâtea variabile curenți de buclă cu sensuri oarecare, fiecare reprezentând şi sensul de parcurgere al buclei respective;

Pasul 5. Se aplică teorema a doua a lui Kirchhoff în aceste bucle, ținând seama că în membrul stâng al ecuației (2.114) pot apare căderi de tensiune determinate de variabile exprimate cu relațiile (2.115);

Pasul 6. Se ataşează sistemului obținut cu ecuațiile (2.114) şi (2.115) ecuațiile de comandă ale surselor comandate, exprimate în funcție de variabilele metodei;

Pasul 7. Se rezolvă sistemul astfel obținut în variabile curenți de buclă;

Pasul 8. Se determină curenții laturilor cu ecuația (2.113);

Pasul 9. Tensiunile la bornele laturilor se determină în modul descris în § 2.3.1.

Pasul 10. Se verifică bilanțul puterilor.

Formularea matriceală a metodei curenților de buclă în cazul ***circuitelor reciproce*** depinde de tipul adoptat pentru latura standard.

Notând cu $\boldsymbol{I}_b$ vectorul (b×1) al curenţilor de buclă asociaţi celor b bucle independente, $b = l–n+1$, curenţii laturilor circuitului se pot exprima în funcţie de curenţii de bucle cu relaţia

$$\boldsymbol{I}_l = \boldsymbol{B}^{\mathrm{t}} \boldsymbol{I}_b . \tag{2.116}$$

Pentru latura reprezentată în figura 2.30, înlocuind relaţia (2.116) în (2.111) şi relaţia astfel obţinută în (2.110), se obţine *ecuaţia matriceală a curenţilor de buclă* sub forma

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}_l \boldsymbol{B}^{\mathrm{t}} \boldsymbol{I}_b = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}_l + \boldsymbol{R}_l \boldsymbol{J}_l), \tag{2.117}$$

sau

$$\boldsymbol{R}_b \boldsymbol{I}_b = \boldsymbol{E}_b , \tag{2.118}$$

cu

$$\boldsymbol{R}_b = \boldsymbol{B}\boldsymbol{R}_l \boldsymbol{B}^{\mathrm{t}} \tag{2.119}$$

şi

$$\boldsymbol{E}_b = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}_l + \boldsymbol{R}_l \boldsymbol{J}_l), \tag{2.120}$$

unde matricea $\boldsymbol{R}_b$ de dimensiune (b×b) este matricea rezistenţelor proprii ale buclelor, iar $\boldsymbol{E}_b$ de dimensiune (b×1), este vectorul t.e.m. ale buclelor.

Rezolvând ecuaţia (2.118) se obţine vectorul necunoscutelor curenţi de bucle, cu ajutorul cărora, aplicând relaţia (2.116), se determină curenţii din laturile circuitului.

În cazul când circuitul conţine şi laturi tip l_J, se poate reduce sistemul (2.118) la un număr de ecuaţii corespunzător unui număr redus de bucle $b_r = l–n+1–l_J$.

Pentru aceasta, toate sursele de curent din graful circuitului vor fi introduse în coarbore. Cum sistemul buclelor fundamentale (în număr de $l–n+1$) se formează cu laturi ale arborelui şi cu câte o coardă, fiecare curent de buclă va fi asociat unei coarde având acelaşi sens cu sensul ei de orientare. O parte din aceste coarde sunt laturile tip l_J, iar restul, laturi tip l_R. Se asigură astfel condiţia ca fiecare buclă să conţină cel mult o sursă de curent.

Exemplul 2.4: Pentru circuitul din figura 2.32,a se dau următoarele valori pentru parametri:

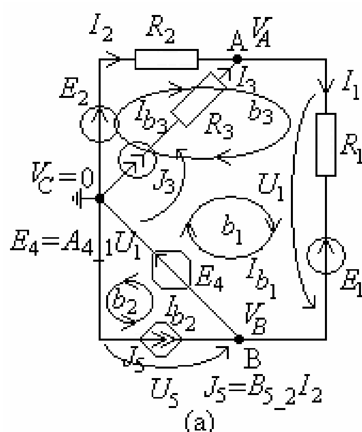


Fig. 2.32,a. Schema iniţială a circuitului.

$R_1 = 12\Omega$, $R_2 = 3\Omega$, $R_3 = 4\Omega$,

$E_1 = 12$ V, $E_2 = 6$ V, $J_3 = 3$ A,

$E_4 = A_{4_1}U_1$, $A_{4_1} = 0{,}5$,

$J_5 = B_{5_2}I_2$, $B_{5_2} = 2$.

Se cere:

a) Să se scrie literal ecuaţiile obţinute prin metodele:
1) Kirchhoff în curenţi;
2) Kirchhoff în tensiuni;
3) Curenţi de buclă;

b) Să se determine valorile curenţilor din laturi şi ale tensiunilor la bornele acestora;

c) Să se verifice bilanțul puterilor;

d) Valoarea factorului de transfer în tensiune A_{1_2};

e) Generatoarele echivalente de tensiune şi de curent la bornele A, B.

a1) Necunoscutele problemei sunt curenții I_1, I_2 I_4 şi J_5 şi tensiunile U_{J3}, E_4 şi U_5. Aplicarea teoremelor lui Kirchhoff conduce la următoarele ecuații:

$$(A):\ I_1 - I_2 = J_3;\ \ (B):\ -I_1 + I_4 - J_5 = 0;\ (b_3):\ R_1I_1 + R_2I_2 = -E_1 + E_2 + E_4 .$$

şi ecuațiile corespunzătoare relațiilor de definiție ale surselor comandate:

$$E_4 = A_{4_1}U_1 = A_{4_1}\,(R_1I_1+E_1)\ ; \quad J_5 = B_{5_2}I_2.$$

a2) Deoarece $U_4 = -E_4 = -A_{4_1}U_1$, rămân numai două necunoscute tensiuni la borne: U_1 şi U_2 ($U_3 = U_2$ iar $U_5 = -U_4$). Pentru calculul acestora se aplică prima teoremă a lui Kirchhoff în nodul (A) şi teorema a doua în bucla (b_3)

$$(A):\ G_1U_1 - G_2U_2 = G_1E_1 + G_2U_2 + J_3; \quad (b_3):\ U_1 + U_2 + U_4 = 0$$

cu

$$U_4 = -E_4 = -A_{4_1}U_1; \quad J_5 = J_5 = B_{5_2}I_2. = B_{5_2}G_2(U_2+E_2).$$

După calculul tensiunilor se determină curenții laturilor cu relațiile:

$$I_1 = G_1(U_1 - E_1)\ ; \quad I_2 = G_2(U_2+E_2); \quad I_3 = J_3; \quad I_4 = I_1+J_5; \quad J_5 = 2I_2.$$

a3) Pentru aplicarea metodei curenților de buclă se selectează buclele ca în figura 2.32,b. Se obțin ecuațiile:

$$(b_1):\quad I_{b_1} = J_3$$

$$(b_2):\quad I_{b_2} = J_5$$

$$(b_3):\quad (R_1 + R_2)I_{b_3} - R_2I_{b_1} = -E_1 + E_2 + E_4$$

iar

$$E_4 = A_{41}U_1 = A_{41}(R_1I_1 + E_1) = A_{41}(R_1I_{b_3} + E_1)$$

$$J_5 = B_{52}I_2 = B_{52}(I_{b_3} - I_{b_1}).$$

Curenții laturilor se determină apoi cu relațiile:

$$I_1 = I_{b_3};\ \ I_2 = I_{b_3} - I_{b_1};\ \ I_3 = J_3;\ \ I_4 = I_{b_2} + I_{b_3};\ \ I_5 = J_5 = B_{52}(I_{b_3} - I_{b_1}).$$

b) Înlocuind, în ecuațiile de mai sus, valorile numerice ale parametrilor rezultă:

$$I_{b1} = 3\text{A};\ I_{b2} = -3\text{A};\ I_{b3} = -2\text{A};\ \Rightarrow\ I_1 = 1\text{A};\ I_2 = -2\text{A};\ .I_3 = 3\text{A};\ I_4 = -3\text{A};\ I_5 = -4\text{A};$$

$$U_1 = 24\text{V}; \quad U_2 = -12\text{V}; \quad U_3 = -12\text{V}; \quad U_4 = -12\text{V}; \quad U_5 = 12\text{V}.$$

c) Se calculează puterile generate:

$$P_G = -E_1I_1 + E_2I_2 + E_4I_4 - U_{J3}J_3 - U_5J_5 = -12 - 12 - 36 + 72 + 48 = 60\text{W}$$

unde

$$U_{J3} = -R_3J_3 - U_1 - U_4 = -12-24+12 = -24\text{V}$$

şi puterile consumate:

$$P_c = P_R = R_1I_1^2 + R_2I_2^2 + R_3I_3^2 = 12 + 12 + 36 = 60\text{ W}.$$

d) Factorul de transfer (amplificare) în tensiune $A_{1_2} = \left.\dfrac{U_1}{E_2}\right|_{E_1=0; J_3=0}$ se calculează cu ajutorul schemei din figura 2.32,b:

$I_{b_1} = J_5$

$I_1 = I_2 = I_{b_2} = \dfrac{E_2 + E_4}{R_1 + R_2}$, unde

$E_4 = A_{1_2}U_1 = A_{4_1}R_1I_1 = 6I_1$.

Rezult`ă astfel $I_1 = 2/3$ A.

Deci $U_1 = R_1I_1 = 8$ V şi $A_{1_2} = 4/3$.

Fig. 2.32,b. Circuit folosit pentru calculul factorului A_{1_2}.

e) Pentru determinarea generatoarelor echivalente se folosesc schemele din figurile 2.32,c şi d.

Fig. 2.32,c. Circuit pentru determinarea generatorului echivalent de tensiune.

Fig. 2.32,d. Circuit pentru determinarea generatorului echivalent de curent.

Se obține $U_{AB0} = E_4 + R_2J_3 + E_2$, unde $E_4 = U_{AB0} / 2$.

Deci: $U_{AB0} = 30$ V.

Din a doua schemă (fig. 2.32,d) se obține:

$$I_{ABsc} = E_2 / R_2 + J_3 = 5 \text{ A}.$$

Atunci:

$$R_{AB0} = U_{AB0} / I_{ABsc} = 6\Omega \quad \text{şi} \quad G_{AB0} = 1 / R_{AB0} = 1 / 6 \text{ S}.$$

2.3.3. Metoda potențialelor nodurilor

Această metodă asociază circuitului setul de necunoscute potențiale ale nodurilor, $V_{n\text{-}1}$, în număr de $n-1$, introduse astfel încât să satisfacă a doua teoremă a lui Kirchhoff. Prin urmare, tensiunile laturilor se exprimă ca sumă algebrică a potențialelor adiacente laturii respective (fig. 2.33) :

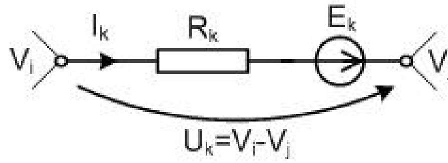


Fig. 2.33. Referitor la metoda potențialelor nodurilor.

$$U_k = \sum_{n_j \in (l_k)} (A)\, V_j \ . \qquad (2.121)$$

Unul din cele n noduri ale circuitului este ales ca nod de referință, având potențialul nul.

Noile necunoscute se determină cu ajutorul primei teoreme a lui Kirchhoff sub forma obținută prin substituirea relației (2.121) în (2.7), reprezentând *forma compactă a ecuațiilor circuitului în variabile potențiale la noduri*:

$$\sum_{j=1}^{n-1} G_{ij} V_j = J_{ni}\ , \quad i = \overline{1, n-1}, \qquad (2.122)$$

unde:

- $G_{ii} = \sum_{l_k \in n_i} G_k$ reprezintă conductanța proprie a nodului n_i (în care se scrie prima teoremă a lui Kirchhoff), egală cu suma conductanțelor laturilor incidente în acest nod, $G_{ii}> 0$;
- $G_{ij} = -\sum_{l_k \in (n_i \cap n_j)} G_k$ reprezintă conductanța mutuală dintre nodurile n_i și n_j, egală cu suma cu semn schimbat a conductanțelor laturilor conectate în paralel între cele două noduri,$G_{ij}< 0$;
- $J_{ni} = -\sum_{l_k \in n_i} (A) J_{sck}$ reprezintă curentul de scurtcircuit injectat în nodul n_i, egal cu suma algebrică a curenților de scurtcircuit ai surselor din laturile incidente în acest nod: pentru sursele de tensiune $J_{sck} = E_k G_k$, iar pentru sursele de curent $J_{sck} = J_k$. În suma algebrică se iau cu semnul (+) curenții J_{sck} ai surselor ce "ies" din nod și cu (–) ai celor ce "intră".

Dacă circuitul conține surse de tensiune și/sau de curent comandate, sistemul de ecuații (2.122) se completează cu ecuațiile de comandă exprimate în funcție de necunoscutele metodei, V_j.

Numărul de variabile independente introdus de această metodă este $n-1$.

Pentru circuitele fără surse ideale de tensiune independente sau comandate E^i, respectiv E_c^i, necunoscutele potențiale la noduri se determină rezolvând sistemul (2.122) format din $n-1$ ecuații independente.

În cazul circuitelor care conțin surse ideale de tensiune, potențialele nodurilor i și j la care este conectată o astfel de latură (fig.2.34,a și 2.34,b), se exprimă cu relația (2.123), respectiv (2.124) – *laturi necompatibile cu metoda nodală*.

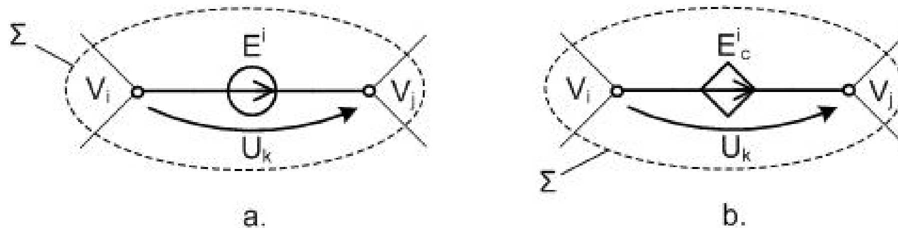


Fig. 2.34. Laturi necompatibile cu metoda nodală clasică.

$$U_k = V_i - V_j = -E^i \tag{2.123}$$

$$U_k = V_i - V_j = -E_c^i, \tag{2.124}$$

de unde:

$$V_j = E^i + V_i \tag{2.125}$$

$$V_j = E_c^i + V_i. \tag{2.126}$$

Rezultă deci că pentru $(l_{E^i} + l_{E_c^i})$ necunoscute se pot formula ecuații de tipul

$$V_{j(k)} = E_k^i + V_{i(k)},\ \ k = \overline{1, l_{E^i}}\ ; \quad V_{j(p)} = E_{cp}^i + V_{i(p)}\ ,\ \ p = \overline{1, l_{E_c^i}}. \tag{2.127}$$

Pentru restul necunoscutelor ar trebui să se aplice ecuațiile (2.122) într-un *număr redus de noduri*, $n_r = n - 1 - (l_{E^i} + l_{E_c^i})$, deci $i = \overline{1, n_r}$.

Observații

1. Ecuația (2.122) *nu se poate aplica într-un nod în care este incidentă o latură cu sursă ideală de tensiune*, deoarece curentul de scurtcircuit al acestei surse este infinit (rezistența ei internă este zero). În acest caz se poate recurge la următoarea tehnică: se alege o suprafață închisă Σ, care să cuprindă în interior latura *ij* ce conține sursa ideală de tensiune, sau, dacă este cazul, toate laturile conectate în paralel între nodurile *i* şi *j*, pe care se scrie apoi prima teoremă a lui Kirchhoff. Se aplică apoi sistemul (2.122) în $n_r = n - 1 - (l_{E^i} + l_{E_c^i})$ noduri şi suprafețe Σ, adică pentru $i = \overline{1, n_r}$.

2. Rezultă că pentru circuitele care conțin surse ideale de tensiune independente şi/sau comandate, (E^i şi/sau E_c^i), metoda potențialelor nodurilor permite o reducere a numărului de ecuații de forma (2.122) cu numărul total al acestor surse de tensiune.

Algoritmul de aplicare al metodei potențialelor nodurilor

Pasul 1. Se determină numărul de noduri ale circuitului;

Pasul 2. Se alege un nod *j* de referință al cărui potențial se consideră nul, $V_j = 0$;

Pasul 3. Se scriu $(l_{E^i} + l_{E_c^i})$ ecuații de tipul (2.127) pentru potențialele nodurilor adiacente surselor ideale de tensiune;

Pasul 4. Se aplică relațiile (2.122) în $n_r = n - 1 - (l_{E^i} + l_{E_c^i})$ noduri şi suprafețe Σ, adică pentru $i = \overline{1, n_r}$, ținând seama de faptul că în termenii din partea stângă ai relațiilor pot interveni şi potențiale pentru care s-au scris ecuațiile de la pasul 3;

Pasul 5. Sistemului obținut cu relațiile (2.122) şi (2.127) i se adaugă ecuațiile de comandă ale surselor comandate, exprimate în funcție de variabilele metodei;

Pasul 6. Se rezolvă sistemul de la pasul 5 şi se obțin valorile celor $n-1$ variabile potențiale ale nodurilor;

Pasul 7. Cu relația (2.121) se calculează apoi tensiunile la bornele laturilor circuitului;

Pasul 8. Se determină curenții din laturile circuitului cu ecuația caracteristică a laturii pentru laturile care conțin rezistențe şi eventual surse de tensiune înseriate cu acestea, sau cu prima teoremă a lui Kirchhoff pentru cele formate din surse ideale de tensiune;

Pasul 9. Se verifică bilanțul puterilor.

O altă variantă de aplicare a metodei constă în introducerea ca necunoscute în sistemul de ecuații a curenților prin laturile cu surse ideale de tensiune. Deşi are un număr mai mare de

ecuații, această metodă cu necunoscute hibride, numită **metoda nodală modificată**, permite scrierea sistematică a sistemului de ecuații.

Pentru formularea matriceală a metodei potențialelor nodurilor în cazul ***circuitelor reciproce***, se adoptă latura standard din figura 2.30. Din cele n noduri ale circuitului se alege un nod de referință, cu potențial zero, iar celorlalte $n-1$ noduri li se atribuie potențialele necunoscute V_1, V_2, ...,V_{n-1}.

Tensiunile laturilor se pot exprima în funcție de potențialele nodurilor cu relația

$$\boldsymbol{U}_l = \boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{V}_{n-1}\,. \qquad (2.128)$$

Considerând ecuația caracteristică a laturii

$$\boldsymbol{I}_l = \boldsymbol{G}_l(\boldsymbol{U}_l + \boldsymbol{E}_l) + \boldsymbol{J}_l\,, \qquad (2.129)$$

unde $\boldsymbol{G}_l = \boldsymbol{R}_l^{-1}$ reprezintă matricea pătrată ($l \times l$) a conductanțelor laturilor (se presupune R_l nesingulară), substituind relația (2.128) în (2.129) şi ecuația astfel obținută în (2.109), se obține *forma matriceală a ecuațiilor circuitului în potențialele nodurilor*:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}_l\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{V}_{n-1} = -\boldsymbol{A}(\boldsymbol{G}_l\boldsymbol{E}_l + \boldsymbol{J}_l). \qquad (2.130)$$

Ecuația (2.130) se poate pune sub forma

$$\boldsymbol{G}_{n-1}\boldsymbol{V}_{n-1} = \boldsymbol{J}_{n-1}\,, \qquad (2.131)$$

unde

$$\boldsymbol{G}_{n-1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}_l\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}} \qquad (2.132)$$

este matricea admitanțelor nodale, de ordin $(n-1)\times(n-1)$ şi

$$\boldsymbol{J}_{n-1} = -\boldsymbol{A}(\boldsymbol{G}_l\boldsymbol{E}_l + \boldsymbol{J}_l)$$

(2.1343
)

este vectorul curenților injectați în noduri de sursele din laturile incidente în aceste noduri.

Relația (2.131) permite scrierea simplă pe calculator a ecuațiilor circuitului [1, 14].

Rezolvând sistemul (2.131) se obține vectorul potențialelor necunoscute ale celor $n-1$ noduri, apoi cu relația (2.128) se calculează vectorul tensiunilor la bornele laturilor $\boldsymbol{U}_l$. Cu relația (2.129) se obține în cele din urmă vectorul curenților laturilor.

Sub forma prezentată mai sus, metoda nu permite rezolvarea matriceală a circuitelor cu laturi alcătuite din surse ideale independente de tensiune, pentru care $R_l = 0$, deci produsul G_lE_l, reprezentând curentul de scurtcircuit al sursei, este infinit. Limitele metodei sunt depăşite în această situație de *metoda nodală modificată*.

Exemplu 2 5: Să se rezolve circuitul reprezentat în figura 2.32, a cu metoda potențialelor la noduri. Deoarece latura de comandă a sursei de curent J_5 nu este pusă explicit în evidență, circuitul din figura 2.32,a conține numai o latură necompatibilă cu metoda nodală clasică, latura l_4.

Se alege nodul C ca nod de referină V_C = 0V şi ecuația nodală corespunzătoare nodului n_A, în care nu este conectată nici o latură necompatibilă cu metoda nodală clasică, este:

$$(n_{\mathrm{A}}):\quad (G_1 + G_2)V_{\mathrm{A}} - G_1V_{\mathrm{B}} = G_1E_1 + G_2E_2 + J_3,$$

la care se adaugă ecuația caracteristică a laturii l_4:

$$(l_4):\qquad V_A = -E_4 = -A_{4_1}U_1 = -A_{4_1}(V_A - V_B) = A_{4_1}(V_B - V_A)$$

Rezolvând numeric cele două ecuații se obține:

$$V_A = 12\,\text{V și } V_B = -12\,\text{V}.$$

După calculul potențialelor, se determină tensiunile la bornele laturilor:

$$U_1 = V_A - V_B = 12 - (-12) = 24\,\text{V};\ U_2 = -V_A = -12\text{V};\ U_3 = U_2 = -V_A - 12;$$

$$U_4 = V_B = -12\text{V};\ U_5 = -U_4 = -V_B = 12\text{V},$$

și curenții laturilor se calculează cu relațiile de la punctul a2) din exemplul 2.4.

2.3.4. Metoda nodală modificată

Spre deosebire de metoda nodală clasică, care operează cu variabilele independente potențialele celor n–1 noduri independente ale circuitului, metoda nodală modificată (MNM) are ca variabile independente pe lângă aceste potențiale, toți curenții elementelor de circuit (laturilor) necompatibile cu metoda nodală clasică.

Elementele de circuit pentru care curentul nu se poate exprima, cu ecuația caracteristică a elementului de circuit respectiv, în funcție de parametrii elementului de circuit și potențialele nodurilor se numesc *elemente necompatibile cu metoda nodală*

Fie un circuit electric liniar de c.c. care conține: rezistoare, surse independente și/sau comandate de tensiune, surse independente și/sau comandate de curent și scurtcircuite (de exemplu, bobine ideale liniare). Vectorul necunoscutelor conține vectorul potențialelor electrice corespunzătoare celor n – 1 noduri independente ale circuitului analizat, $\boldsymbol{V}_{n-1}$ și vectorul curenților elementelor de circuit (laturilor) necompatibile cu metoda nodală clasică, $\boldsymbol{I}_m$. Dacă fiecare latură a circuitului analizat se consideră formată dintr-un singur element dipolar de circuit sau dintr-o poartă (latură) de comandă sau comandată a unei surse comandate, atunci vectorul curenților $\boldsymbol{I}_m$ are structura:

$$\boldsymbol{I}_m = \left[(\boldsymbol{I}_E)^{\text{t}}, (\boldsymbol{I}_{E_c})^{\text{t}}, (\boldsymbol{I}_{E_C})^{\text{t}}, (\boldsymbol{I}_{J_C})^{\text{t}}, (\boldsymbol{I}_L)^{\text{t}} \right]^{\text{t}}, \tag{2.134}$$

unde: $\boldsymbol{I}_E$ – este vectorul curenților surselor ideale independente de tensiune: $\boldsymbol{I}_{E_c}$ – reprezintă vectorul curenților laturilor (porților) comandate ale surselor de tensiune comandate (în curent sau în tensiune); $\boldsymbol{I}_{E_C}$ – este vectorul curenților laturilor (porților) de comandă ale surselor de tensiune comandate în curent; $\boldsymbol{I}_{J_C}$ – reprezintă vectorul curenților laturilor (porților) de comandă ale surselor de curent comandate în curent și $\boldsymbol{I}_L$ – este vectorul curenților bobinelor liniare ideale (scurtcircuitele).

Ecuațiile matriceale în operațional ale circuitului, corespunzătoare MNM au forma:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_{n-1,n-1} & \boldsymbol{B}_{n-1,m} \\ \boldsymbol{A}_{m,n-1} & \boldsymbol{R}_{m,m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_{n-1} \\ \boldsymbol{I}_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{sc,n-1} \\ \boldsymbol{E}_m \end{bmatrix}, \tag{2.135}$$

unde: $\boldsymbol{G}_{n-1,n-1}(s)$ – este matricea conductanțelor nodale ale circuitului care are dimensiunea (n-1) × (n-1); $\boldsymbol{B}_{n-1,m}$ – o matrice de dimensiunea (n-1)× m care conține ca elemente numerele -1, 0, 1 și coeficienții de transfer (amplificare) în curent ai surselor de curent comandate în curent; $\boldsymbol{A}_{m,n-1}$ – o matrice de dimensiunea m × (n–1) care conține ca elemente numerele –1, 0, 1 și coeficienții de transfer (amplificare) în tensiune ai surselor de tensiune comandate în

tensiune (dacă circuitul analizat este reciproc $\boldsymbol{A}_{m,n-1} = \left(\boldsymbol{B}_{n-1,m}\right)^{t}$); $\boldsymbol{R}_{m,m}(s)$ – este o matrice pătratică de ordinul m care conține transrezistențele surselor de tensiune comandate în curent; $\boldsymbol{I}_{sc,n-1}$ – vectorul curenților de scurtcircuit injectați în cele $n-1$ noduri independente ale circuitului şi $\boldsymbol{E}_{m,m}$ reprezintă vectorul cu semn schimbat ale t.e.m. ale surselor independente de tensiune.

Ecuațiile nodale modificate (2.135) se obțin simplu prin aplicarea primei teoreme a lui Kirchhoff în cele n - 1 noduri independente ale circuitului (în care curenții laturilor compatibile cu metoda nodală clasică se exprimă în funcție de parametrii laturilor şi potențiale nodurilor) şi scrierea ecuațiilor caracteristice (de latură) a celor m laturi necompatibile cu metoda nodală clasică.

În cele ce urmează se vor prezenta contribuțiile câtorva elemente de circuit la matricea şi termenul liber din ecuaşiile nodale modificate (2.135).

2.3.4.1. Contribuțiile elementelor de circuit liniare la matricea şi termenul liber din ecuațiile nodale modificate

Notând cu V_+ şi V_- potențialele electrice ale nodului din care pleacă, respectiv în care intră sensul curentului, contribuția principalelor elemente de circuit la matricea şi termenul liber ale ecuațiilor nodale modificate este:

Sursa ideală independentă de tensiune E_k:

$$\left(l_k\right): \quad V_{k+} - V_{k-} = -E_k .$$

	V_{k+}	V_{k-}	I_k	$T.l.$
V_{k+}			$+1$	
V_{k-}			-1	
I_k	$+1$	-1		$-E_k$

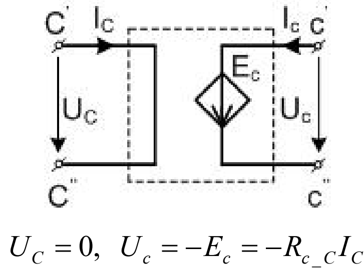
Sursa ideală independentă de curent J_k:

$$\left(n_{k+}\right): \quad ...+J_k+...=0; \quad \left(n_{k-}\right): \quad ...-J_k+...=0.$$

	V_{k+}	V_{k-}	$T.l.$
V_{k+}			$-J_k$
V_{k-}			J_k

Sursa ideală de tensiune comandată în curent $\hat{E}_c\left(I_C\right)$ (fig. 2.35):

$$\left(l_C\right): \quad V_{C+} - V_{C-} = 0; \quad \left(l_c\right): \quad V_{c+} - V_{c-} + R_{c_C} I_C = 0.$$



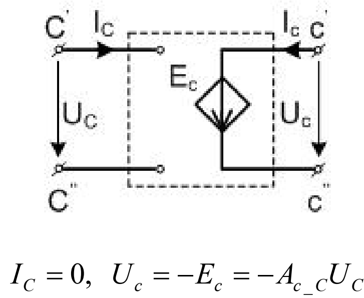
$U_C = 0,\ \ U_c = -E_c = -R_{c_C} I_C$

	V_{C+}	V_{C-}	V_{c+}	V_{c-}	I_C	I_c	$T.l.$
V_{C+}					$+1$		
V_{C-}					-1		
V_{c+}						$+1$	
V_{c-}						-1	
I_C	$+1$	-1					
I_c			$+1$	-1	R_{c_C}		

Fig. 2.35. Sursă de tensiune comandată în curent.

Sursa ideală de tensiune comandată în tensiune $\hat{E}_c(U_C)$ (fig. 2.36):

$$(l_c):\quad V_{c+} - V_{c-} + A_{c_C}(V_{C+} - V_{C-}) = 0.$$



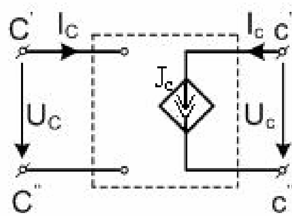
$I_C = 0,\ \ U_c = -E_c = -A_{c_C} U_C$

	V_{C+}	V_{C-}	V_{c+}	V_{c-}	I_c	$T.l.$
V_{C+}						
V_{C-}						
V_{c+}					$+1$	
V_{c-}					-1	
I_c	A_{cC}	$-A_{cC}$	$+1$	-1		

Fig. 2.36. Sursă de tensiune comandată în tensiune.

Sursă ideală de curent comandată în tensiune $\hat{J}_c(U_C)$ (fig. 2.37):

$$(n_{c+}):\quad ...G_{c_C}(V_{C+} - V_{C-}) + ... = 0; \qquad (n_{c-}):\quad ... - G_{c_C}(V_{C+} - V_{C-}) + ... = 0\,.$$



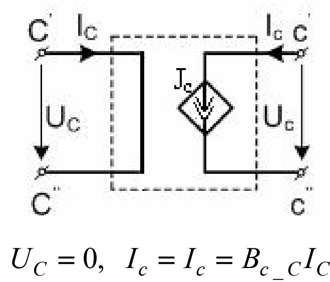
$I_C = 0,\ \ J_c = I_c = G_{c_C} U_C$

	V_{C+}	V_{C-}	V_{c+}	V_{c-}	$T.l.$
V_{C+}					
V_{C-}					
V_{c+}	$G_{c_C}(s)$	$-G_{c_C}(s)$			
V_{c-}	$-G_{c_C}(s)$	$G_{c_C}(s)$			

Fig. 2.37. Sursă de curent comandată în tensiune.

Sursa ideală de curent comandată în curent $\hat{J}_c(I_C)$ (fig. 2.38):

$$(l_C):\quad V_{C+} - V_{C-} = 0; \quad (n_{c+}):\quad ... - B_{c_C} I_C + ... = 0; \quad (n_{c-}):\quad ... - B_{c_C} I_C + ... = 0\,.$$



$U_C = 0,\quad I_c = I_c = B_{c_C} I_C$

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
 & V_{C+} & V_{C-} & V_{c+} & V_{c-} & I_C & T.l. \\
\hline
V_{C+} & & & & & +1 & \\
V_{C-} & & & & & -1 & \\
V_{c+} & & & & & B_{c_C} & \\
V_{c-} & & & & & -B_{c_C} & \\
I_C & +1 & -1 & & & &
\end{array}
$$

Fig. 2.38. Sursă de curent comandată în curent.

Rezistorul liniar ideal $R_k = 1/G_k$:

$$(l_k):\quad I_k = G_k\left(V_{k+} - V_{k-}\right).$$

$$
\begin{array}{c|cc|c}
 & V_{k+} & V_{k-} & T.l. \\
\hline
V_{k+} & G_k & -G_k & \\
V_{k-} & -G_k & G_k &
\end{array}
$$

Bobina liniară ideală L_k (în c.c. un scurtcircuit):

$$(l_k):\quad V_{k+} - V_k = 0\,.$$

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & V_{k+} & V_{k-} & I_k & T.l. \\
\hline
V_{k+} & & & +1 & \\
V_{k-} & & & -1 & \\
I_k & +1 & -1 & &
\end{array}
$$

Exemplul 2.5: Fie circuitul reprezentat în figura 2.39, pentru care se cunosc: $R_1 = R_3 = R_6 = 2$ kΩ, $E_1 = 60$ V, $E_3 = 20$ V, $J_4 = 20$ mA, $E_2 = A_{2_5}U_5 = -1\cdot U_5$ şi $J_5 = B_{5_7}I_7 = -2\cdot I_7$.

Se cere:

a) Folosind metoda nodală modificată să se determine valorile tensiunile şi curenţii laturilor,

b) Să se verifice bilanţul puterilor.

Vectorul variabilelor independente corespunzătoare MNM are structura:

$$\boldsymbol{X} = \left[V_1, V_2, V_3, I_2, I_7\right]^{\mathrm{t}}.$$

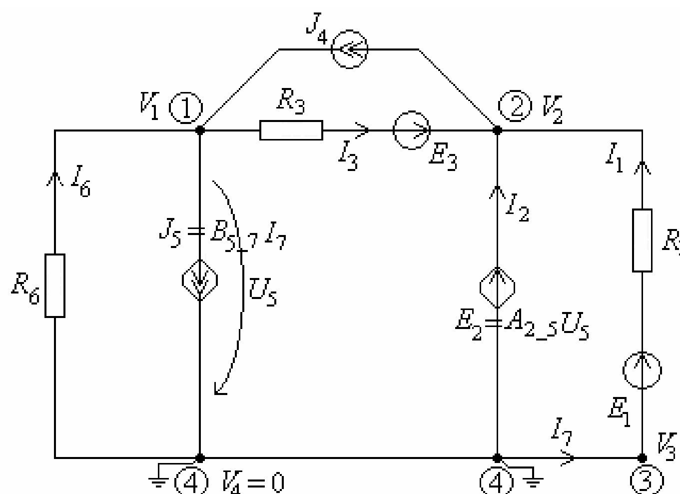


Fig. 2.39. Schema circuitului.

Ecuațiile nodale modificate au forma:

$$(n_1):\quad (G_3 + G_6)V_1 - G_3V_1 + B_{5_7}I_7 = -G_3E_3 + J_4$$

$$(n_2):\quad -G_3V_1 + (G_1 + G_3)V_2 - I_2 = G_1E_1 + G_3E_3 - J_4$$

$$(n_3):\quad -G_1V_2 + G_1V_3 - I_7 = -G_1E_1$$

$$(l_2):\quad -V_2 + A_{2_5}V_1 = 0$$

$$(l_7):\quad -V_3 = 0\,.$$

Substituind valorile numerice ale parametrilor şi rezolvând sistemul de ecuații algebrice astfel obținut rezultă:

$$V_1 = 140\text{ V},\ V_2 = -140\text{ V},\ V_3 = V_4 = 0\text{ V},\ I_2 = -230\text{ mA şi } I_7 = 100\text{ mA}\,.$$

Valorile numerice ale curenților şi tensiunilor laturilor sunt:

$$I_1 = \frac{(V_3 - V_2) + E_1}{R_1} = 100\text{ mA},\ I_2 = -230\text{ mA},\ I_3 = \frac{(V_1 - V_2) + E_1}{R_1} = 150\text{ mA}, J_5 = -200\text{ mA},$$

$$I_7 = -70\text{ mA},\ I_6 = \frac{V_1}{R_6} = -70\text{ mA},\ U_1 = U_2 = V_3 - V_2 = 140\text{V},\ U_3 = -U_4 = V_1 - V_2 = 280\text{V},$$

$$U_5 = -U_6 = U_5 = V_1 = 140\text{V},\ E_2 = V_2 = -140\text{V}.$$

b)
$$P_G = E_1I_1 + E_2I_2 + E_3I_3 - U_4J_4 - U_5J_5 = 60 \cdot 100 + \\ + (-140)\cdot(-230) - (-280)\cdot 20 - 140 \cdot (-200) = 74.8\text{W},$$

$$P_R = R_1I_1^2 + R_3I_3^2 + R_8I_8^2 = 2.100^2 + 2.150^2 + 2.(-70)^2 = 74.8\text{W}\,.$$

Deci: $P_G = P_R = 74.8\text{W}$.

BIBLIOGRAFIE

1. **L.O. Chua, P.M. Lin,** "Computer-aided analysis of electronic circuits", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

2. **L.O. Chua, C.A. Desoer, E.S. Kuh**, "Linear and nonlinear circuits", McGraw-Hill Book Company, New York, 1987.

3**. A.F. Schwarz**, "Computer-aided design of microelectronic circuits and systems. Fundamentals, Methods and Tools", Academic Press, New York, 1987.

4. **C.I. Mocanu,** "Teoria circuitelor electrice", Editură Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.

5. **M. Preda, P. Cristea,** "Bazele electrotehnicii", vol. II. Circuite electrice, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980.

6**. M. Hasler, J. Neirynck,** "Circuits nonlinéaires", Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, 1985.

7. **N. Balabanian**, T. Bickart, S. Seshu, "Teoria modernă a circuitelor", Editura Tehnică, Bucureşti, 1974.

8. W. J. McCalla, "Fundamentals of Computer-Aided Circuit Simulation", Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordecht/Lancaster, 1988.

9. **S. Franco**, "Electric Circuits Fundamentals", Saunders College Publishing, New York, 1995.

10**. A. Timotin**, Viorica Hortopan, A. Ifrim, M. Preda, "Lecții de Bazele Electrotehnicii", Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1970.

11**. A. Moraru**, "Bazele electrotehnicii", vol. II. Teoria circuitelor, Tipografia Universității Politehnica Bucureşti, 1993.

12. **D. Topan**, "Circuits électriques", Editura Universitaria, Craiova, 1996.

13. **M. Iordache, M. Perpelea**, "Analiza asistata de calculator a circuitelor electrice si electronice neliniare complexe de mari dimensiuni", Editura Didactica si Pedagogica, Bucureşti, 1995.

14. **Lucia Dumitriu, M., Iordache**, "Teoria modernă a circuitelor electrice - Vol. I - Fundamentare teoretică, Aplicații, Algoritmi şi Programe de calcul", Editura All Educational S.A., Bucureşti 1998.

15. **M. Iordache, Lucia Dumitriu**, "Teoria modernă a circuitelor electrice - Vol. II - Fundamentare teoretică, Aplicații, Algoritmi şi Programe de calcul", Editura All Educational S.A., Bucureşti 2000.

16. **M. Iordache, Lucia Dumitriu,** "Simularea asistată de calculator a circuitelor analogice", Editura POLITEHNICA Press, Bucureşti 2002 (450).

17. **M. Iordache**, **L. Mandache,** "Analiza asistată de calculator a circuitelor analogice neliniare", Editura POLITEHNICA Press, Bucureşti 2004.

18. **Lucia Dumitriu, M. Iordache**, "Simularea numerică a circuitelor analogice cu programul PSPICE", Editura MATRIX ROM, Bucureşti, 2006.

19. **M. Iordache, L. Mandache, M. Perpelea**, "Analyse numérique circuits analogiques non linéaires", Groupe Genoyer, Marseille, 2006.

20. P. Tuinega, SPICE: A Guide to Circuit Simulation and Analysis Using PSPICE, Prentice-Hall, N.Y., 1988.

21. **T. Marian**, *SPICE*, Editura Teora, Bucureşti, 1996.

22. **M. Badea**, *Analiza asistată de calculator a circuitelor electrice*, Editura InfoMed, Craiova, 1997.

CAPITOLUL 3

CIRCUITE ELECTRICE ÎN REGIM SINUSOIDAL (CURENT ALTERNATIV – C.A.)

3.1. CONCEPTUL DE CIRCUIT ELECTRIC ÎN REGIM SINUSOIDAL

În regim dinamic circuitele electrice liniare sunt descrise de ecuaţii integro-diferenţiale. Tensiunile şi curenţii laturilor, potenţialele nodurilor, tensiunile electromotoare şi curenţii surselor independente sunt, în general, funcţii de timp de o clasă largă. Dificultăţile de rezolvare a ecuaţiilor integro-diferenţiale cresc odată cu ordinul sistemului şi depind de modul de variaţie în timp al mărimilor de excitaţie. Soluţiile ecuaţiilor circuitelor electrice în regim dinamic conţin două componente: una datorată mărimilor de excitaţie (componenta permanentă sau forţată) şi cealaltă datorată stării iniţiale (componenta tranzitorie sau liberă). După trecerea unui interval de timp componentele libere se pot neglija şi se stabileşte **regimul permanent**.

Dacă tensiunile şi curenţii nu variază în timp, regimul permanent este **staţionar** (numit şi de curent continuu, şi studiat în capitolul 2), iar dacă mărimile sunt variabile în timp regimul permanent este **variabil**. Pentru numeroase aplicaţii tehnice prezintă importanţă regimul **periodic**, în care tensiunile şi curenţii prin elementele de circuit variază periodic în raport cu timpul. În intervalul de timp de trecere de la un regim permanent la alt regim permanent, tensiunile şi curenţii laturilor circuitului conţin şi componente libere. În ansamblu acest regim de funcţionare al circuitului se numeşte **tranzitoriu**.

O metodă eficientă de analiză a circuitelor electrice liniare în domeniul timp, având avantajul unei tratări uniforme a problemelor în orice regim, - permanent sau tranzitoriu, şi totodată simplificând soluţionarea ecuaţiilor circuitului, - este metoda **reprezentării simbolice** a funcţiilor de timp ale mărimilor de excitaţie şi a răspunsurilor circuitului.

Reprezentarea simbolică constă în stabilirea unui **operator** L care asociază funcţiei de timp $f(t)$ denumită **funcţie original**, o **funcţie simbol** sau **imagine** $\mathsf{L}\{f(t)\}$. Reprezentarea trebuie să fie biunivocă: fiecărei funcţii original $f(t)$ îi corespunde numai o funcţie imagine $\mathsf{L}\{f(t)\}$ şi unei imagini $\mathsf{L}\{f(t)\}$ îi corespunde o funcţie original $\mathsf{L}^{-1}\{\mathsf{L}\{f(t)\}\} = f(t)$. Reprezentarea simbolică trebuie să satisfacă şi condiţia ca relaţiilor şi operaţiilor cu funcţii original să le corespundă relaţii şi operaţii simple cu funcţii imagine. Selectând o reprezentare simbolică care transformă ecuaţiile integro-diferenţiale cu funcţii original în ecuaţii algebrice cu funcţii imagine, se obţine în primul rând o simplificare a calculului: soluţionând ecuaţiile algebrice cu imagini se obţin **răspunsurile imagini** şi cu regula de trecere de la imagini la funcţiile original rezultă **răspunsurile original**. În al doilea rând, din similitudinea dintre ecuaţiile algebrice cu funcţii original ale circuitelor rezistive şi ecuaţiile algebrice cu imagini ale circuitelor care conţin şi elemente de circuit reactive, se obţine o imagine de ansamblu a proprietăţilor circuitului, independent de natura rezistivă sau reactivă a elementelor de circuit. Metodele de rezolvare a ecuaţiilor circuitelor electrice folosind reprezentări simbolice cu ajutorul operatorilor se numesc **metode operaţionale**.

O clasă simplă de funcţii de timp de mare importanţă în studiul regimurilor circuitelor electrice o constituie funcţiile sinus şi cosinus, denumite generic **funcţii sinusoidale** (**armonice**). Dacă mărimile de excitaţie (t.e.m. şi curenţii surselor independente de tensiune şi, respectiv, de curent şi tensiunile de la bornele reţelelor de alimentare) variază sinusoidal în timp, atunci curenţii şi tensiunile laturilor circuitului liniar sunt de aceeaşi formă şi frecvenţă.

Regimul permanent sinusoidal reprezintă o importanţă deosebită, teoretică şi practică şi intervine atât în producerea, transmisia şi utilizarea energiei electrice, cât şi în telecomunicaţii, semnalizări şi automatizări. Semnalele purtătoare de informaţii sunt

suprapuneri de semnale sinusoidale, iar transmisia la distanță a energiei electromagnetice se face pe linii parcurse de curenți alternativi (variind periodic cu valori medii nule).

În acest capitol se prezintă **regimul sinusoidal** denumit şi **regim permanent armonic** al circuitelor electrice liniare, care se mai numesc şi **circuite electrice de curent alternativ** (**c.a.**).

3.2. MĂRIMI SINUSOIDALE

O funcție $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ este periodică dacă există $T \in \mathbf{A}$ astfel încât

$$f(t) = f(t+T) \text{pentru} \ \forall \ t \in \mathbf{A} \tag{3.1}$$

Cea mai mică valoarea a lui T pentru care este valabilă relația (3.1) se numeşte **perioadă principală**. Altfel spus, perioada principală a unei funcții de timp este intervalul minim după care funcția îşi repetă valorile în acelaşi sens de variație (fig. 3.1, a şi b).

O mărime periodică y este complet caracterizată atunci când se cunoaşte variația sa în timp pe durata unei perioade. Acest lucru se poate realiza fie prin expresia analitică a funcției $y(t)$, fie prin reprezentarea ei grafică, fie prin tabelarea numerică. Cele mai importante valori caracteristice ale unei mărimi periodice sunt:

- **valoarea de vârf** (**amplitudinea**) $\hat{Y} = Y_{\max}$, care este valoarea maximă pe care o poate lua mărimea periodică în decursul unei perioade (fig. 3.1, a şi b);
- **valoarea medie** Y_{med}, este media pe o perioadă a valorilor instantanee

$$Y_{med} = \langle y \rangle \overset{\mathrm{d}}{=} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} y(t) dt, \tag{3.2}$$

momentul t_0 putând fi oarecare. O mărime periodică de valoare medie nulă se numeşte **mărime alternativă**;

- **valoarea efectivă** sau **eficace** (notată cu litera mare a simbolului convenit pentru mărimea respectivă Y), care este rădăcina pătrată a valorii medii pe o perioadă a pătratului funcției

$$Y = \sqrt{\langle y^2 \rangle} \overset{\mathrm{d}}{=} \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_o+T} y^2(t) dt} \ . \tag{3.3}$$

În cazul în care mărimea y este un curent sinusoidal, valoarea sa efectivă poate fi interpretată ca fiind valoarea curentului continuu care produce acelaşi efect Joule-Lentz pe un număr întreg de perioade.

Din clasa funcțiilor periodice alternative, în ingineria electrică un interes deosebit îl reprezintă funcțiile (mărimile) sinusoidale.

Prin definiție, o mărime sinusoidală este mărimea a cărei variație în timp are expresia:

$$y(t) = Y_{\max} \sin(\omega t + \alpha_y) \tag{3.4}$$

unde Y_{max}, valoare întotdeauna pozitivă, reprezintă **amplitudinea** mărimii y, ω- este **pulsația** (sau **frecvența unghiulară**), iar (ωt + α_y) şi, respectiv, α_y - reprezintă **faza** (**unghiul de fază)** la un moment oarecare t, respectiv **faza inițială** (la t = 0) a mărimii (fig. 3.2). Între pulsația, frecvența şi perioada mărimii există relația:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}. \tag{3.5}$$

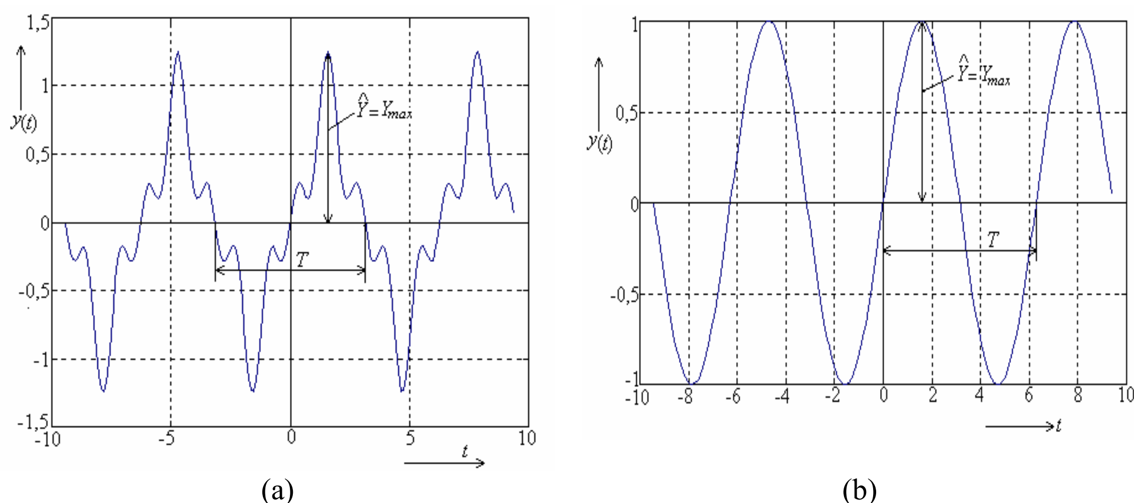


Fig. 3.1. Reprezentarea funcțiior periodice: a) Funcție periodică oarecare; b) Funcție sinusoidală

Figure 1

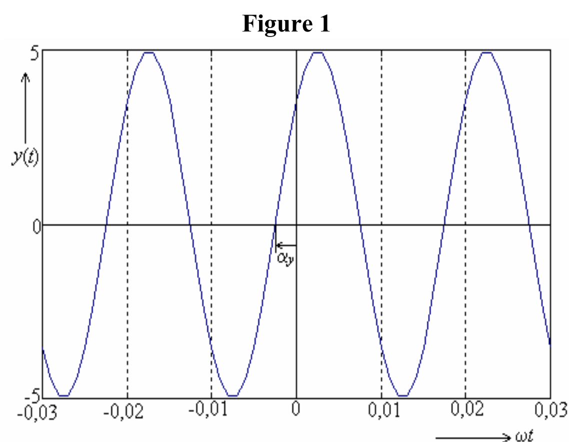


Fig. 3.2. Definirea fazei inițiale α_y.

Se observă că la schimbarea originii timpului, $t' = t - t_0$, nu se modifică nici valoarea, nici faza instantanee a mărimii:

$$y(t') = Y_{\max} \sin[\omega t' + (\omega t_0 + \alpha_y)], \qquad (3.6)$$

ci numai faza sa inițială, care devine $\alpha'_y = \alpha_y + \omega t_0$. Aceasta arată că alegerea originii timpului nu reprezintă nici o importanță practică pentru analiza fenomenelor din sistem (în ipoteza că toate mărimile care descriu aceste fenomene sunt variabile în timp sinusoidal, cu aceeaşi pulsație ω), ceea ce contează fiind diferențele de fază dintre aceste mărimi.

Pentru mărimile variabile în timp sinusoidal avem

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} Y_{\max}^2 \sin^2(\omega t + \alpha_y) dt} = \frac{Y_{\max}}{\sqrt{2}}. \qquad (3.7)$$

De regulă, în ingineria electrică mărimile variabile în timp sinusoidal se scriu sub forma:

$$y = \sqrt{2} Y \sin(\omega t + \alpha_y). \qquad (3.8)$$

Dacă se consideră două mărimi sinusoidale de aceeaşi pulsație

$$y_1 = \sqrt{2} Y_1 \sin(\omega t + \alpha_{y_1}) \text{ şi } y_2 = \sqrt{2} Y_2 \sin(\omega t + \alpha_{y_2}) \qquad (3.9)$$

se defineşte **defazajul** mărimii y_2 **în urma** mărimii y_1 ca diferența fazelor celor două mărimi într-o ordine dată

$$\varphi_{12} \overset{d}{=} (\omega t + \alpha_{y_1}) - (\omega t + \alpha_{y_2}) = \alpha_{y_1} - \alpha_{y_2}, \qquad (3.10)$$

egal cu diferența fazelor inițiale ale mărimilor, în aceeaşi ordine, fiind astfel independent de timp. Dacă $\varphi_{12} > 0$, y_1 este defazată **înaintea** lui y_2, iar dacă $\varphi_{12} < 0$, mărimea y_1 este

defazată **în urma** mărimii y_2 . Mărimile (y_1, y_2) sunt **în fază** când $\varphi_{12} = 0$. Dacă $\varphi_{12} = \pm\pi$, atunci mărimile (y_1, y_2) sunt **în opoziție de fază** (**în antifază**). Mărimile (y_1, y_2) cu un defazaj egal cu $\pm\pi / 2$ se spune că sunt în **cuadratură**. Eliminând periodicitatea multiplă de 2π a funcțiilor sinusoidale, se convine ca în general să se considere $\varphi_{12} \in [-\pi, \pi]$.

O mărime sinusoidală este complet determinată de valoarea efectivă, frecvență şi faza inițială. În regim permanent sinusoidal, frecvența tensiunilor şi curenților laturilor circuitelor electrice liniare este frecvența surselor de alimentare şi în acest caz mărimile sinusoidale sunt caracterizate numai de valoarea efectivă şi faza inițială.

Operații cu mărimi sinusoidale. Operațiile cu mărimi sinusoidale de aceeaşi frecvență care intervin în analiza circuitelor electrice sunt: multiplicarea cu scalari, adunarea, derivarea, integrarea în raport cu timpul şi produsul.

Multiplicarea cu un scalar λ a mărimii sinusoidale $y = \sqrt{2}Y\sin(\omega t + \alpha_y)$ este mărimea sinusoidală

$$\lambda y = \sqrt{2}\lambda Y\sin(\omega t + \alpha_y) = \sqrt{2}|\lambda| Y\sin(\omega t + \alpha'_y), \qquad (3.11)$$

care are valoarea efectivă de $|\lambda|$ ori mai mare şi are faza inițială identică cu a lui y $(\alpha'_y = \alpha_y)$, când $\lambda > 0$ şi $\alpha'_y = \alpha_y \pm \pi$ dacă $\lambda < 0$. Mărimile y şi λy sunt sinfazice (în opoziție de fază) pentru $\lambda > 0$ ($\lambda < 0$).

Adunarea mărimilor sinusoidale $y_1 = \sqrt{2}Y_1\sin(\omega t + \alpha_{y_1})$ şi $y_2 = \sqrt{2}Y_2\sin(\omega t + \alpha_{y_2})$ este o mărime sinusoidală y de forma:

$$y = y_1 + y_2 = \sqrt{2}Y_1\sin(\omega t + \alpha_{y_1}) + \sqrt{2}Y_2\sin(\omega t + \alpha_{y_2}) = \sqrt{2}Y\sin(\omega t + \alpha_y) \qquad (3.12)$$

având aceeaşi frecvență, cu valoarea efectivă şi faza inițială date de relațiile

$$Y = \sqrt{Y_1^2 + Y_2^2 + 2Y_1Y_2\cos(\alpha_{y_1} - \alpha_{y_2})}; \alpha = arctg\frac{Y_1\sin\alpha_{y_1} + Y_2\sin\alpha_{y_2}}{Y_1\cos\alpha_{y_1} + Y_2\cos\alpha_{y_2}}. \qquad (3.13)$$

Derivata în raport cu timpul a mărimii sinusoidale $y = \sqrt{2}Y\sin(\omega t + \alpha_y)$ este mărimea sinusoidală de aceeaşi frecvență, valoarea efectivă de ω ori mai mare şi defazată cu $\pi/2$ (în cuadratură) înainte,

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{2}\omega Y\sin\left(\omega t + \alpha_y + \frac{\pi}{2}\right). \qquad (3.14)$$

Integrala în raport cu timpul a mărimii sinusoidale $y = \sqrt{2}Y\sin(\omega t + \alpha_y)$ este mărimea sinusoidală de aceeaşi frecvență, valoarea efectivă de ω ori mai mică şi defazată cu $\pi/2$ (în cuadratură) în urmă,

$$\int ydt = \sqrt{2}\frac{Y}{\omega}\sin\left(\omega t + \alpha_y - \frac{\pi}{2}\right). \qquad (3.15)$$

Suma a două mărimi sinusoidale y_1 şi y_2 având frecvențe diferite nu este o mărime sinusoidală

$$y = y_1 + y_2 = \sqrt{2}Y_1\sin(\omega_1 t + \alpha_{y_1}) + \sqrt{2}Y_2\sin(\omega_2 t + \alpha_{y_2}). \qquad (3.16)$$

În cazul în care $Y_1 = Y_2 = Y_0, \alpha_{y_1} = \alpha_{y_2} = \alpha_0$ şi pulsațiile sunt puțin diferite $\omega_1 - \omega_2 = 2\Delta\omega$, atunci mărimea sumă

$$y = y_1 + y_2 = \sqrt{2}Y_0 \cos(\Delta\omega t)\cdot \sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\alpha_0\right), \tag{3.17}$$

poate fi considerată sinusoidală de pulsație $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$, cu amplitudinea $\sqrt{2}Y_0\cos(\Delta\omega t)$ lent variabilă în timp (fig. 3.3, când $Y_0 = 10$, $f_1 = 55$ Hz, $f_1 = 50$ Hz și $\alpha_0 = \pi/3$).

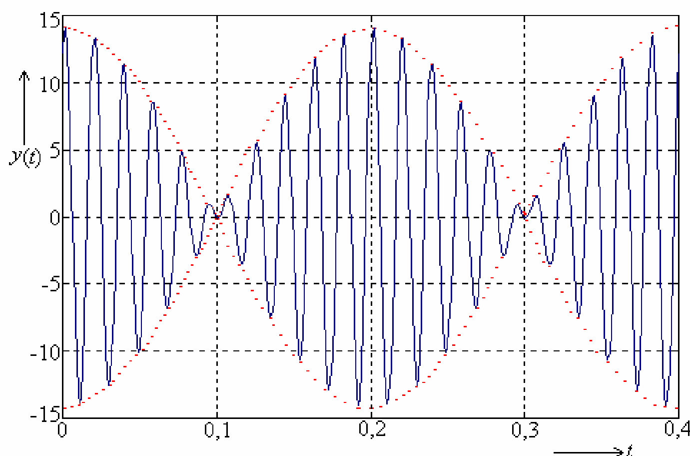


Fig. 3.3. Suma a două funcții sinusoidale cu pulsații diferite.

Mărimile de forma (3.17) se numesc sinusoidale cu înfăşurătoare sinusoidală şi descriu fenomene de bătaie a oscilațiilor. Oscilații de acest fel intervin la conectarea în paralel a două generatoare.

Produsul p a două mărimi sinusoidale y_1 şi y_2 de aceeaşi frecvență este:

$$p = y_1 y_2 = 2Y_1Y_2\sin(\omega t+\alpha_{y_1})\sin(\omega t+\alpha_{y_2}) =$$
$$= Y_1Y_2\cos(\alpha_{y_1}-\alpha_{y_2}) - Y_1Y_2\cos(2\omega t+\alpha_{y_1}+\alpha_{y_2}). \tag{3.18}$$

Observație

La efectuarea unor operații neliniare cu mărimi sinusoidale cu aceeaşi frecvență rezultatele nu mai sunt mărimi sinusoidale.

3.3. BAZELE METODEI SIMBOLICE DE REPREZENTARE ÎN COMPLEX A MĂRIMILOR SINUSOIDALE

Mărimile de excitație sinusoidale de aceeaşi frecvență determină într-un circuit electric liniar cu parametri concentrați un regim permanent sinusoidal. Calculul curenților şi tensiunilor laturilor circuitului din acest regim corespunde determinării soluției particulare a sistemului de ecuații integro-diferențiale, obținut cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff şi al ecuațiilor caracteristice fiecărei laturi în regim dinamic. Metoda substituției devine oneroasă pentru un circuit electric complex.

Ținând seama că în regimul armonic permanent se operează cu mărimi sinusoidale de aceeaşi frecvență, determinarea regimului permanent sinusoidal se poate simplifica substanțial, dacă se utilizează **metoda simbolică a reprezentării în complex a mărimilor sinusoidale**.

Metoda simbolică a reprezentării în complex a mărimilor sinusoidale constă în stabilirea unei reguli de transformare sau de corespondență care asociază fiecărei mărimi sinusoidale un simbol sau o imagine, care să satisfacă următoarele condiții:

- reprezentarea trebuie să fie biunivocă, fiecărei mărimi sinusoidale să-i corespundă o singură imagine şi fiecărei imagine să-i corespundă o singură mărime sinusoidală;

- operațiilor de multiplicare cu scalari şi de adunare a mărimilor sinusoidale să le corespundă multiplicarea cu scalari şi adunarea imaginilor;

- operațiilor de derivare şi integrare a mărimilor sinusoidale să le corespundă operații simple cu imagini;

- transformarea directă de la mărimea sinusoidală la imagine şi transformarea inversă de la imagine la mărimea sinusoidală să fie simplă, uşor de efectuat.

Fie F spațiul funcțiilor sinusoidale de aceeaşi frecvență şi **C** corpul numerelor complexe. Operatorul complex C este definit astfel

$$\mathcal{C} : F \rightarrow \mathbf{C}. \qquad (3.19)$$

Prin definiție **complexul unei mărimi sinusoidale** este un număr complex, notat $\mathcal{C}\{y\}$ sau $\underline{Y}$, care are ca modul valoarea efectivă a mărimii sinusoidale şi ca argument faza inițială a acestei mărimi

$$\mathcal{C}\{y(t)\} = \underline{Y} \overset{d}{=} Y e^{j\alpha_y}, \qquad (3.20)$$

unde s-a notat: $j = \sqrt{-1}$. Acest mod de reprezentare analitică a mărimilor sinusoidale se numeşte **reprezentare complexă** (sau **reprezentare în complex simplificat**) şi este valabilă numai pentru mărimi ce au aceeaşi frecvență.

Prin reprezentarea mărimii complexe $\underline{Y}$ printr-un vector în planul complex (fig. 3.4), fiecărei mărimi sinusoidale i se asociază câte un vector (liber) în acest plan.

Deci, reprezentarea în complex simplificat conduce la diagrame vectoriale în planul complex, care se pot construi prin alegerea arbitrară a originii de fază (adică a mărimii complexe cu faza inițială nulă). Schimbarea originii de fază corespunde rotirii diagramei vectoriale din planul complex.

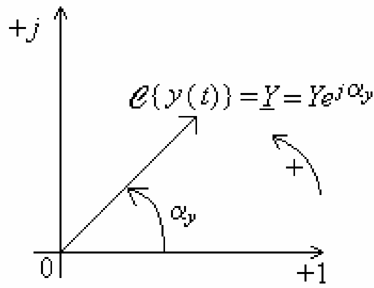


Fig. 3.4. Reprezentarea grafică printr-un vector a unei mărimii complexe.

Diagramele vectoriale se mai numesc şi **diagrame fazoriale**, iar vectorii respectivi **fazori**. Deoarece corespondența (3.20) este biunivocă, odată cunoscut complexul $\underline{Y}$ al mărimii sinusoidale, valoarea instantanee a mărimii y se obține cu relația

$$y(t) = \mathrm{Im}\left\{\sqrt{2}\,\underline{Y} e^{j\omega t}\right\}. \qquad (3.21)$$

Exemplul 3.1: O tensiune sinusoidală $u = \sqrt{2}\,220 \sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$ V, are o reprezentare complexă $\underline{U} = 220 e^{-j\frac{\pi}{4}} = 220\left(\cos\frac{\pi}{4} - j\sin\frac{\pi}{4}\right) = 110\sqrt{2}(1-j)$.

Exemplul 3.2: Ştiind că unui curent sinusoidal de frecvență 50 Hz îi corespunde complexul $\underline{I} = 3 - 4j$ A, se deduce valoarea instantanee a curentului

$$i = \mathrm{Im}\left\{\sqrt{2}\,\underline{I} e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Im}\left\{\sqrt{2}\,5 e^{-j\,arctg\frac{4}{3}} e^{j\omega t}\right\} = \sqrt{2}\,5 \sin\left(100\pi t - arctg\frac{4}{3}\right) \mathrm{A}.$$

3.3.1. Teorema combinațiilor liniare. *Complexul unei combinații liniare de mărimi sinusoidale având aceeaşi frecvență se obține prin substituirea mărimilor sinusoidale cu reprezentările lor în complex*

$$\mathsf{C}\left\{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k y_k\right\} = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k \underline{Y}_k \,, \tag{3.22}$$

unde λ_k, $k = \overline{1,n}$, sunt mărimi constante reale, iar funcțiile sinusoidale

$$y_k = \sqrt{2}Y_k \sin\left(\omega t + \alpha_{y_k}\right) \tag{3.23}$$

pentru $k = \overline{1,n}$ au toate aceeaşi pulsație ω.

Demonstrație. Deoarece $y_k = \text{Im}\left\{\sqrt{2}\underline{Y}_k e^{j\omega t}\right\}$, membrul stâng al relației (3.22) se poate scrie sub forma:

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k y_k = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k \,\text{Im}\left\{\sqrt{2}\underline{Y}_k e^{j\omega t}\right\} = \text{Im}\left\{\sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k \underline{Y}_k\right)e^{j\omega t}\right\}. \tag{3.24}$$

Notând:

$$\underline{Y} \overset{d}{=} \sum_{k=1}^{n}\lambda_k \underline{Y}_k \tag{3.25}$$

şi

$$\underline{Y} = Ye^{j\alpha_y} \,, \tag{3.26}$$

din relația (3.24) rezultă:

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k y_k = \text{Im}\left\{\sqrt{2}Ye^{j\left(\omega t + \alpha_y\right)}\right\} \tag{3.27}$$

şi prin urmare:

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k y_k = \sqrt{2}Y\sin\left(\omega t + \alpha_y\right) = y\,. \tag{3.28}$$

Relația (3.28) arată că o combinație liniară de mărimi sinusoidale de aceeaşi frecvență este tot o mărime sinusoidală y cu aceeaşi frecvența.

Relațiile (3.28) şi (3.25) conduc la relația

$$\mathsf{C}\{y\} = \mathsf{C}\left\{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k y_k\right\} = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k \underline{Y}_k \tag{3.29}$$

ceea ce demonstrează teorema (3.2.1).

În cazul particular, pentru $\lambda_k = 1,\ k = \overline{1,n},$ se obține teorema sumei

$$\mathsf{C}\left\{\sum_{k=1}^{n} y_k\right\} = \sum_{k=1}^{n}\underline{Y}_k \,. \tag{3.30}$$

Pe baza teoremei combinațiilor liniare, determinarea mărimii sinusoidale (3.29) se reduce la calculul sau la determinarea grafică a vectorului $\underline{Y}$, în planul complex, pe baza însumării vectoriale (3.25) (fig. 3.5) şi la formarea funcției sinusoidale y, corespunzătoare complexului $\underline{Y}$. În figura 3.5 s-a considerat $n = 3$.

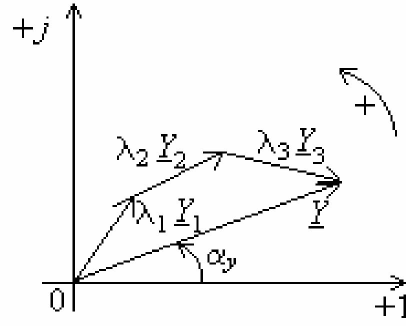


Fig. 3.5. Determinarea grafică a vectorului sumă.

Exemplul 3.3: Suma tensiunilor sinusoidale $u_1 = \sqrt{2}220\sin(100\pi t)$ V şi $u_2 = \sqrt{2}220\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ V este o tensiune sinusoidală de aceeaşi frecvență $f = 50$ Hz având complexul

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = 220 + 220j = 220\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} .$$

Valoarea instantanee a tensiunii sumă este

$$u = \sqrt{2}220\sqrt{2}\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = 440\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\text{V}.$$

Suma acestor vectori (fig. 3.6) corespunde mărimii $\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$. Din grafic se obține $\underline{U} = 220\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$ V. Deci, rezultă aceeaşi valoare şi $u = 440\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\text{V}$.

3.3.2. Teorema derivatei. *Complexul derivatei de ordinul n în raport cu timpul a unei mărimi sinusoidale este egal cu complexul mărimii sinusoidale multiplicată cu* $(j\omega)^n$

$$\mathsf{C}\left\{\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}\right\} = (j\omega)^n \underline{Y} \tag{3.31}$$

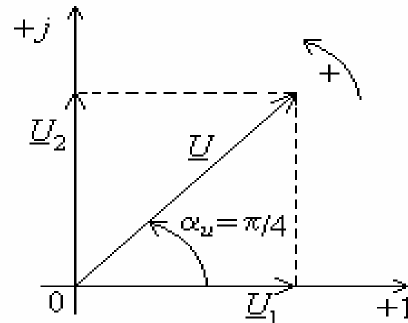


Fig. 3.6. Determinarea vectorului sumă a două tensiuni sinusoidale.

Demonstrație. Fie $y = \sqrt{2}Y\sin(\omega t + \alpha_y)$. Complexul derivatei de ordinul întâi este

$$\mathsf{C}\left\{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right\} = \mathsf{C}\left\{\sqrt{2}\omega Y\cos(\omega t + \alpha_y)\right\} = \mathsf{C}\left\{\sqrt{2}\omega Y\sin\left(\omega t + \alpha_y + \frac{\pi}{2}\right)\right\} =$$

$$= \omega Y e^{j\left(\alpha_y + \frac{\pi}{2}\right)} = e^{j\frac{\pi}{2}}\omega Y e^{j\alpha_y} = j\omega\underline{Y}. \tag{3.32}$$

Din relația (3.32) rezultă că derivatei în raport cu timpul a unei mărimi sinusoidale îi corespunde în domeniul reprezentărilor în complex înmulțirea cu $j\omega$ (ceea ce revine majorării argumentului cu $\pi/2$ şi creşterii modulului de ω ori).

În planul complex, derivării îi corespunde deci rotirea cu π/2 în sens pozitiv (sensul trigonometric) şi multiplicarea vectorului de ω ori (fig. 3.7).

Aplicând relația (3.32) de n ori succesiv, se obține teorema (3.3.1).

3.3.3. Teorema integralei. *Complexul integralei nedefinite în raport cu timpul (acea primitivă a integralei care este o mărime sinusoidală) a unei mărimi sinusoidale este egal cu complexul mărimii sinusoidale împărțit la jω*

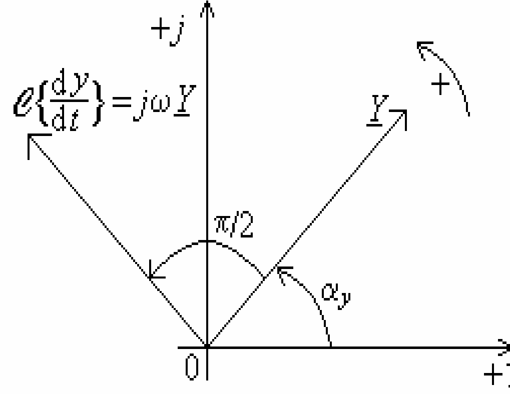


Fig. 3.7. Reprezentarea vectorială (fazorială) a derivatei.

$$\mathrm{C}\left\{\int y\mathrm{d}t\right\}=\frac{1}{j\omega}\underline{Y}\,. \tag{3.33}$$

Demonstrație. Conform cu definiția reprezentării în complex rezultă:

$$\mathrm{C}\left\{\int y\mathrm{d}t\right\}=\mathrm{C}\left\{\int \sqrt{2}Y\sin\left(\omega t+\alpha_y\right)\mathrm{d}t\right\}=\mathrm{C}\left\{-\frac{\sqrt{2}Y}{\omega}\cos\left(\omega t+\alpha_y\right)\right\}=$$
$$=\mathrm{C}\left\{\frac{\sqrt{2}Y}{\omega}\sin\left(\omega t+\alpha_y-\frac{\pi}{2}\right)\right\}=\frac{1}{\omega}Ye^{j\left(\alpha_y-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{e^{j\frac{\pi}{2}}\omega}Ye^{j\alpha_y}=\frac{1}{j\omega}\underline{Y}\,. \tag{3.34}$$

Din relația (3.34) rezultă că integrării în raport cu timpul a unei mărimi sinusoidale îi corespunde în domeniul reprezentării în complex împărțirea cu $j\omega$ (ceea ce este echivalent cu micşorarea argumentului cu π/2 şi împărțirea modulului cu ω). În planul complex, integrării în raport cu timpul îi corespunde rotirea vectorului $\underline{Y}$ cu π/2 în sens negativ (orar) şi reducerea vectorului de ω ori (fig. 3.8).

Utilizând teoremele de mai sus se arată că metoda simbolică reduce problema determinării soluției particulare sinusoidale a unei ecuații diferențiale liniare (la care termenul liber variază în timp sinusoidal), la rezolvarea unei ecuații algebrice. De exemplul, o ecuație diferențială liniară de forma

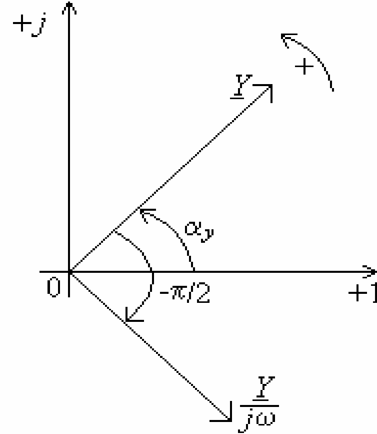


Fig. 3.8. Reprezentarea fazorială (vectorială) a integralei.

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\frac{\mathrm{d}^k x}{\mathrm{d}t^k}=y \tag{3.35}$$

unde $y=\sqrt{2}Y\sin\left(\omega t+\alpha_y\right)$ are ca soluție particulară o funcție sinusoidală de forma:

$$x=\sqrt{2}X\sin\left(\omega t+\alpha_x\right). \tag{3.36}$$

Determinarea acestei soluții particulare care satisface ecuația

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\frac{\mathrm{d}^k x}{\mathrm{d}t^k}=\sqrt{2}Y\sin\left(\omega t+\alpha_y\right) \tag{3.37}$$

se poate efectua observând că reprezentarea în complex $\underline{X}$ a soluţiei particulare satisface următoarea ecuaţie algebrică:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (j\omega)^k \underline{X} = \underline{Y}, \text{ în care } \underline{Y} = Ye^{j\alpha_y}, \tag{3.38}$$

de unde rezultă complexul soluţiei particulare căutate

$$\underline{X} = \frac{\underline{Y}}{\sum_{k=1}^{n} a_k (j\omega)^k}. \tag{3.39}$$

Soluţia particulară se obţine din relaţia (3.36), în funcţie de modulul X şi argumentul α_x al mărimii (3.39).

Evident, posibilitatea reducerii problemei determinării soluţiilor particulare sinusoidale la rezolvarea unor ecuaţii algebrice se poate extinde la sistemele de ecuaţii diferenţiale liniare.

3.4. ECUAŢIILE LUI KIRCHHOFF ÎN FORMĂ SIMBOLICĂ

Pentru circuitele electrice liniare formate exclusiv din rezistoare, bobine, condensatoare şi surse ideale independente de tensiune, ecuaţiile lui Kirchhoff în valori instantanee (în regim dinamic) au expresiile:

$$\sum_{l_k \in (n_j)} {}_{(A)} i_k = 0; \quad j = \overline{1, n-1} \tag{3.40}$$

şi

$$\sum_{l_k \in (b_h)} {}_{(A)} \left(R_k i_k + L_k \frac{\mathrm{d}i_k}{\mathrm{d}t} + \sum_{p=1, p \neq k}^{l} L_{kp} \frac{\mathrm{d}i_p}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C_k} \int i_k \mathrm{d}t \right) = \sum_{l_k \in (b_h)} {}_{(A)} e_k; \quad h = \overline{1, b}; b = l - n + 1 \tag{3.41}$$

şi constituie un sistem complet de ecuaţii independente. Soluţiile particulare sinusoidale ale acestui sistem, cu reprezentări în complex, satisfac conform teoremelor (3.3.1), (3.3.2) şi (3.3.3) următoarele ecuaţii algebrice complexe:

$$\sum_{l_k \in (n_j)} {}_{(A)} \underline{I}_k = 0; \quad j = \overline{1, n-1} \tag{3.42}$$

$$\sum_{l_k \in (b_h)} {}_{(A)} \left(R_k \underline{I}_k + j\omega L_k \underline{I}_k + \sum_{p=1, p \neq k}^{l} j\omega L_{kp} \underline{I}_p + \frac{1}{j\omega C_k} \underline{I}_k \right) = \sum_{l_k \in (b_h)} {}_{(A)} \underline{E}_k; \quad h = \overline{1, b}; b = l - n + 1 \tag{3.43}$$

în care $\underline{E}_k$ şi $\underline{I}_k$, $k = \overline{1, l}$, sunt reprezentările în complex ale t.e.m., respectiv curenţilor laturilor.

Dacă circuitul electric liniar analizat conţine şi surse ideale independente de curent şi surse comandate, atunci ecuaţiile (3.42) şi (3.43) devin:

$$\sum_{l_k \in (n_j)} {}_{(A)} \underline{I}_k = - \sum_{l_k \in (n_j)} {}_{(A)} \underline{J}_k; \quad j = \overline{1, n-1} \tag{3.44}$$

$$\sum_{l_k \in (b_h)} {}_{(A)} \left(R_k \underline{I}_k + j\omega L_k \underline{I}_k + \sum_{p=1, p \neq k}^{l} j\omega L_{kp} \underline{I}_p + \frac{1}{j\omega C_k} \underline{I}_k \right) + \sum_{l_k \in (b_h)} {}_{(A)} \underline{U}_{jk} +$$

$$+\sum_{l_k\in(b_h)}{}_{(A)}\underline{U}_{jck}-\sum_{l_k\in(b_h)}{}_{(A)}\underline{E}_{ck}=\sum_{l_k\in(b_h)}{}_{(A)}\underline{E}_k;\ h=\overline{1,b};\ b=l-n+1, \tag{3.45}$$

unde $\underline{J}_k, \underline{U}_{j_k}, \underline{U}_{jck}$ şi $\underline{E}_{ck}$ sunt reprezentările în complex ale curenţilor, tensiunilor şi t.e.m. ale surselor independente de curent, ale surselor de curent comandate şi, respectiv, ale surselor de tensiune comandate. Pentru a obţine un sistem complet de ecuaţii independente, la ecuaţiile (3.44) şi (3.45) trebuie adăugate ecuaţiile de definiţie ale surselor comandate.

În ecuaţiile (3.44) şi (3.45) reprezentările în complex ale curenţilor surselor ideale independente de curent şi, respectiv, t.e.m. ale surselor de tensiune comandate s-au pus în membrul drept al relaţiei (3.44) şi, respectiv, stâng al relaţiei (3.45), pentru că aceste mărimi sunt cunoscute, respectiv necunoscute.

Ecuaţiile (3.42) ((3.44) şi (3.43) ((3.45)) se numesc, respectiv, *prima şi a doua teoremă a lui Kirchhoff în formă complexă*.

Prima teoremă a lui Kirchhoff în formă complexă are enunţul: *suma algebrică a reprezentărilor în complex ale curenţilor laturilor conectate într-un nod este egală cu zero*.

A doua teoremă a lui Kirchhoff în formă complexă are enunţul: *suma algebrică a reprezentărilor în complex ale căderilor de tensiune rezistive* $\left(R_k\underline{I}_k\right)$, *inductive* $\left(j\omega L_k\underline{I}_k+\sum_{p=1,p\neq k}^{l} j\omega L_{kp}\underline{I}_p\right)$, *capacitive* $\left(\frac{1}{j\omega C_k}\underline{I}_k\right)$, *de la bornele surselor ideale independente de curent* $\left(\underline{U}_{j_k}\right)$ *şi cele de la bornele surselor de curent comandate* $\left(\underline{U}_{jck}\right)$, *este egală, de-a lungul fiecărei bucle independente* (b_h), *cu suma algebrică a reprezentărilor în complex ale t.e.m.* $\left(\underline{E}_k\right)$ *ale surselor independente de tensiune şi ale t.e.m.* $\left(\underline{E}_{ck}\right)$ *ale surselor de tensiune comandate.*

Căderile de tensiune rezistive, inductive şi capacitive se reprezintă în complex sub forma comună $\underline{Z}_k\underline{I}_k$, în care **impedanţa complexă** $\underline{Z}_k$ are prin definiţie expresiile:

$$\underline{Z}_{R_k}=R_k;\ \underline{Z}_{L_k}=j\omega L_k;\ \underline{Z}_{m_{kp}}=j\omega L_{kp}\ \text{şi}\ \underline{Z}_{C_k}=\frac{1}{j\omega C_k} \tag{3.46}$$

după cum elementul de circuit respectiv corespunde unui rezistor de rezistenţă R_k, unei bobine ideale de inductivitate L_k, unui cuplaj magnetic cu inductivitate mutuală L_{kp} sau unui condensator de capacitate C_k. Inductivitatea mutuală L_{kp} este pozitivă (negativă) după cum curenţii $\underline{I}_k, \underline{I}_p$ au sensuri identice (contrare) faţă de bornele polarizate ale celor două bobine cuplate magnetic.

Cu această convenţie, a doua teoremă a lui Kirchhoff se exprimă în forma:

$$\sum_{l_k\in(b_h)}{}_{(A)}\left(\underline{Z}_k\underline{I}_k+\sum_{p=1,p\neq k}^{l}\underline{Z}_{kp}\underline{I}_p\right)=\sum_{l_k\in(b_h)}{}_{(A)}\underline{E}_k;\ h=\overline{1,b}, \tag{3.47}$$

pentru circuitele fără surse comandate, şi

$$\sum_{l_k\in(b_h)}{}_{(A)}\left(\underline{Z}_k\underline{I}_k+\sum_{p=1,p\neq k}^{l}\underline{Z}_{kp}\underline{I}_p\right)+\sum_{l_k\in(b_h)}{}_{(A)}\underline{U}_{j_k}+\sum_{l_k\in(b_h)}{}_{(A)}\underline{U}_{jck}-\sum_{l_k\in(b_h)}{}_{(A)}\underline{E}_{ck}= \tag{3.48}$$

$$=\sum_{l_k\in(b_h)}{}_{(A)}\underline{E}_k;\ h=\overline{1,b}$$

pentru cele cu surse comandate, unde

$$\underline{Z}_k \overset{d}{=} R_k + j\left(\omega L_k - \frac{1}{\omega C_k}\right) \tag{3.49}$$

reprezintă impedanța complexă a laturii l_k.

Astfel, ecuațiile circuitelor electrice în regim sinusoidal, pentru un circuit cu n noduri şi b bucle independente, se exprimă în metoda simbolică prin n-1 ecuații independente de forma (3.42) ((3.44)) şi b ecuații independente de forma (3.43) ((3.45)), corespunzătoare unui sistem complet de bucle independente.

Analogia formală între ecuațiile circuitelor de curent continuu şi ecuațiile complexe (3.42), (3.43) sau (3.44), (3.45) permite extinderea metodelor de analiză şi a teoremelor circuitelor în curent continuu (vezi cap. 2) şi pentru circuitele în regim sinusoidal. Mărimile corespondente sunt:

$$I \leftrightarrow \underline{I};\ U \leftrightarrow \underline{U};\ E \leftrightarrow \underline{E};\ J \leftrightarrow \underline{J};\ \ R \leftrightarrow \underline{Z}. \tag{3.50}$$

Unele deosebiri apar la circuitele electrice cu cuplaje magnetice, datorită impedanțelor complexe $\underline{Z}_{m_{kp}}$, corespunzătoare inductivităților mutuale.

Algoritmul de aplicare a ecuațiilor lui Kirchhoff în formă simbolică la analiza circuitelor electrice liniare în regim sinusoidal, comportă următorii paşi.

P1. Se determină reprezentările în complex ale mărimilor de excitație şi se calculează impedanțele complexe ale laturilor circuitului.

P2. Se construieşte schema echivalentă în complex a circuitului. Se identifică nodurile şi buclele independente ale circuitului. Se alege pentru fiecare latură sensul curentului complex $\underline{I}_k$.

Observația 3.1. Dacă circuitul analizat conține surse independente sau comandate de curent, cele b bucle independente ale circuitului se aleg în aşa fel încât prin fiecare sursă de curent să treacă o singură buclă şi sensul buclei să coincidă cu sensul curentului sursei respective.

P3. Se scriu teoremele lui Kirchhoff în cele n-1 noduri şi pe cele b bucle independente.

P4. Dacă circuitul studiat conține surse comandate, se scriu ecuațiile de definiție în complex ale acestor surse, exprimând, cu ajutorul legii conducției electrice în complex (teorema lui Joubert) sau cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff, mărimile de comandă în funcție de curenții laturilor.

Dacă latura l_k a circuitului are structura reprezentată în figura 3.9,a, atunci ecuația caracteristică, în complex, are forma:

$$\underline{U}_k + \underline{E}_k = \left(R_k + j\omega L_k - \frac{j}{\omega C_k}\right)\underline{I}_k + \sum_{p=1, p\neq k}^{l} j\omega L_{kp}\underline{I}_p = \underline{Z}_k \underline{I}_k + \sum_{p=1, p\neq k}^{l} \underline{Z}_{m_{pk}} \underline{I}_p \tag{3.51}$$

numită **legea lui Ohm în complex** (**teorema lui Joubert**).

Dacă circuitul nu are cuplaje magnetice, ecuația (3.51) devine

$$\underline{U}_k + \underline{E}_k = \underline{Z}_k \underline{I}_k, \tag{3.52}$$

căreia îi corespunde schema echivalentă din figura 3.9,b.

P5. Se rezolvă ecuațiile circuitului în raport cu complexele mărimilor necunoscute (curenții $\underline{I}_k$, tensiunile $\underline{U}_{j_k}$ şi $\underline{U}_{j_{ck}}$ şi t.e.m. $\underline{E}_{ck}$).

P6. Se determină valorile instantanee, corespunzătoare complexelor calculate la pasul precedent.

Exemplul 3.4: Fie circuitul de c.a. din figura 3.10,a. Se cunosc parametrii: $R_1 = R_2 = R_3 = \omega L_1 = \omega L_2 = \dfrac{1}{\omega C_3} = 11\Omega; \dfrac{1}{\omega C_1} = 22\,\Omega$; $e_1 = \sqrt{2}220\sin(100\pi t)$ V şi $j_4 = \sqrt{2}20\cos(100\pi t)$ A $\underline{E}_3 = \underline{Z}_{3_1}\underline{I}_1$, $\underline{Z}_{3_1} = -11(1+j)$. Se cer valorile complexe şi instantanee ale curenţilor laturilor, tensiunii u_4 şi t.e.m. e_3.

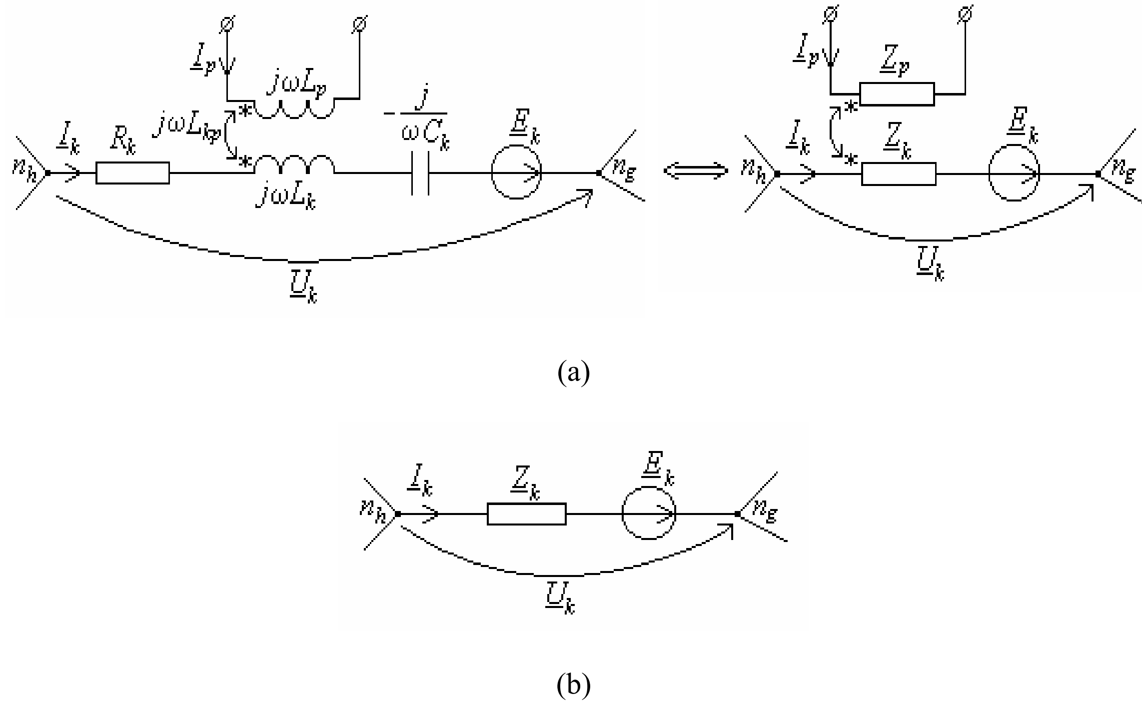


Fig. 3.9. Structura unei laturi de circuit în complex.

Reprezentările în complex ale mărimilor de excitaţie au expresiile:

$$\underline{E}_1 = 220e^{j0^0} = 220 \text{ şi } \underline{J}_4 = 20e^{j\frac{\pi}{2}} = 20j,$$

iar impedanţele complexe ale laturilor sunt:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right) = 11 + j(11-22) = 11(1-j), \underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2 = 11(1+j)$$

$$\text{şi } \underline{Z}_3 = R_3 - \frac{j}{\omega C_3} = 11(1-j).$$

În figura 3.10,b s-a reprezentat schema echivalentă în complex a circuitului din figura 3.10,a.

Prima teoremă a lui Kirchhoff în formă complexă în nodul n_1 are expresia

$$(n_1)\ -\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = -\underline{J}_4.$$

Pentru buclele (b_1), (b_2) şi (b_3) a doua teoremă a lui Kirchhoff în formă complexă, folosind sensurile de parcurs indicate în figura 3.10,b, este

$$(b_1)\ \underline{Z}_1\underline{I}_1 + \underline{Z}_2\underline{I}_2 = \underline{E}_1$$

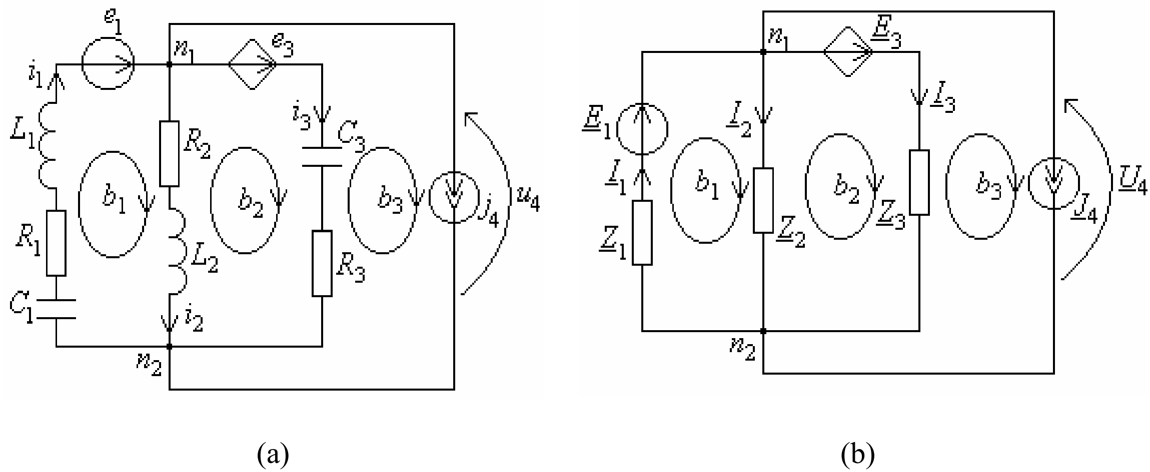


Fig. 3.10. a) Schema circuitului; b) Schema echivalentă în complex a circuitului.

$$(b_2)\ -\underline{Z}_2\underline{I}_2+\underline{Z}_3\underline{I}_3-\underline{E}_3=0$$

$$(b_3)\ -\underline{Z}_3\underline{I}_3-\underline{U}_4+\underline{E}_3=0.$$

Trecând în valori numerice rezultă:

$$(n_1)\ -\underline{I}_1+\underline{I}_2+\underline{I}_3=-20j\,;\ \ (b_1)\ 11(1-j)\underline{I}_1+11(1+j)\underline{I}_2=220$$

$$(b_2)\ -11(1+j)\underline{I}_2+11(1-j)\underline{I}_3-\underline{E}_3=0\,;\ \ (b_3)\ -11(1-j)\underline{I}_3-\underline{U}_4+\underline{E}_3=0$$

$$(l_3)\ \underline{E}_3=-11(1+j)\underline{I}_1.$$

Rezolvând acest sistem de ecuații algebrice liniare, se obține:

$$\underline{I}_1=10(1+j)=10\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\,;\underline{I}_2=0\,;\underline{I}_3=10(1-j)=10\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}\,;$$

$$\underline{U}_4=0\ \text{şi}\ \underline{E}_3=-220j=220e^{-j\frac{\pi}{2}}\,.$$

Valorile instantanee ale curenților, tensiunii u_4 şi t.e.m. e_3 sunt:

$$i_1=\sqrt{2}10\sqrt{2}\sin\left(100\pi t+\frac{\pi}{4}\right)=20\sin\left(100\pi t+\frac{\pi}{4}\right)\text{A}; i_2=0\ \text{A}; i_3=\sqrt{2}10\sqrt{2}\sin\left(100\pi t-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=20\sin\left(100\pi t-\frac{\pi}{4}\right)\text{A}; \text{u}_4=0\ \text{V}\ \ \text{şi}\ \ e_3=\sqrt{2}220\sin\left(100\pi t-\frac{\pi}{2}\right)\text{V}.$$

În figura 3.11 sunt reprezentate diagramele vectoriale ale curenților (ecuația (n_1)) şi ale tensiunilor (ecuația (b_1)).

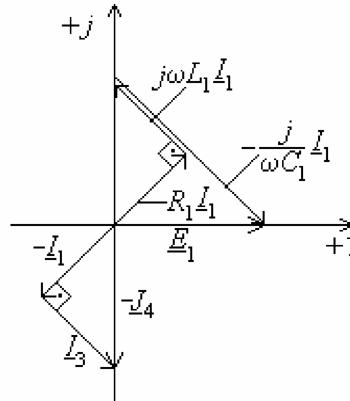


Fig. 3.11. Diagramele vectoriale ale curenților (ecuația (n_1)) şi ale tensiunilor (ecuația (b_1)).

3.5. CIRCUITE DIPOLARE PASIVE ÎN REGIM SINUSOIDAL

Fie un dipol liniar pasiv, aflat în regim sinusoidal (fig. 3.12). Tensiunea şi curentul la bornele circuitului sunt mărimi sinusoidale de aceeaşi frecvență

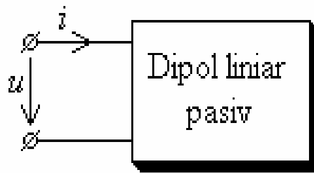


Fig. 3.12. Schema dipolului liniar pasiv.

$$u = \sqrt{2}U\sin(\omega t + \alpha_u)$$

$$i = \sqrt{2}I\sin(\omega t + \alpha_i). \tag{3.53}$$

Defazajul curentului i în urma tensiunii u se notează cu φ

$$\varphi \stackrel{d}{=} \alpha_u - \alpha_i \tag{3.54}$$

şi deci:

$$i = \sqrt{2}I\sin(\omega t + \alpha_u - \varphi). \tag{3.55}$$

În complex cele două mărimi au expresiile:

$$\underline{U} = Ue^{j\alpha_u} \text{ şi } \underline{I} = Ie^{j(\alpha_u - \varphi)}. \tag{3.56}$$

Un circuit dipolar liniar, pasiv şi fără cuplaje magnetice cu exteriorul se caracterizează în metoda simbolică prin **impedanța complexă** $\underline{Z}$, definită prin relația

$$\underline{Z} \stackrel{d}{=} \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U}{I}e^{j\varphi} = Ze^{j\varphi} = Z(\cos\varphi + j\sin\varphi) = R + jX, \tag{3.57}$$

unde $Z \stackrel{d}{=} \frac{U}{I}$ este **modulul** (**valoarea**) impedanței, iar $\varphi \stackrel{d}{=} \arg(\underline{Z})$ reprezintă **argumentul** impedanței.

Trebuie menționat că în relația de definiție (3.57) a impedanței complexe intensitatea curentului şi tensiunea la borne se exprimă față de sensuri de referință asociate după convenția de asociere corespunzătoare receptoarelor (sensul curentului şi sensul tensiunii "ies" din aceeaşi bornă).

Diagrama vectorială a acestor mărimi complexe este reprezentată în figura 3.13. În practică, interesează numai defazajul φ dintre vectori şi mărimea acestora.

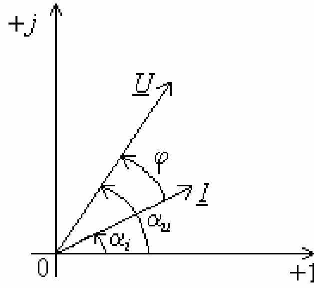


Fig. 3.13. Diagrama fazorială corespunzătoare unui dipol liniar pasiv.

Relaţia (3.57) se poate scrie şi sub forma:

$$\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I} \tag{3.58}$$

analogă formal cu legea lui Ohm, $U = RI$, valabilă pentru circuitele de curent continuu. Relaţia (3.58) este numită, datorită acestei analogii formale, **legea lui Ohm în formă simbolică** (**complexă**).

Părţile reală şi imaginară ale impedanţei complexe se definesc ca fiind **rezistenţa** şi, respectiv, **reactanţa** dipolului

$$R \stackrel{d}{=} \mathrm{Re}\{\underline{Z}\} = Z\cos\varphi, \quad X \stackrel{d}{=} \mathrm{Im}\{\underline{Z}\} = Z\sin\varphi, \tag{3.59}$$

mărimi care, în cazul general, depind de toţi parametrii circuitului (R, L, C, M), precum şi de pulsaţie. Prin urmare, definiţia rezistenţei, în acest caz, este esenţial diferită de cea rezultată în cadrul legii conducţiei electrice.

Dacă se cunosc R şi X, se pot calcula modulul şi argumentul impedanţei complexe

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad tg\varphi = \frac{X}{R}. \tag{3.60}$$

Valoarea inversă a impedanţei complexe se numeşte **admitanţă complexă**

$$\underline{Y} \stackrel{d}{=} \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{I}{U}e^{-j\varphi} = Ye^{-j\varphi} = Y(\cos\varphi - j\sin\varphi) = G - jB, \tag{3.61}$$

unde $Y = 1/Z = I/U$ este **modulul** (valoarea) admitanţei, iar **argumentul** este egal cu defazajul cu semn schimbat ($-\varphi$) al curentului în urma tensiunii.

Părţile reală şi imaginară cu semn schimbat ale admitanţei complexe se definesc ca fiind **conductanţa** şi, respectiv, **susceptanţa** dipolului considerat

$$G \stackrel{d}{=} \mathrm{Re}\{\underline{Y}\} = Y\cos\varphi, \quad B \stackrel{d}{=} -\mathrm{Im}\{\underline{Y}\} = Y\sin\varphi. \tag{3.62}$$

Cu ajutorul relaţiei:

$$G - jB = \frac{R - jX}{Z^2} \tag{3.63}$$

se pot explicita fie componentele admitanţei

$$G = \frac{R}{Z^2}, \quad B = \frac{X}{Z^2}, \tag{3.64}$$

fie cele ale impedanţei

$$R = \frac{G}{Y^2}, \quad X = \frac{B}{Y^2}, \tag{3.65}$$

Scriind relaţia de definiţie a admitanţei complexe sub forma:

$$\underline{Z}\,\underline{Y} = 1 \Rightarrow (R + jX)(G - jB) = 1 \Leftrightarrow RG + BX + j(GX - RB) = 1 \tag{3.66}$$

şi identificând părţile reale şi cele imaginare din cei doi membri, rezultă relaţiile:

$$RG + BX = 1 \text{ şi } \frac{G}{R} = \frac{B}{X}. \tag{3.67}$$

În particular, elementele ideale de circuit: rezistorul ideal (fig. 3.14,a), bobina ideală (fig. 3.14,b) şi condensatorul ideal (fig. 3.14,c) sunt circuite dipolare.

În figura 3.14,d s-a considerat un dipol oarecare de impedanță complexă $\underline{Z}$.

Relațiilor dintre valorile instantanee ale curenților şi tensiunilor la bornele acestor elemente

$$u_R = Ri,\ u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t},\ i = C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} \tag{3.68}$$

le corespund următoarele relații în complex:

$$\underline{U}_R = R\underline{I},\ \underline{U}_L = j\omega L\underline{I},\ \underline{U}_C = \frac{1}{j\omega C}\underline{I}. \tag{3.69}$$

Impedanțele complexe ale rezistorului ideal, bobinei ideale şi condensatorului ideal au deci expresiile:

$$\underline{Z}_R = R,\ \underline{Z}_L = j\omega L,\ \underline{Z}_C = -\frac{j}{\omega C}, \tag{3.70}$$

iar admitanțele complexe sunt:

$$\underline{Y}_R = \frac{1}{R}, \underline{Y}_L = -\frac{j}{\omega L}, \underline{Y}_C = j\omega C. \tag{3.71}$$

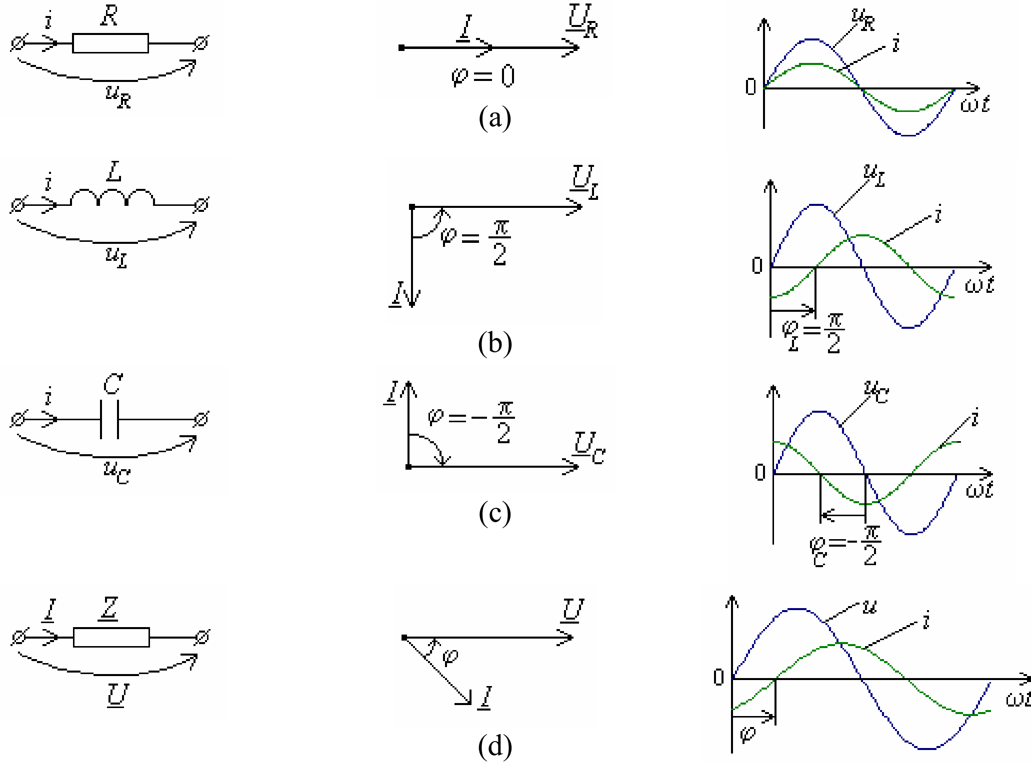


Fig. 3.14. Comportarea în c.a. a elementelor de circuit bipolare.

Rezistențele, reactanțele, conductanțele şi susceptanțele acestor dipoli simpli sunt:

$$R_R = R, X_R = 0, G_R = \frac{1}{R}, B_R = 0; R_L = 0, X_L = \omega L, G_L = 0, B_L = \frac{1}{\omega L}; \tag{3.72}$$

$$R_C = 0, X_{cond} = -\frac{1}{\omega C} = -X_C, G_C = 0, B_{cond} = -\omega C = -B_C.$$

Din relațiile (3.70) rezultă argumentele impedanțelor complexe egale cu defazajele φ corespunzătoare

$$\varphi_R = 0,\ \varphi_L = \frac{\pi}{2} \text{ şi } \varphi_C = -\frac{\pi}{2}. \tag{3.73}$$

În figura 3.14 sunt reprezentate diagramele vectoriale ale tensiunilor şi curenților la bornele rezistorului ideal (a), bobinei ideale (b) şi condensatorului ideal (c). În coloana a treia din figura 3.14 sunt reprezentate grafic variațiile în timp ale valorilor instantanee ale curenților şi tensiunilor la bornele acestor elemente.

Din relațiile (3.73) rezultă că defazajul curentului *i* față de tensiunea la borne *u* diferă la elementele ideale de circuit, după cum urmează:

- la rezistorul ideal intensitatea curentului este în fază cu tensiunea la borne;

- în cazul bobinei ideale intensitatea curentului este defazată cu π/2, în urma tensiunii la borne (ceea ce corespunde unui defazaj în timp de *T*/4);

- la condensatorul ideal, intensitatea curentului este defazată cu π/2, înaintea tensiunii la borne (respectiv cu −π/2, în urma tensiunii la borne).

Aceste defazaje sunt vizibile în diagramele vectoriale şi în diagramele valorilor instantanee indicate în figura 3.14.

În metoda simbolică, un circuit liniar pasiv de impedanță complexă $\underline{Z}$ având complexul tensiunii la borne $\underline{U}$ şi complexul curentului $\underline{I}$ se reprezintă aşa cum se indică în figura 3.14,d. În dreapta acestui circuit sunt date diagrama vectorială şi diagrama valorilor instantanee corespunzătoare. Se observă faptul că diagrama vectorială redă valorile efective şi defazajul φ mult mai simplu decât diagrama valorilor instantanee.

Pentru determinarea defazajului unei mărimi complexe față de o altă mărime complexă, ambele reprezentate în aceeaşi diagramă vectorială, se porneşte, pe drumul cel mai scurt, de la prima la a doua. Dacă sensul de parcurgere coincide cu sensul trigonometric (sensul invers acelor ceasornicului) atunci defazajul este pozitiv şi mărimea respectivă este defazată în urma celeilalte. De exemplul, curentul *i* al dipolului din figura 3.14,d este defazat cu unghiul φ în urma tensiunii la borne *u*.

3.6. PUTERI ÎN REGIM SINUSOIDAL

Un circuit dipolar liniar pasiv sau activ în regim sinusoidal (fig. 3.15) primeşte pe la borne, conform legii transformării energiei electromagnetice în procesul conducției electrice, puterea instantanee

$$p = ui = 2UI\sin(\omega t + \alpha_u)\sin(\omega t + \alpha_i). \tag{3.74}$$

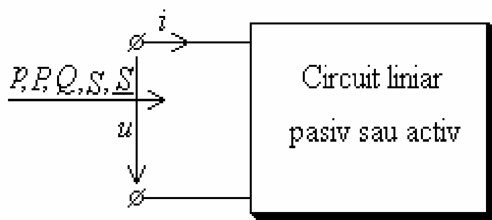


Fig. 3.15. Schema de principiu a unui dipol.

Substituind produsul celor două sinusuri, această putere se aduce la expresia:

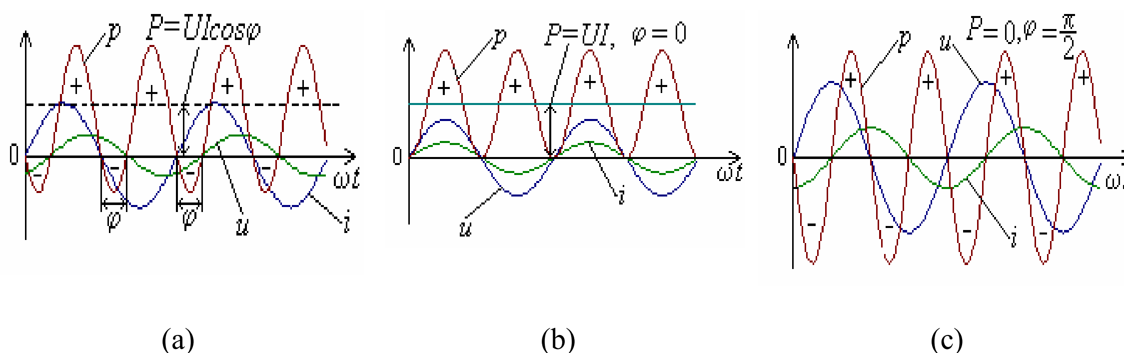
$$p = UI\cos\varphi - UI\cos(2\omega t + \alpha_u + \alpha_i), \tag{3.75}$$

unde φ este defazajul $\varphi = \alpha_u - \alpha_i$.

În figura 3.16 este reprezentată variația în timp a puterii instantanee pentru diferite valori ale defazajului φ. Se observă că puterea

instantanee schimbă semnul în fiecare perioadă, fiind negativă într-un interval de timp corespunzător unghiului de fază egal cu φ. Valoarea medie pe o perioadă a puterii instantanee la U şi I daţi depinde de defazajul φ, fiind nulă pentru $\varphi = \pm\pi/2$ şi maximă pentru $\varphi = 0$. În intervalele de timp $\Delta t = \dfrac{\varphi}{\omega}$, în care puterea instantanee este negativă, energia primită de dipol este negativă. Deci, în aceste intervale de timp dipolul cedează energie (electrică) şi nu primeşte. Astfel, în regim sinusoidal transmiterea de energie, la $\varphi \neq 0$, nu se face într-un singur sens.

Un circuit este prin definiţie un **circuit receptor**, dacă în medie pe o perioadă primeşte mai multă energie decât cedează. **Circuitul generator** este prin definiţie cel care, în medie pe o perioadă, cedează energie.



(a) (b) (c)

Fig. 3.16. Variaţiile în timp ale puterilor în regim armonic.

Puterea instantanee p, puterea aparentă S (vezi § 3.6.2) şi puterea complexă $\underline{S}$ (vezi § 3.6.5) au aceeaşi unitate de măsură în sistemul internaţional de unităţi SI, denumită volt-amper (VA) cu multipli: kilovolt-amper (1 kVA = 10^3 VA), megavolt-amper (1 MVA = 10^6 VA) şi gigavolt-amper (1 GVA = 10^9 VA).

3.6.1. Puterea activă. *Valoarea medie pe o perioadă* (*în orice regim periodic*):

$$P \stackrel{\mathrm{d}}{=} \frac{1}{T}\int_0^T p\mathrm{d}t \tag{3.76}$$

se numeşte putere activă. Puterea activă primită pe la borne de un dipol corespunde sensurilor de referinţă de la receptoare (fig. 3.15). Unitatea de putere activă în sistemul internaţional de unităţi SI este wattul (W) cu multipli: kilowattul (1 kW = 10^3 W), megawattul (1 MW = 10^6 W) şi gigawattul (1 GW = 10^9 W).

Pentru cazul particular al regimului sinusoidal, puterea activă a unui dipol este egală cu produsul dintre valoarea efectivă a tensiunii la borne, valoarea efectivă a intensităţii curentului electric şi $\cos\varphi$:

$$P = UI\cos\varphi. \tag{3.77}$$

Expresia (3.77) rezultă din faptul că **puterea fluctuantă** - $UI\cos(2\omega t + \alpha_u + \alpha_i)$, care constituie termenul al doilea al puterii instantanee (3.75), are valoarea medie nulă pe o perioadă de timp $T = 2\pi/\omega$.

Puterea activă a unui dipol pasiv se poate exprima, pe baza relaţiilor (3.59) şi (3.62), în formele:

$$P = RI^2 = GU^2. \tag{3.78}$$

Puterea activă P corespunzătoare pierderilor prin efect Joule-Lenz $p_J = Ri^2$, într-un rezistor liniar de rezistență R parcurs de un curent de intensitate i, este proporțională cu pătratul valorii efective I a intensității

$$P_J = \frac{1}{T}\int_0^T p_J \mathrm{d}t = R\frac{1}{T}\int_0^T i^2 \mathrm{d}t = RI^2 \ . \tag{3.79}$$

Evident un receptor are o puterea activă (primită) pozitivă, iar un generator are o putere activă (primită) negativă.

Elementele ideale dipolare pasive de circuit au puterile active

$$P_R = RI^2 = GU^2; \ P_L = 0; \ P_C = 0 \, , \tag{3.80}$$

unde indicii R, L, C corespund respectiv rezistorului ideal, bobinei ideale şi condensatorului ideal.

3.6.2. Puterea aparentă. *Puterea aparentă S a unui dipol este,* prin definiție*, produsul dintre valoarea efectivă a tensiunii U şi valoarea efectivă I a intensității curentului electric la bornele acestuia*

$$S \overset{\mathrm{d}}{=} UI \ . \tag{3.81}$$

În funcție de impedanța reală sau admitanța reală, puterea aparentă are expresiile:

$$S = ZI^2 = YU^2 . \tag{3.82}$$

Trebuie remarcat faptul că puterea aparentă exprimă cea mai mare putere activă care se poate realiza la tensiune U dată şi intensitate I dată.

În cazul particular al elementelor ideale dipolare pasive de circuit, puterea aparentă se poate exprima în formele:

$$S_R = UI = RI^2 = GU^2; \ S_L = UI = \omega LI^2 = \frac{1}{\omega L}U^2 \text{ şi } S_C = UI = \frac{1}{\omega C}I^2 = \omega CU^2 \tag{3.83}$$

Raportul dintre puterea activă şi puterea aparentă se numeşte **factor de putere** (al dipolului)

$$k_P \overset{\mathrm{d}}{=} \frac{P}{S} = cos\,\varphi . \tag{3.84}$$

În transportul energiei electrice se urmăreşte ameliorarea factorului de putere, în sensul creşterii valorii acestuia cât mai aproape de valoarea sa maximă, care este egală cu unitatea. Importanța acestei probleme derivă din faptul că pierderile de putere, prin efect Joule- Lenz pe o linie bifilară (cu două conductoare) (fig. 3.17) sunt invers proporționale cu pătratul factorului de putere $cos\varphi$, la o linie cu rezistența R_l dată, intensitate (valoare efectivă) I, tensiune (valoare efectivă) U şi putere transmisă P, date:

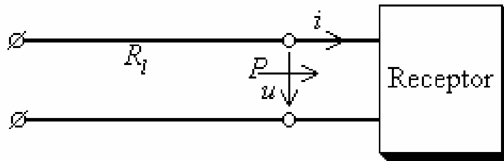


Fig. 3.17. Linie electrică bifilară lungă.

$$P_J = R_l I^2 = R_l \frac{P^2}{U^2 \, cos^2 \, \varphi} . \tag{3.85}$$

3.6.3. Puterea reactivă. *Puterea reactivă primită de un dipol* (fig. 3.15) *cu tensiunea u şi curentul i sinusoidale* (3.53) *este,* prin definiție

$$Q \overset{\mathrm{d}}{=} UI \sin\varphi, \tag{3.86}$$

unde φ este defazajul curentului în urma tensiunii. Puterea reactivă se măsoară în sistemul internațional de unități SI în var* (prescurtarea expresiei volt-amper-reactiv) cu multiplii: kilovar (1 kvar = 10^3 var), megavar (1 Mvar = 10^6 var) şi gigavar (1 Gvar = 10^9 var).

Dacă defazajul este inductiv $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, puterea reactivă rezultă pozitivă, prin urmare este primită de dipolul receptor şi cedată de dipolul generator; dacă defazajul este capacitiv $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$, puterea reactivă rezultă negativă, prin urmare este cedată de dipolul receptor şi este primită de dipolul generator.

Utilizând relațiile (3.59), (3.61) şi (3.62), puterea reactivă se poate exprima şi sub formele:

$$Q = XI^2 = BU^2. \tag{3.87}$$

Puterea reactivă (primită) pe la borne de elementele ideale pasive de circuit este:

$$Q_R = 0, \quad Q_L = \omega L I^2 = \frac{1}{\omega L} U^2, \quad Q_C = -\frac{1}{\omega C} I^2 = -\omega C U^2. \tag{3.88}$$

3.6.4. Relații între puterile active, reactive şi aparente ale unui dipol. Relațiile de definiție ale puterilor activă P (3.77), reactivă Q (3.86) şi aparentă S (3.81) conduc la:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}; \quad \frac{Q}{P} = tg\varphi \tag{3.89}$$

şi

$$P = S\cos\varphi; \quad Q = S\sin\varphi, \tag{3.90}$$

în care φ este defazajul dintre tensiunea şi curentul la bornele dipolului căruia îi corespund.

3.6.5. Puterea complexă. *Produsul dintre complexul tensiunii şi complexul conjugat al curentului de la bornele unui dipol*

$$\underline{S} \overset{\mathrm{d}}{=} \underline{U}\,\underline{I}^*, \tag{3.91}$$

este, prin definiție, *puterea complexă*.

Cu asterisc s-a simbolizat conjugatul mărimii complexe. Din relațiile (3.56) rezultă:

$$\underline{S} = UIe^{j(\alpha_u - \alpha_i)} = UIe^{j\varphi} = UI(\cos\varphi + j\sin\varphi) \tag{3.92}$$

şi deci

$$\underline{S} = P + jQ. \tag{3.93}$$

Denumirea **var** a fost propusă de acad. prof. ing. C. I. Budeanu (1886-1959) şi adoptată în anul 1930 de Comisia Electrotehnică Internațională (CEI)

Din relația (3.93) se constată că puterea activă este partea reală a puterii complexe, iar puterea reactivă este partea imaginară a acesteia

$$P = \mathrm{Re}\{\underline{S}\}; \; Q = \mathrm{Im}\{\underline{S}\}. \tag{3.94}$$

Modulul puterii complexe este egal cu puterea aparentă

$$|\underline{S}| = \left|\underline{U}\,\underline{I}^*\right| = S. \tag{3.95}$$

Conjugatul puterii complexe este

$$\underline{S}^* = \underline{U}^*\underline{I} = UIe^{-j\varphi} = UI(\cos\varphi - j\sin\varphi) = P - jQ, \tag{3.96}$$

ceea ce arată că partea reală este egală cu P, iar cea imaginară cu - Q.

Ca orice mărime complexă şi puterea complexă se poate reprezenta printr-un vector (fig. 3.18). Orientarea vectorului $\underline{S}$, determinată de valoarea unghiului φ, puterile active şi reactive au semnele indicate (prin inegalităţi) în figura 3.18.

În cazul în care sensurile de referinţă sunt asociate după regula de la receptoare (fig. 3.15) puterile (3.74), (3.77), (3.86) şi (3.91) sunt puteri primite, în caz contrar (fig. 3.19) ele sunt puteri cedate. Termenul primit sau cedat se referă la sensul de referinţă al puterilor p, P, Q şi $\underline{S}$, care au valori algebrice.

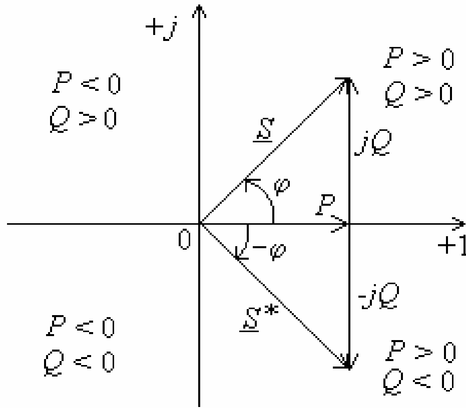


Fig. 3.18. Reprezentarea vectorială a puterilor în c.a.

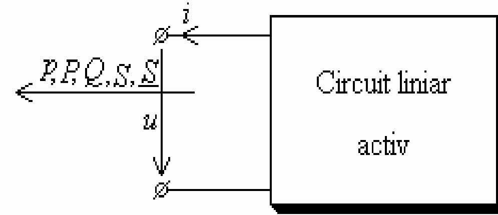


Fig. 3.19. Asocierea sensurilor de referinţă de la generatoare.

De exemplu, o bobină ideală ($\varphi_L = \frac{\pi}{2}$), pentru o asociere a sensurilor de referinţă ca în figura 3.15, are o putere reactivă primită pozitivă. În consecinţă, bobina este un receptor de putere reactivă.

Un condensator ideal ($\varphi_C = -\frac{\pi}{2}$), pentru o asociere a sensurilor de referinţă ca în figura 3.15, are o putere reactivă primită negativă. Prin urmare, condensatorul este generator de putere reactivă (dă o putere reactivă pozitivă).

Pentru un dipol pasiv, utilizând legea lui Ohm în complex, rezultă:

$$\underline{S} = \underline{Z}\,\underline{I}\,\underline{I}^* = \underline{Z}I^2; \quad \underline{S}^* = \underline{U}^*\underline{Y}\,\underline{U} = \underline{Y}U^2 \; . \tag{3.97}$$

Luând în consideraţie relaţiile (3.57) şi (3.61), separând părţile reale şi imaginare ale acestor expresii, se regăsesc expresiile cunoscute (3.78) şi (3.87) ale puterii active şi reactive

$$P = RI^2 = GU^2; \;\; Q = XI^2 = BU^2. \tag{3.98}$$

Când dipolul considerat este o sursă ideală independentă de tensiune, operând cu convenţia de asociere a sensurilor de referinţă de la generatoare pentru o t.e.m.

$$e = \sqrt{2}E\sin(\omega t + \alpha_e) \tag{3.99}$$

şi o intensitate de curent

$$i = \sqrt{2}I\sin(\omega t + \alpha_e - \psi) \tag{3.100}$$

rezultă:

$$\underline{U} = \underline{E} = Ee^{j\alpha_e} \text{ şi } \underline{I} = Ie^{j(\alpha_e - \psi)}. \tag{3.101}$$

Prin urmare, puterea complexă dată de sursa ideală independentă de tensiune este:

$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* = \underline{E}\,\underline{I}^* = EI\cos\psi + jEI\sin\psi\,. \tag{3.102}$$

Deci, conform relației (3.94) puterea activă, respectiv reactivă generată de sursă au expresiile

$$P = EI\cos\psi;\quad Q = EI\sin\psi, \tag{3.103}$$

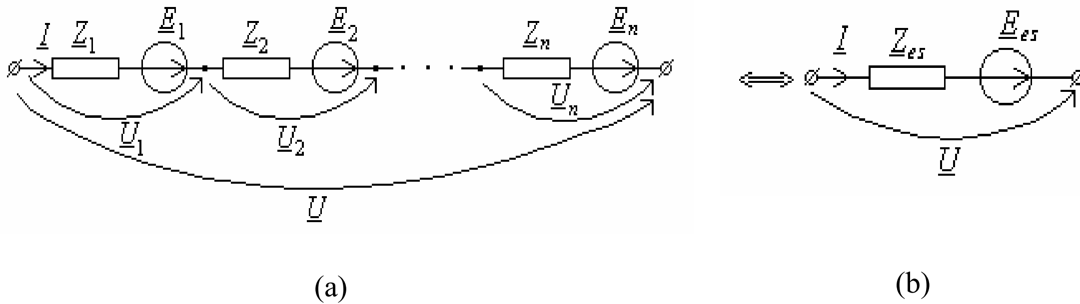
în care ψ este defazajul curentului față de t.e.m. a sursei ideale. Se observă că P şi Q pot avea acelaşi semn sau semne diferite, în funcție de valorile defazajului ψ. Pentru $\psi = -\pi/4$, sursa considerată este generator de putere activă şi receptor de putere reactivă ($Q < 0$). Când $\psi = 3\pi/4$, "sursa" este receptor de putere activă ($P < 0$) şi generator de putere reactivă.

3.7. CIRCUITE ELECTRICE FĂRĂ CUPLAJE MAGNETICE ÎN REGIM SINUSOIDAL

3.7.1. Circuite serie

Un circuit serie este, prin definiție, format din elemente dipolare de circuit, parcurse de un acelaşi curent. Fie n dipoli liniari activi caracterizați de $(\underline{E}_k, \underline{Z}_k), k = \overline{1,n},$ conectați în serie ca în figura 3.20,a. Dacă aceste elemente nu au cuplaje magnetice între ele şi cu exteriorul, tensiunea la bornele lor este, conform relației (3.52)

$$\underline{U}_k = \underline{Z}_k \underline{I} - \underline{E}_k;\ k = \overline{1,n}. \tag{3.104}$$



(a) (b)

Fig. 3.20. a) Circuitul serie; b) Circuitul echivalent.

Din teorema tensiunilor la borne rezultă:

$$\underline{U} = \sum_{k=1}^{n} \underline{U}_k . \tag{3.105}$$

Substituind relația (3.104) în relația (3.105), se obține:

$$\underline{U} = \left(\sum_{k=1}^{n} \underline{Z}_k\right)\underline{I} - \sum_{k=1}^{n} \underline{E}_k . \tag{3.106}$$

Această relație corespunde unui dipol activ (fig. 3.20,b), pentru care

$$\underline{U} = \underline{Z}_{es}\underline{I} - \underline{E}_{es}. \tag{3.107}$$

Din relațiile (3.106) şi (3.107) rezultă:

$$\underline{E}_{es} = \sum_{k=1}^{n} \underline{E}_k \tag{3.108}$$

şi

$$\underline{Z}_{es} = \sum_{k=1}^{n} \underline{Z}_k . \tag{3.109}$$

Relaţia (3.108) exprimă faptul că *valoarea complexă a t.e.m. echivalente a circuitului serie este egală cu suma reprezentărilor în complex ale t.e.m. ale elementelor înseriate*.

Din relaţia (3.109) rezultă că *impedanţa complexă a unui circuit serie este egală cu suma impedanţelor complexe componente*.

Relaţiile (3.108) şi (3.109) sunt forme identice cu cele obţinute la circuitele de curent continuu. Plecând de la analogia formală dintre circuitele electrice de c.a. în complex şi circuitele de c.c. (vezi § 3.4) se poate arăta simplu că n dipoli activi caracterizaţi de parametrii $(\underline{J}_k, \underline{Y}_k), k = \overline{1,n},$ conectaţi în serie se pot echivala cu un dipol echivalent ai cărui parametri au expresiile:

$$\underline{J}_{es} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{\underline{J}_k}{\underline{Y}_k}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\underline{Y}_k}}; \quad \frac{1}{\underline{Y}_{es}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\underline{Y}_k}. \tag{3.110}$$

Impedanţa complexă echivalentă serie, ca şi impedanţele complexe ale dipolilor înseriaţi, au ca parte reală o rezistenţă electrică şi ca parte imaginară o reactanţă

$$\underline{Z}_{es} = R_{es} + jX_{es}; \quad \underline{Z}_k = R_k + jX_k . \tag{3.111}$$

Egalând părţile reale şi, respectiv, părţile imaginare din cei doi membri ai relaţiei (1.109), rezultă:

$$R_{es} = \sum_{k=1}^{n} R_k; \quad X_{es} = \sum_{k=1}^{n} X_k . \tag{3.112}$$

Adică, *rezistenţa* (*reactanţa*) *echivalentă a unui circuit serie este egală cu suma rezistenţelor (reactanţelor) elementelor înseriate*.

În cazul particular, când cei n dipoli conectaţi în serie sunt pasivi ($\underline{E}_k = 0,\ k = \overline{1,n}$), tensiunea complexă $\underline{U}_k$ de la bornele impedanţei complexe $\underline{Z}_k$ are expresia:

$$\underline{U}_k = \underline{U} \frac{\underline{Z}_k}{\sum_{k=1}^{n} \underline{Z}_k}, \quad k = \overline{1,n}. \tag{3.113}$$

Relaţia (3.113) reprezintă **regula divizorului de tensiune**, care exprimă complexul tensiunii de la bornele impedanţei $\underline{Z}_k$ în funcţie de complexul tensiunii aplicate la bornele circuitului şi impedanţele complexe ale dipolilor pasivi conectaţi în serie.

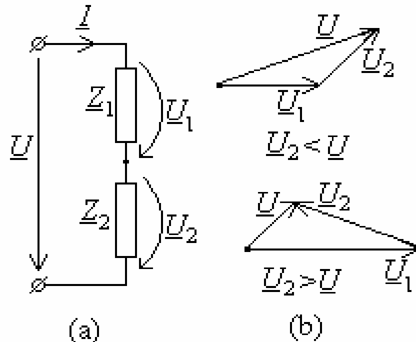


Fig. 3.21. Schema divizorului de tensiune.

La un circuit compus din doi dipoli conectaţi în serie (fig. 3.21,a), tensiunea complexă $\underline{U}$ aplicată la bornele circuitului se divide în tensiunile complexe $\underline{U}_1$ şi $\underline{U}_2$ la bornele celor doi dipoli. Relaţia (3.112) devine:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \text{ şi, respectiv,} \quad \underline{U}_2 = \underline{U}\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \tag{3.114}$$

În general, tensiunea efectivă U_2 poate fi mai mică sau mai mare decât tensiunea efectivă U aplicată divizorului (fig. 3.21,b). Pentru măsurarea tensiunilor înalte U, tensiunea U_2 fiind mai mică, se aleg dipoli astfel încât, fie

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0 \tag{3.315}$$

şi divizorul este *potenţiometric*, fie

$$\varphi_1 = \varphi_2 = -\frac{\pi}{2}, \tag{3.116}$$

şi divizorul este *capacitiv*.

3.7.2. Circuitul serie *R*, *L*, *C* şi rezonanţa de tensiune

Un dipol liniar pasiv se află la **rezonanţă** dacă

$$\varphi = 0 \quad \text{sau } Q = 0 \text{ sau } X = \mathrm{Im}\{\underline{Z}\} = 0. \tag{3.117}$$

În consecinţă, un dipol pasiv în regim sinusoidal (sau un circuit electric) se află la rezonanţă dacă la bornele sale tensiunea şi curentul sunt în fază, adică se comportă rezistiv. De regulă, pentru calculul frecvenţelor (pulsaţiilor) de rezonanţă se foloseşte ultima relaţie din expresia (3.117), care este o ecuaţie în ω.

Fie circuitul *RLC* serie, reprezentat în figura 3.22, pentru care impedanţa complexă are expresia

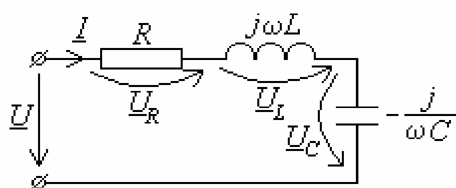


Fig. 3.22. Circuit *RLC* serie.

$$\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \tag{1.118}$$

Deci, condiţia ca $X = 0$ implică:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0, \tag{1.119}$$

din care rezultă pulsaţia de rezonanţă:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{3.120}$$

Condiţia (3.120) se numeşte de **rezonanţă** şi este satisfăcută pentru frecvenţa tensiunii aplicate f_0,

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \tag{3.121}$$

numită **frecvenţă de rezonanţă**.

În diagramele vectoriale reprezentate în figura 3.23, pentru $\omega < \omega_0$, $\omega = \omega_0$ şi $\omega > \omega_0$, locul geometric al vârfului vectorului tensiunii $\underline{U}_R = R\underline{I}$ şi deci al curentului $\underline{I}$ este un cerc. La rezonanţă, vectorii (fazorii) tensiunilor la bornele bobinei $\underline{U}_{L0}$ şi condensatorului $\underline{U}_{C0}$ au valori egale oricât de mari (mai mari decât ale tensiunii aplicate $\underline{U}$), iar suma lor este nulă (vectorii sunt în opoziţie de fază). Din acest motiv rezonanţa în circuitul *RLC* serie se numeşte **rezonanţă de tensiune**.

Legat de acest fenomen, se defineşte factorul de calitate Q_c al circuitului

$$Q_c \stackrel{d}{=} \frac{U_{L_0}}{U} = \frac{U_{C_0}}{U} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{R_0}{R}, \tag{3.122}$$

unde s-a notat cu R_0, parametrul de dimensiunea unei rezistențe

$$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}. \tag{3.123}$$

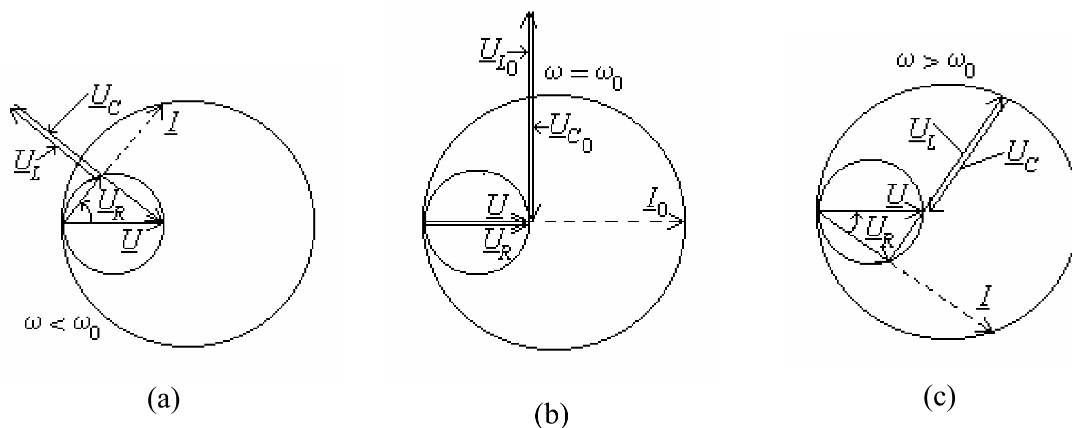


Fig. 3.23. Diagramele fazoriale la diferite pulsații.

Valoarea efectivă a curentului I are expresia

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \tag{3.124}$$

şi are valoarea maximă la rezonanță când $\omega = \omega_0$

$$I_{max} = I_0 = \frac{U}{R}. \tag{3.125}$$

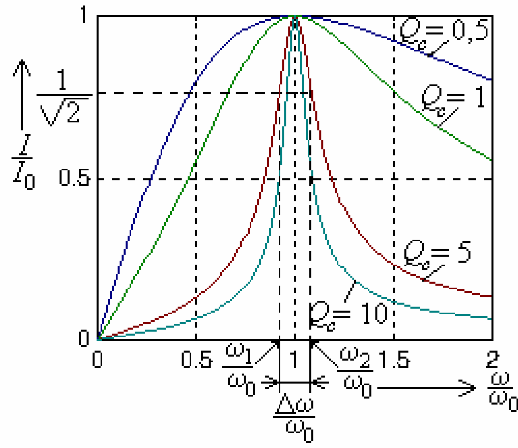
Expresia valorii efective a curentului I raportată la valoarea curentului la rezonanță I_0 este:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_c^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}. \tag{3.126}$$

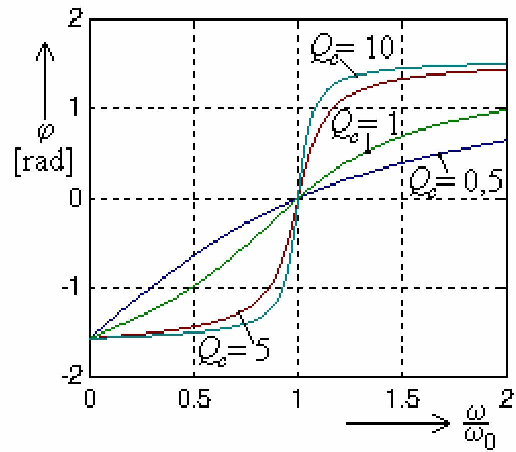
Defazajul φ al curentului în raport cu tensiunea aplicată este dat de expresia:

$$\varphi = arctg\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = arctgQ_c\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right). \qquad (3.127)$$

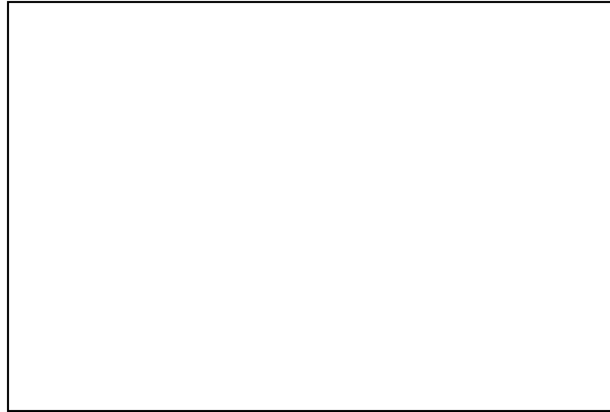
În figurile 3.24,a şi, respectiv, b sunt reprezentate caracteristicile de frecvenţă $\frac{I}{I_0} = f\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ şi, respectiv, $\varphi = g\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$, indicându-se influenţa factorului de calitate Q_c asupra curbelor.



(a)



(b)



(c)

Fig. 3.24. Caracteristicile de frecvenţă corespunzătoare rezonanţei de tensiune.

Variaţiile tensiunilor $\frac{U_L}{U} = f\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ şi $\frac{U_C}{U} = g\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ prezintă de asemenea interes. Relaţiile care determină aceste mărimi sunt:

$$U_L = \omega L I = \frac{\omega}{\omega_0}\frac{\omega_0 L}{R} R I = Q_c U \frac{\dfrac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1+Q_c^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{U_L}{U} = Q_c \frac{\dfrac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1+Q_c^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \tag{3.128}$$

şi, respectiv

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I = \frac{\omega_0}{\omega}\frac{1}{\omega_0 C R} R I = Q_c U \frac{\dfrac{\omega_0}{\omega}}{\sqrt{1+Q_c^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{U_C}{U} = Q_c \frac{\dfrac{\omega_0}{\omega}}{\sqrt{1+Q_c^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}. \tag{3.129}$$

Valorile maxime pentru mărimile U_L şi U_C se obţin pentru pulsaţiile:

$$\omega_L = \omega_0 \frac{Q_c\sqrt{2}}{\sqrt{2Q_c^2 - 1}} > \omega_0 \tag{3.130}$$

şi, respectiv

(3.131) ,

prin anularea derivatelor de ordinul întâi ale celor două funcţii.

Valorile maxime ale mărimilor U_L şi U_C au expresiile

(3.132) .

Reprezentarea grafică a celor două tensiuni raportate la tensiunea de alimentare, în funcţie de pulsaţie raportată la pulsaţia de rezonanţă, se prezintă în figura 3.24,c, unde

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\omega_L}{\omega_0} - \frac{\omega_C}{\omega_0} = \frac{1}{Q_c\sqrt{2}\sqrt{2Q_c^2 - 1}}. \tag{3.133}$$

După scopul urmărit în circuitele respective, fenomenul de rezonanţă în circuitul *RLC* serie poate fi apreciat în mod diferit, după cum urmează:

- ca un fenomen periculos în sistemul electroenergetic, deoarece pot apare supratensiuni periculoase care pot avea ca efect străpungerea izolaţiilor, putând fi deci o sursă de avarii;
- ca fenomen util în circuitele de curenţi slabi, unde caracteristicile de frecvenţă exprimă banda de trecere pentru $I / I_0 \geq 1/\sqrt{2}$ (fig. 3.24,a). În consecinţă:

$$\frac{I}{I_0}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow 1+Q_c^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2=2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Q_c\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)=\pm 1 \text{ sau } \frac{\omega_2}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega_2}=\frac{1}{Q_c};\ \frac{\omega_1}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega_1}=-\frac{1}{Q_c}. \tag{3.134}$$

Din relația (3.134) rezultă:

$$\omega_1\omega_2=\omega_0^2;\quad \frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_0}=\frac{\Delta\omega}{\omega_0}=\frac{1}{Q_c}. \tag{3.135}$$

Circuitul este cu atât mai selectiv cu cât $\Delta\omega$ este mai mic, deci cu cât factorul de calitate Q_c este mai mare.

La variații mici $\Delta\omega_r = \Delta\omega/\omega_0$, ale pulsației relative în jurul pulsației de rezonanță $\omega_r = \omega/\omega_0 = 1$ corespund variații $\Delta I_r = \Delta I/I_0$, ale valorii relative a intensității curentului, care se pot aproxima prin relația

$$\Delta I_r=-2Q_c^2(\Delta\omega_r)^2. \tag{3.136}$$

Sub aspect energetic, rezonanța de tensiune se caracterizează prin faptul că întreaga putere instantanee primită de circuit se transformă prin efect Joule-Lenz ireversibil în căldură

$$p=ui=(u_R+u_L+u_C)i=u_Ri=Ri^2. \tag{3.137}$$

Energia electromagnetică se transformă oscilând din formă electrică în formă magnetică, şi invers, astfel încât suma dintre energia înmagazinată în condensator şi energia înmagazinată în bobină este constantă şi egală cu valoarea maximă a energiei electrice a condensatorului, respectiv a energiei magnetice a bobinei:

$$W_e+W_m=\frac{Cu_C^2}{2}+\frac{Li_L^2}{2}=\frac{C}{2}\left(\sqrt{2}\frac{1}{\omega_0 C}I\right)^2\sin^2\left(\omega_0 t+\alpha_u-\varphi-\frac{\pi}{2}\right)+ \tag{3.138}$$

$$+\frac{L}{2}\left(\sqrt{2}I\right)^2\sin^2(\omega_0 t+\alpha_u-\varphi)=\frac{LI_m^2}{2}=\frac{CU_{Cm}^2}{2}.$$

În relația (3.138) s-a ținut seama de valoarea pulsației de rezonanță (3.120) şi s-au notat cu indicele m valorile maxime $I_m=\sqrt{2}I$, respectiv $U_{Cm}=\sqrt{2}U_C$.

Exemplul 3.5: **Undametrul** este un aparat alcătuit dintr-o bobină reală de rezistență R şi inductivitate L, conectată în serie cu un condensator de capacitate variabilă C şi cu un ampermetru A (fig. 3.25). Bobina este plasată într-un câmp electromagnetic extern (de exemplu undele electromagnetice ale unui post de radio-emisie). Fluxul magnetic extern φ_{ext} stabilit prin bobină poate fi practic considerat sinusoidal

$$\varphi_{ext}=\Phi_{\max}\sin(\omega t+\alpha). \tag{3.139}$$

Conform legii inducției electromagnetice în bobină se induce o t.e.m.

$$e=-\frac{d\varphi_{ext}}{dt}. \tag{3.140}$$

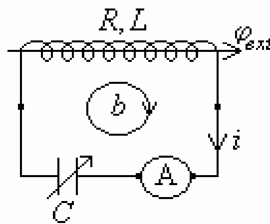


Fig. 3.25. Schema electrică a undametrului.

Aplicând a doua teoremă a lui Kirchhoff pe bucla (b), în regim variabil, (fig. 3.25) rezultă:

$$Ri+L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int i dt=e. \tag{3.141}$$

Ecuația (3.141) diferă de ecuația circuitului *RLC* serie din figura 3.22 prin faptul că în locul tensiunii la borne apare t.e.m. *e*. Ca urmare curentul din circuitul undametrului are valoarea efectivă maximă I_0 la R, L şi φ_{ext} daţi, dacă se reglează capacitatea condensatorului la valoarea C_0, corespunzătoare rezonanței

$$C_0 = \frac{1}{\omega^2 L}. \tag{3.142}$$

Practic se variază capacitatea condensatorului până când ampermetrul indică valoarea maximă a curentului I. În acest caz, frecvența fluxului magnetic f este egală cu frecvența de rezonanța a circuitului

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}}. \tag{3.143}$$

Poziția butonului de reglaj al condensatorului C, marcată prin gradații, permite citirea directă a frecvenței f sau a lungimii de undă corespunzătoare ($\lambda = c_0/f$, $c_0 = 3.10^8$ m/s fiind viteza luminii în vid).

3.7.3. Circuite derivație

Circuitele formate din elemente de circuit dipolare conectate la aceleaşi două borne (fig. 3.26,a) se numesc **circuite derivație** sau **circuite paralel**. Toate elementele de circuit dipolare legate în derivație au aceeaşi tensiune la borne u. Fie n dipoli liniari activi caracterizați de $(\underline{E}_k, \underline{Z}_k)$, $k = \overline{1,n}$, conectați în paralel ca în figura 3.26,a.

Aplicând prima teoremă a lui Kirchhoff în unul din nodurile circuitului derivație, rezultă complexul intensității curentului (total) la bornele circuitului derivație

$$\underline{I} = \sum_{k=1}^{n} \underline{I}_k. \tag{3.144}$$

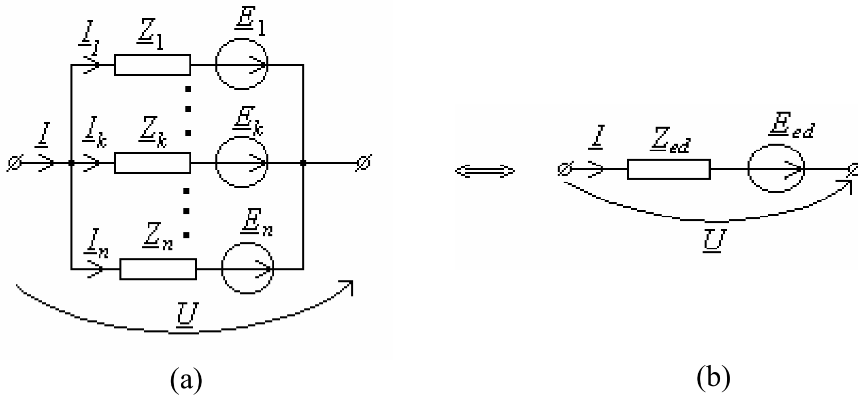


Fig. 3.26. a) Circuitul derivație (paralel); b) Circuitul echivalent.

Din teorema lui Joubert (3.51) rezultă complexul intensității curentului:

$$\underline{I}_k = \frac{1}{\underline{Z}_k}\underline{U} + \frac{\underline{E}_k}{\underline{Z}_k} = \underline{Y}_k\underline{U} + \underline{Y}_k\underline{E}_k,\ k = \overline{1,n}, \tag{3.145}$$

unde $\underline{Y}_k = 1/\underline{Z}_k$, $k = \overline{1,n}$.

Substituind relația (3.145) în relația (3.144), rezultă:

$$\underline{I} = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\underline{Z}_k}\right)\underline{U} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\underline{E}_k}{\underline{Z}_k} \tag{3.146}$$

sau

$$\underline{I} = \left(\sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k \right) \underline{U} + \sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k \underline{E}_k \ . \tag{3.147}$$

Relațiile (3.146) şi (3.147) corespund unui circuit format dintr-o sursă ideală de tensiune şi un dipol pasiv conectate în serie (fig. 3.26,b):

$$\underline{I} = \frac{1}{\underline{Z}_{ed}} \left(\underline{U} + \underline{E}_{ed} \right) = \underline{Y}_{ed} \left(\underline{U} + \underline{E}_{ed} \right), \tag{3.148}$$

cu o impedanță complexă

$$\frac{1}{\underline{Z}_{ed}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\underline{Z}_k} \tag{3.149}$$

şi, respectiv o admitanță complexă

$$\underline{Y}_{ed} = \sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k \ . \tag{3.150}$$

Complexul t.e.m. echivalente este

$$\underline{E}_{ed} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{\underline{E}_k}{\underline{Z}_k}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\underline{Z}_k}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k \underline{E}_k}{\sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k} . \tag{3.151}$$

Circuitul serie, din figura 3.26,b, este deci echivalent cu circuitul derivație din figura 3.26,a.

Inversul impedanței complexe echivalente (*admitanța complexă echivalentă*) *a circuitului derivație* $1/\underline{Z}_{ed}$ $\left(\underline{Y}_{ed}\right)$ *este egal cu suma inverselor impedanțelor complexe* (*cu suma admitanțelor complexe*) *ale elementelor dipolare conectate în derivație* (3.149) ((3.150)).

Tensiunea electromotoare echivalentă a unui circuit derivație $\underline{E}_{ed}$ se exprimă în funcție de impedanțele complexe $\underline{Z}_k$ sau admitanțele complexe $\underline{Y}_k$ şi complexele t.e.m. $\underline{E}_k$ ale dipolilor componenți, conectați în derivație, prin relația (3.151).

Între conductanțele şi susceptanțele admitanțelor complexe ale dipolilor componenți şi cele ale dipolului echivalent rezultă, din relația (3.150), relațiile:

$$G_{ed} = \sum_{k=1}^{n} G_k \tag{3.152}$$

şi, respectiv

$$B_{ed} = \sum_{k=1}^{n} B_k \ . \tag{3.153}$$

Aceste relații arată că *circuitul derivație are o conductanță* (*susceptanță*) *echivalentă egală cu suma conductanțelor* (*susceptanțelor*) *dipolilor legați în derivație*.

Relațiilor (3.144) şi (3.150) le corespund diagrame vectoriale de curenți, respectiv de admitanțe, în planul complex. Aceste diagrame arată că vectorii corespunzători curentului total $\underline{I}$ şi admitanței complexe echivalente $\underline{Y}_{ed}$ se obțin prin însumarea vectorială a vectorilor corespunzători curenților $\underline{I}_k$, respectiv admitanțelor complexe $\underline{Y}_k$.

Relațiile (3.149) şi (3.150) sunt formal identice cu cele obținute la circuitele de curent continuu. Plecând de la analogia formală dintre circuitele electrice de c.a. în complex şi circuitele de c.c. (vezi § 3.4) se poate arăta simplu că *n* dipoli activi caracterizați de parametrii

$(\underline{J}_k, \underline{Y}_k), k = \overline{1,n},$ conectați în paralel se pot echivala cu un dipol echivalent ai cărui parametri au expresiile:

$$\underline{J}_{ed} = \sum_{k=1}^{n} \underline{J}_k; \quad \underline{Y}_{es} = \sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k. \qquad (3.154)$$

În cazul particular, când cei n dipoli conectați în derivație sunt pasivi ($\underline{E}_k = 0,\ k = \overline{1,n}$), curentul complex $\underline{I}_k$ prin admitanța complexă $\underline{Y}_k$, conform relațiilor (3.145) şi (3.147) are expresia:

$$\underline{I}_k = \underline{I} \frac{\underline{Y}_k}{\sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k}, \quad k = \overline{1,n}. \qquad (3.155)$$

Relația (3.155) reprezintă **regula divizorului de curent**.

Pentru $n = 2$, relația (3.155) devine:

$$\underline{I}_1 = \underline{I} \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} \text{ şi, respectiv, } \underline{I}_2 = \underline{I} \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}, \qquad (3.156)$$

iar relațiile (3.149) şi, respectiv (3.150) au forma:

$$\underline{Z}_{ed} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \text{ şi, respectiv, } \underline{Y}_{ed} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2. \qquad (3.157)$$

3.7.4. Circuitul *R*, *L*, *C* derivație şi rezonanța de curent

Pentru început se consideră circuitul *RLC* derivație cu bobină ideală, reprezentat în figura 3.27, pentru care admitanța complexă echivalentă este:

$$\underline{Y}_{ed} = \frac{1}{R} - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right). \qquad (3.158)$$

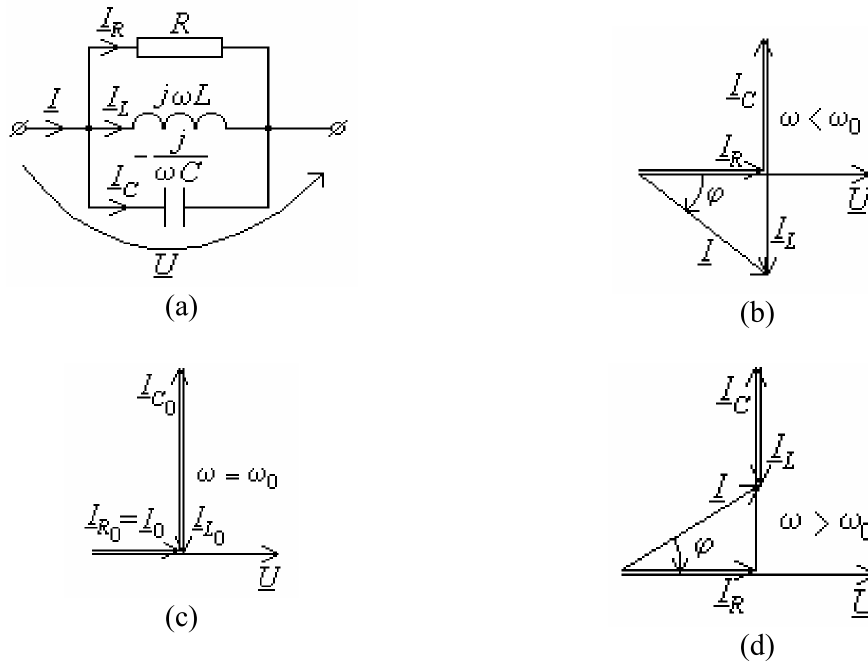


Fig. 3.27. Circuitul *RLC* derivație şi diagramele fazoriale pentru trei valori diferite ale pulsației.

Condiția de rezonanță $X = 0$ sau $B = 0$ este echivalentă cu relația:

$$\frac{1}{\omega L} = \omega C = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \tag{3.159}$$

identică cu cea de la circuitul *RLC* serie.

În figura 3.27 s-au reprezentat diagramele vectoriale ale curenților pentru: $\omega < \omega_0$ (fig. 3.27,b), $\omega = \omega_0$ (fig. 3.17,c) şi $\omega > \omega_0$ (fig. 3.27,d).

Factorul de calitate al circuitului are expresia:

$$Q_c \overset{d}{=} \frac{I_{L_0}}{I_0} = \frac{I_{C_0}}{I_0} = \frac{U}{\omega_0 L} \cdot \frac{R}{U} = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{R}{R_0}, \tag{3.160}$$

unde

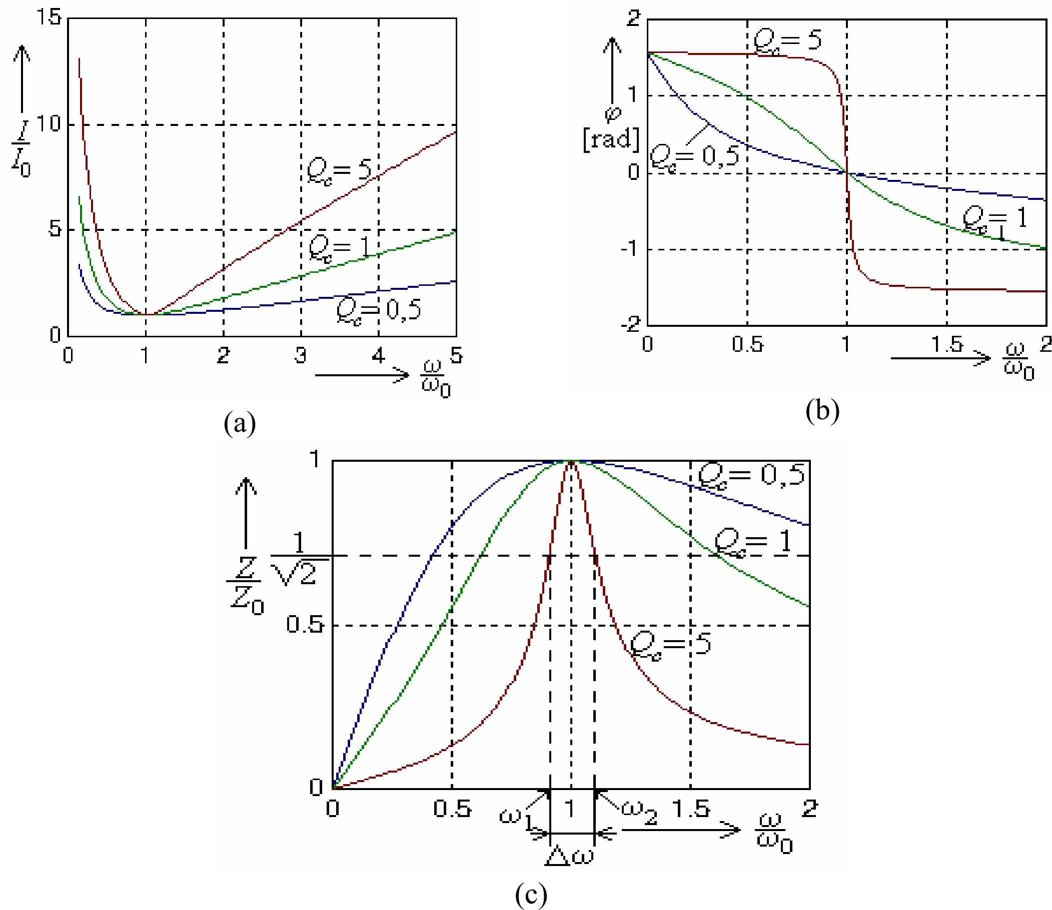
$$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}, \tag{3.161}$$

Valoarea efectivă a curentului I are expresia

$$I = YU = U\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2} \tag{3.162}$$

şi are valoarea minimă la rezonanță când $\omega = \omega_0$

$$I_{min} = I_0 = \frac{U}{R}. \tag{3.163}$$



(c)

Fig. 3.28. Caracteristicile de frecvență corespunzătoare rezonanței de curent.

Expresia valorii efective a curentului I raportată la valoarea curentului la rezonanță I_0 este:

$$\frac{I}{I_0} = \sqrt{1 + Q_c^2\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\ . \tag{3.164}$$

Defazajul φ al curentului în raport cu tensiunea aplicată este dat de expresia:

$$\varphi = arctg\,\frac{B}{G} = arctg\,\frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{1/R} = arctg Q_c\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right). \tag{3.165}$$

În figurile 3.28,a şi, respectiv, b sunt reprezentate caracteristicile de frecvență $\frac{I}{I_0} = f\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ şi, respectiv, $\varphi = g\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$, indicându-se influența factorului de calitate Q_c asupra curbelor. În figura 3.28,c s-a reprezentat grafic variația modulului impedanței complexe echivalente a circuitului din figura 3.26, raportat la modulul de la rezonanță $Z_0 = R$

$$\frac{Z}{Z_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_c^2\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}, \tag{3.166}$$

pe care se defineşte banda de trecere

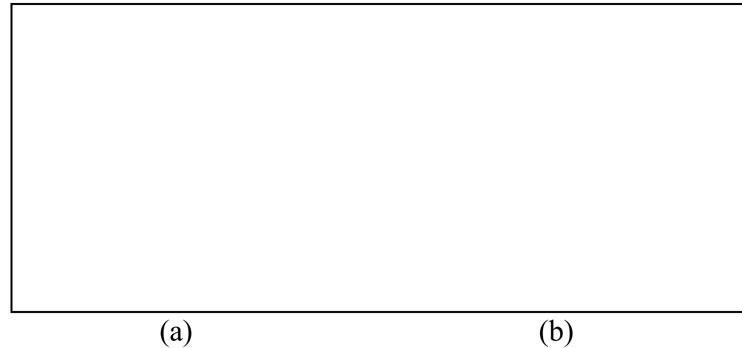
$$\frac{Z}{Z_0} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{3.167}$$

La egalitate se obține:

$$\sqrt{1 + Q_c^2\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\omega_0}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{1}{Q_c}; \frac{\omega_2}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_2} = \frac{1}{Q_c}. \tag{3.168}$$

Ca şi în cazul circuitului *RLC* se serie, rezultă:

$$\omega_1\omega_2 = \omega_0^2;\ \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q_c}. \tag{3.169}$$



(a) (b)

Fig. 3.29. Circuite *RLC* paralel reale.

Se observă că la rezonanță (fig. 3.27,c) curenții prin bobină şi prin condensator satisfac relația:

$$I_{L_0} = I_{C_0} = Q_c I_0, \tag{3.170}$$

deci, aceşti curenţi pot depăşi de Q_c ori curentul total de la bornele circuitului, iar suma lor vectorială este nulă (vectorii sunt în opoziţie de fază). Acesta este motivul pentru care rezonanţa circuitului *RLC* paralel se numeşte **rezonanţă de curent**.

În practică însă trebuie analizat circuitul *RLC* real. În figura 3.29,a se prezintă circuitul teoretic (cu R_p şi L_p), iar în figura 3.29,b se prezintă circuitul real (cu R_s şi L_s, cazul bobinei reale).

Analizând circuitul cu condensator în paralel cu bobină reală, reprezentat în figura 3.29,a şi comparându-l cu cel cu bobină reală (fig. 3.29,b) se obţine relaţia de echivalenţă dintre cele două circuite

$$R_s + j\omega L_s = \frac{R_p j\omega L_p}{R_p + j\omega L_p}, \tag{3.171}$$

din care rezultă:

$$R_p = \frac{R_s^2 + \omega^2 L_s^2}{R_s};\ X_p = \frac{R_s^2 + \omega^2 L_s^2}{\omega L_s}. \tag{3.172}$$

Factorul de calitate în cazul circuitului *RLC* serie este

$$Q_c = \frac{R_p}{X_{p0}} = \frac{X_{s0}}{R_s}. \tag{3.173}$$

La rezonanţă sunt valabile relaţiile:

$$Z_{p0} = R_p = R_s + \frac{X_{s0}^2}{R_s} = R_s\left(1 + Q_c^2\right) \cong R_s Q_c^2;\ Z_{p0} \cong \frac{X_{s0}^2}{R_s} = \frac{X_{s0} X_{C0}}{R_s} = \frac{L_s}{CR_s}. \tag{3.174}$$

Relaţia

$$\frac{1}{\omega_0 C} = X_{p0} = \frac{R_s^2 + \omega_0^2 L_s^2}{\omega_0 L_s}, \tag{3.175}$$

se poate scrie în două moduri

$$\frac{L_s}{C} = R_s^2 + \omega_0^2 L_s^2 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_s C}}\sqrt{1 - \frac{CR_s^2}{L_s}} \tag{3.176}$$

şi

$$\frac{1}{\omega_0 C} = \omega_0 L_s \frac{1 + Q_c^2}{Q_c^2} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_s C}} \frac{Q_c}{\sqrt{1 + Q_c^2}}. \tag{3.177}$$

Din cele de mai sus rezultă următoarele concluzii:

1) Pulsaţia reală de rezonanţă este mai mică decât cea ideală (calculată cu valorile L_s şi C)

$$\omega_{0,real} < \omega_{0,ideal} = \frac{1}{\sqrt{L_s C}}; \tag{3.178}$$

2) Pulsaţia reală de rezonanţă depinde de rezistenţa din circuit R_s;

3) Dacă

$$\frac{CR_s^2}{L_s} > 1 \tag{3.179}$$

nu există frecvenţă de rezonanţă;

4) Dacă factorul de calitate Q_c are o valoare suficient de mare (de exemplu $Q_c > 10$), atunci se poate lua cu o aproximaţie suficient de bună

$$\omega_{0,real} \cong \frac{1}{\sqrt{L_s C}};\tag{3.180}$$

5) Deoarece R_p este funcţie de ω, impedanţa circuitului paralel real este maximă la o pulsaţie diferită de pulsaţia de rezonanţă şi anume

$$\omega' = \frac{1}{\sqrt{L_s C}}\sqrt{1-\frac{1}{4Q_c^2}}.\tag{3.181}$$

Prin urmare

$$\omega_0 < \omega' < \frac{1}{\sqrt{L_s C}},\tag{3.182}$$

ultima relaţie fiind valabilă pentru $Q_c > \frac{1}{\sqrt{3}}$.

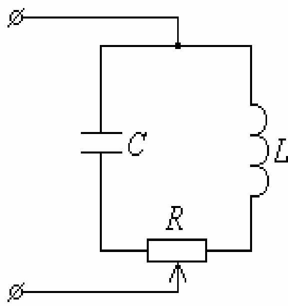


Fig. 3.30. Circuit cu rezistenţă variabilă.

Valoarea Q_c = 1/2 se numeşte **amortisment critic** şi se traduce prin lipsa frecvenţelor la care impedanţa să fie maximă. Acest caz se aplică la eliminarea oscilaţiilor dispozitivelor mobile ale voltmetrelor, la circuitele TV pentru frecvenţe definite de inductivităţile şi capacităţile repartizate;

6) O aplicaţie importantă, unde apare rezonanţa paralel, este circuitul din figura 3.30 în care se utilizează o rezistenţă reglabilă pentru modificarea frecvenţei de rezonanţă f_0, în scopul compensării eventualelor influenţe ale unei sarcini dintr-un circuit complex asupra acestei frecvenţe.

Proprietăţile circuitului *RLC* real paralel se pot folosi la obţinerea **controlului automat al frecvenţei** (**CAF**), utilizat la radioreceptoarele de clasă în banda de modulaţie în frecvenţă.

3.8. CIRCUITE CU CONEXIUNE MIXTĂ UTILIZATE ÎN TEHNICĂ

3.8.1. Circuite care debitează un curent sinusoidal independent de sarcină

Se consideră circuitul electric din figura 3.31,a.

Complexul curentului prin impedanţa de sarcină $\underline{Z}_s$ se calculează cu regula divizorului de curent (3.156)

$$\underline{I}_s = \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_s} = \underline{U}\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_s\left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2\right)}.\tag{3.183}$$

Dacă

$$\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = 0,\tag{3.184}$$

atunci curentul de sarcină este independent de impedanţa laturii, iar circuitul este un generator de curent constant numit şi **circuit Boucherot**.

Satisfacerea condiţiei (3.184) implică relaţiile:

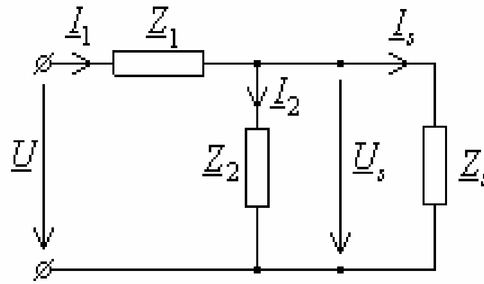
$$R_1 + R_2 = 0 \text{ şi } X_1 + X_2 = 0.\tag{3.185}$$

Deoarece rezistenţele nu pot fi negative, rezultă:

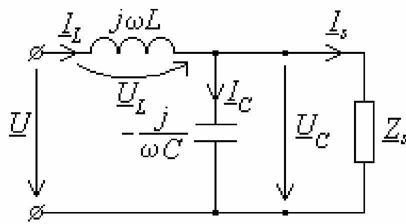
$$R_1 = R_2 = 0 \text{ şi } X_1 = -X_2,\tag{3.186}$$

adică circuitul trebuie realizat cu elemente pur reactive în variantele din figura 3.31,b sau c, în care bobina şi condensatorul trebuie să satisfacă condiţia de rezonanţă

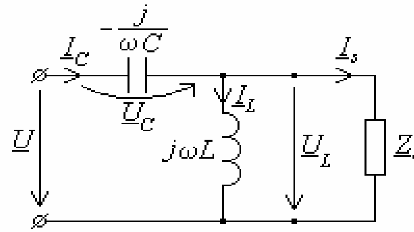
$$\omega L = \frac{1}{\omega C}. \quad (3.187)$$



(a)



(b)



(c)

Fig. 3.31. Circuite cu conexiune mixtă utilizate în tehnică.

Realizarea practică a unui astfel de circuit, elementele de circuit nefiind ideale, impune satisfacerea condiției

$$Z_s << \frac{Z_1 Z_2}{R_1 + R_2}. \quad (3.188)$$

Curentul debitat de generator va fi

$$\underline{I}_s = \mp j\sqrt{\frac{C}{L}}\underline{U}, \quad (3.189)$$

sensul minus corespunzând schemei din figura 3.31,b, iar semnul plus celei din figura 3.31,c. Valoarea efectivă a acestui curent este deci

$$I_s = \sqrt{\frac{C}{L}}U, \quad (3.190)$$

iar defazajul în raport cu tensiunea la borne

$$\varphi = \pm\frac{\pi}{2}. \quad (3.191)$$

Se observă că la tensiune la borne cu valoare efectivă constantă puterea activă primită de circuit $P = R_s I_s^2$ este proporțională cu rezistența sarcinii $R_s = \mathrm{Re}\{\underline{Z}_s\}$. La un astfel de circuit nu este periculos scurtcircuitul ($R_s = 0$), cu $P_{sc} = 0$, ci mersul în gol ($R_s \to \infty$), pentru care puterea activă P, tensiunile U_L, U_C şi curenții I_L, I_C devin infiniți. Trebuie deci evitată deconectarea sarcinii la circuitele Boucherot, pentru a nu se produce tensiuni şi curenți foarte mari în bobină şi în condensator, valori ce ar putea distruge circuitul şi ar periclita securitatea persoanelor care utilizează aceste circuite. În practică, bobina are întotdeauna o rezistență care produce o oarecare variație a curentului de sarcină în funcție de impedanța acesteia.

În circuitul reprezentat în figura 3.32, curentul $\underline{I}_5$ este independent de impedanța complexă $\underline{Z}_5$, dacă este satisfăcută una din condițiile:

$$\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = 0 \text{ sau } \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 = 0 . \tag{3.192}$$

Demonstrarea relației (3.192) se face simplu folosind teorema lui Thévenin

$$\underline{I}_5 = \frac{\underline{U}_{AB0}}{\underline{Z}_5 + \underline{Z}_{AB0}}, \tag{3.193}$$

unde:

$$\underline{U}_{AB0} = \underline{Z}_3 \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} - \underline{Z}_1 \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \underline{U} \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 - \underline{Z}_1 \underline{Z}_4}{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)} \tag{3.194}$$

şi

$$\underline{Z}_{AB0} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} + \frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_4}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} . \tag{3.195}$$

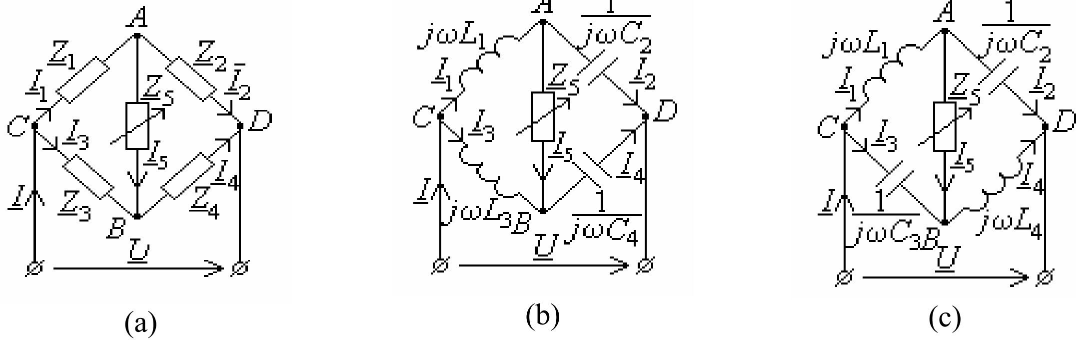


Fig. 3.32. Circuite punți în c.a.

Introducând relațiile (3.194) şi (3.195) în relația (3.193) rezultă:

$$\underline{I}_5 = \underline{U} \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 - \underline{Z}_1 \underline{Z}_4}{\underline{Z}_5(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4) + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4) + \underline{Z}_3 \underline{Z}_4 (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}, \tag{3.196}$$

de unde se observă că dacă este satisfăcută condiția (3.192), curentul $\underline{I}_5$ este independent de impedanța complexă $\underline{Z}_5$. Dacă: $\underline{Z}_1 = j\omega L_1$; $\underline{Z}_2 = 1/j\omega C_2$ sau $\underline{Z}_1 = 1/j\omega C_1$; $\underline{Z}_2 = j\omega L_2$ şi $\underline{Z}_3 = j\omega L_3$; $\underline{Z}_4 = 1/j\omega C_4$ sau $\underline{Z}_3 = 1/j\omega C_3$; $\underline{Z}_4 = j\omega L_4$ figura 3.32,b şi, respectiv, figura 3.32,c, condiția (3.192) este îndeplinită.

3.8.2. Circuite dipolare complet rezistive

Circuitele dipolare complet rezistive sunt circuite a căror impedanță complexă este independentă de frecvență, deşi conțin în structura lor elemente de circuit reactive. Impedanța echivalentă complexă a circuitul dipolar pasiv din figura 3.33,a are expresia

$$\underline{Z}_e = \frac{R \cdot j\omega L}{R + j\omega L} + \frac{R \cdot \left(-\frac{j}{\omega C}\right)}{R - -\frac{j}{\omega C}} = R \frac{2\frac{L}{C} + jR\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R^2 + \frac{L}{C} + jR\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} . \tag{3.197}$$

Dacă

$$R = \sqrt{\frac{L}{C}} \tag{3.198}$$

impedanța echivalentă complexă a dipolului devine

$$\underline{Z}_e = R. \tag{3.199}$$

Analog, circuitul reprezentat în figura 3.33,b are impedanța complexă echivalentă

$$\underline{Z}_e = \sum_{k=1}^{n} R_k \tag{3.200}$$

dacă sunt îndeplinite condițiile

$$R_k = \sqrt{\frac{L_k}{C_k}},\ j = \overline{1,n}. \tag{3.201}$$

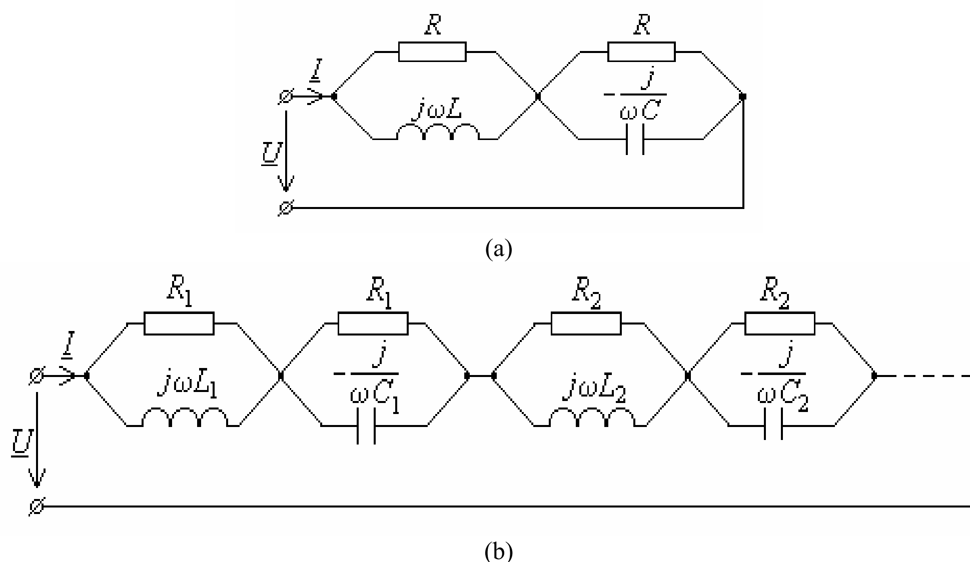


Fig. 3.33. Circuite complet rezistive (Circuite rezonante pe orice armonică – Circuite dop).

Circuitul dipolar pasiv din figura 3.34,a este de asemenea un circuit complet rezistiv cu impedanța complexă echivalentă dată de relația (3.199), dacă este satisfăcută relația (3.200), iar circuitul reprezentat în figura 3.34,b are impedanța (3.200) dacă sunt îndeplinite condițiile (3.201).

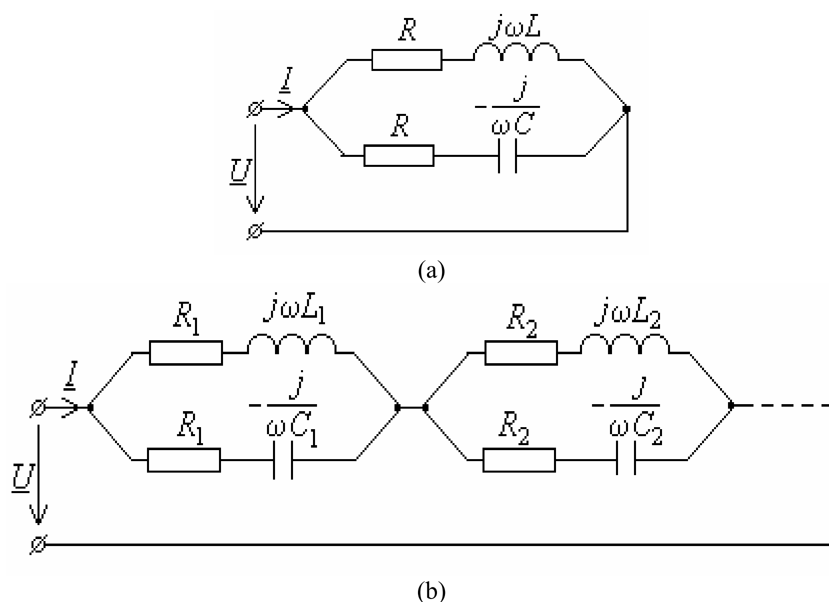


Fig. 3.34. Circuite complet rezistive (Circuite rezonante pe orice armonică – Circuite dop).

3.8.3. Circuit destinat măsurării inductivităților

În paralel cu bobina reală (de inductivitate L şi rezistență R) se conectează (fig. 3.35) un condensator de capacitate variabilă C. Se reglează capacitatea condensatorului C la valoarea C_0 pentru care valoarea efectivă a intensității curentului I_0 indicată de ampermetrul A este aceeaşi indiferent dacă întrerupătorul K este închis sau deschis. Această situație are loc când admitanța complexă a condensatorului (pentru K deschis) este identică cu admitanța complexă echivalentă a circuitului format prin conectarea condensatorului C în paralel cu bobina (întrerupătorul K închis).

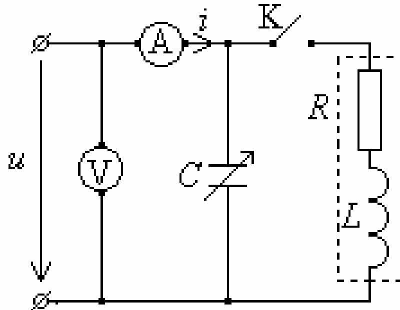


Fig. 3.35. Circuit destinat măsurării inductivităților.

Egalând pătratele modulelor acestor admitanțe, rezultă:

$$(\omega C_0)^2 = \left(\frac{R}{R^2+\omega^2 L^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega L}{R^2+\omega^2 L^2} - \omega C_0\right)^2 \tag{3.202}$$

adică

$$R^2+\omega^2 L^2 - 2\left(R^2+\omega^2 L^2\right)\omega^2 C_0 L = \\ = \left(R^2+\omega^2 L\right)\left(1-2\omega^2 C_0 L\right) = 0 . \tag{3.203}$$

Pentru egalitatea acestor admitanțe este deci necesar şi suficient să fie satisfăcută condiția

$$L = \frac{1}{2\omega^2 C_0}. \tag{3.204}$$

Neglijând căderea de tensiune de la bornele ampermetrului, rezultă:

$$\omega C_0 = \frac{I_0}{U}. \tag{3.205}$$

În consecință, inductivitatea bobinei se poate calcula cu relația

$$L = \frac{1}{2\omega}\frac{U}{I_0}, \tag{3.206}$$

în funcție de pulsația ω a tensiunii de alimentare (presupusă cunoscută), valoarea efectivă a acestei tensiunii U, măsurată de voltmetrul V, şi în funcție de valoarea efectivă a curentului I_0, măsurată de ampermetrul A.

3.9. TEOREMELE CIRCUITELOR ELECTRICE ÎN REGIM SINUSOIDAL

3.9.1. Teorema transferului maxim de putere activă

Fie un generator real de curent alternativ care are t.e.m. complexă $\underline{E}$ şi impedanța complexă internă $\underline{Z}_i = R_i + jX_i$, care alimentează un receptor de impedanță complexă $\underline{Z} = R + jX$ (fig. 3.36).

Teorema transferului maxim de putere activă stabileşte condițiile necesare şi suficiente în care generatorul debitează o putere activă maximă pe receptorul de impedanță complexă $\underline{Z}$.

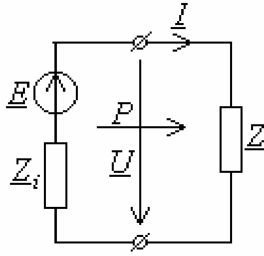


Fig. 3.36. Schema circuitului.

Enunț. *Un generator de t.e.m.* $\underline{E}$ *şi impedanță complexă internă* $\underline{Z}_i = R_i + jX_i$ *date debitează în regim sinusoidal o putere activă maximă*

$$P_{max} = \frac{E^2}{4R_i}, \tag{3.207}$$

atunci când impedanța complexă $\underline{Z}$ a *receptorului conectat la bornele sale are o rezistență R egală cu rezistența internă a generatorului şi o reactanță X, egală în valoare absolută şi de semn contrar cu reactanța internă a generatorului.*

Deci impedanța complexă $\underline{Z}$ a receptorului care primeşte putere activă maximă de la un generator dat este egală cu valoarea complex conjugată a impedanței complexe $\underline{Z}_i$ a generatorului

$$\underline{Z} = R_i - jX_i = \underline{Z}_i^*. \tag{3.208}$$

Demonstrație. Conform teoremei a doua a lui Kirchhoff în complex avem

$$\underline{Z}_i \underline{I} + \underline{Z}\,\underline{I} = \underline{E}, \tag{3.209}$$

de unde

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z} + \underline{Z}_i}. \tag{3.210}$$

Substituind impedanțele complexe în funcție de rezistențe şi reactanțe, rezultă:

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{(R + R_i) + j(X + X_i)}. \tag{3.211}$$

Tensiunea complexă de la bornele receptorului are expresia

$$\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + \underline{Z}_i}\underline{E}. \tag{3.212}$$

Puterea activă primită de receptor este

$$P = RI^2 = \frac{R}{(R + R_i)^2 + (X + X_i)^2}E^2. \tag{3.213}$$

La R, R_i, X_i şi E dați, puterea activă (1.220) este maximă în raport cu X pentru

$$X + X_i = 0 \Rightarrow X = -X_i. \tag{3.214}$$

Puterea activă primită de un receptor care satisface relația (1.221) este

$$P = \frac{R}{(R + R_i)^2}E^2. \tag{3.215}$$

Derivând în raport cu rezistența R expresia puterii active (1.222), se obține:

$$\frac{\partial P}{\partial R} = \frac{(R + R_i)^2 - 2(R + R_i)R}{(R + R_i)^4}E^2 = \frac{R_i - R}{(R + R_i)^3}E^2, \tag{3.216}$$

care se anulează pentru

$$R = R_i. \tag{3.217}$$

Ținând seama de semnul derivatei (3.216) se deduce că puterea activă (3.215) are un maxim pentru $R = R_i$

$$P_{max} = \frac{E^2}{4R_i}. \tag{3.218}$$

Consecințe a) Randamentul corespunzător debitării puterii active maxime este

$$\eta = \frac{P_{\max}}{P_{total}} = \frac{RI^2}{(R+R_i)I^2} = \frac{R}{R+R_i} = \frac{1}{2}. \tag{3.219}$$

b) Intensitatea curentului corespunzător puterii maxime rezultă din relația (1.218)

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{2R_i}. \tag{3.220}$$

c) Tensiunea complexă la borne, la putere activă maximă, are expresia

$$\underline{U} = \frac{R+jX}{2R}\underline{E} = \frac{1}{2}\frac{e^{j\varphi}}{\cos\varphi}\underline{E}, \tag{3.221}$$

unde $cos\varphi$ este factorul de putere al receptorului care primeşte puterea activă maximă, egal cu factorul de putere intern $cos\,\varphi_i = \frac{R_i}{Z_i}$.

d) În practică, realizarea condițiilor (3.214) şi (3.214), numită adaptarea receptorului la generator, se realizează (aproximativ) prin intercalarea între generator şi receptor a unui transformator electric (cât mai apropiat de un transformator electric ideal) cu un raport de transformare k adecvat, care "transformă" impedanța în raportul necesar.

Față de primar, o impedanță din secundar se reflectă înmulțită cu k^2. În figura 3.37 se prezintă un exemplu de adaptare, unde sursa poate fi considerată etajul final al unui receptor, iar sarcina un difuzor. În acest caz este necesar un transformator de adaptare cu raportul de transformare

$$k^2 = \frac{R_i}{R} = \frac{1000}{10} = 100 \Rightarrow k = 10. \tag{3.222}$$

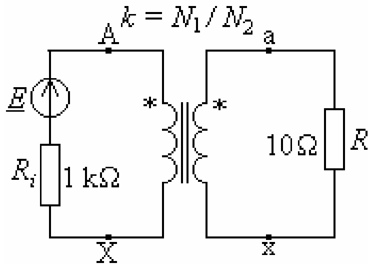


Fig. 3.37. Circuit de adaptare a receptorului la generator.

3.9.2. Teoremele de conservare a puterilor

Puterea complexă primită pe la borne în regim sinusoidal de o latură completă de circuit (fig. 3.9) are expresia

$$\underline{S}_k = \underline{U}_k \underline{I}_k^*, \tag{3.223}$$

în care $\underline{U}_k$, $\underline{I}_k^*$ sunt respectiv complexul tensiunii la borne şi complexul conjugat al intensității curentului la borne, exprimate față de sensurile de referință indicate în figura 3.9 (convenția de asociere pentru receptoare).

Fie $\boldsymbol{\underline{U}}_l$ şi $\boldsymbol{\underline{I}}_l^*$ vectorul tensiunilor complexe ale laturilor circuitului şi, respectiv, vectorul curenților complex conjugați ai laturilor circuitului. Puterea complexă primită de un circuit electric în regim sinusoidal **C**, izolat de exterior, pe la bornele celor l laturi este

$$\underline{S} = \sum_{k=1}^{l} \underline{U}_k \underline{I}_k^* = \underline{\boldsymbol{U}}_l^{\mathrm{t}} \underline{\boldsymbol{I}}_k^*. \tag{3.224}$$

Vectorul $\underline{\boldsymbol{U}}_l$ se poate exprima în funcție de vectorul potențialelor electrice complexe $\underline{\boldsymbol{V}}_{n-1}$, atribuite celor $n-1$ noduri independente ale circuitului C ($\underline{V}_n \overset{\mathrm{d}}{=} 0$), prin relația

$$\underline{\boldsymbol{U}}_l = \boldsymbol{A}^{\mathrm{t}} \underline{\boldsymbol{V}}_{n-1}, \tag{3.225}$$

unde $\boldsymbol{A}$ este matricea redusă de incidență laturi-noduri, de dimensiune $(n-1) \times l$.

Vectorul $\underline{\boldsymbol{I}}_l^*$ se poate exprima în funcție de vectorul $\underline{\boldsymbol{I}}_b^*$ al curenților de buclă complex conjugați, asociați celor b bucle independente ale circuitului C, prin relația

$$\underline{\boldsymbol{I}}_l^* = \boldsymbol{B}^{\mathrm{t}} \underline{\boldsymbol{I}}_b^*, \tag{3.226}$$

în care $\boldsymbol{B}$ este matricea de incidență laturi-bucle având dimensiunea $b \times l$.
Introducând relațiile (3.225) şi (3.226) în relația (3.224) şi ținând seama de proprietatea de ortogonalitate a matricelor $\boldsymbol{A}$ şi $\boldsymbol{B}$ [1], se obține prima formă a teoremei conservării puterilor complexe

$$\underline{S} = \sum_{k=1}^{l} \underline{U}_k \underline{I}_k^* = \underline{\boldsymbol{U}}_l^{\mathrm{t}} \underline{\boldsymbol{I}}_k^* = \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}} \underline{\boldsymbol{V}}_{n-1}\right)^{\mathrm{t}} \left(\boldsymbol{B}^{\mathrm{t}} \underline{\boldsymbol{I}}_b^*\right) = \underline{\boldsymbol{V}}_{n-1}^{\mathrm{t}} \left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{t}}\right) \underline{\boldsymbol{I}}_b^* = 0. \tag{3.227}$$

Separând părțile reale şi cele imaginare, rezultă prima formă a teoremelor de conservare a puterilor active şi reactive

$$P = \sum_{k=1}^{l} U_k I_k \cos\varphi_k = \sum_{k=1}^{l} P_k = 0, Q = \sum_{k=1}^{l} U_k I_k \sin\varphi_k = \sum_{k=1}^{l} Q_k = 0. \tag{3.228}$$

Această primă formă a teoremelor are enunțul: *suma puterilor complexe* (*active, reactive*) *primite de laturile unui circuit electric în regim sinusoidal, izolat de exterior, este nulă.*

Relația (3.227) se mai poate obține şi după cum urmează. Aplicând complexul conjugat primei teoreme a lui Kirchhoff, relația (3.42), rezultă

$$\sum_{l_k \in \left(n_j\right)} {}_{(A)} \underline{I}_k^* = 0. \tag{3.229}$$

Înmulțind la stânga relația (3.229) cu potențialul complex al nodului n_j, $\underline{V}_j$, apoi făcând suma după j de la 1 la n şi ținând seama că tensiunea complexă de la bornele laturii l_k, $\underline{U}_k$, este diferența dintre potențialul complex al nodului de unde pleacă (iese) sensul de referință al laturii l_k şi cel al nodului unde ajunge (intră) sensul laturii l_k, se obține relația (3.227).

Dacă în relația (3.227) se înlocuieşte tensiunea complexa $\underline{U}_k$ cu expresia

$$\underline{U}_k = \underline{Z}_k \underline{I}_k + \sum_{p=1, p\neq k}^{l} j\omega L_{kp} \underline{I}_p - \underline{E}_k, \tag{3.230}$$

rezultată din legea lui Ohm în complex (3.51) pentru structura laturii l_k din figura 3.9,a, se obține:

$$\sum_{k=1}^{l} \underline{E}_k \underline{I}_k^* = \sum_{k=1}^{l} \left(\underline{Z}_k \underline{I}_k + \sum_{p=1, p\neq k}^{l} j\omega L_{kp} \underline{I}_p \right) \underline{I}_k^*. \tag{3.231}$$

Mărimea

$$\underline{S}_G \overset{\mathrm{d}}{=} \sum_{k=1}^{l} \underline{E}_k \underline{I}_k^*, \tag{3.232}$$

numită puterea complexă cedată (debitată) de sursele circuitului, are, pentru circuite ce conține şi surse independente de curent şi surse de curent şi de tensiune comandate, expresia

$$\underline{S}_G \overset{d}{=} \sum_{k=1}^{n_e} \underline{E}_k \underline{I}_k^* + \sum_{k=1}^{n_{ec}} \underline{E}_{ck} \underline{I}_{ck}^* - \sum_{k=1}^{n_j} \underline{U}_{j_k} \underline{J}_k^* - \sum_{k=1}^{n_{jc}} \underline{U}_{j_{ck}} \underline{J}_{ck}^* \tag{3.233}$$

şi

$$\underline{S}_{\underline{Z}} = \underline{S}_c \overset{d}{=} \sum_{k=1}^{nl} \underline{Z}_k I_k^2 + \sum_{k=1}^{l} \left(\sum_{p=1,\, p\neq k}^{l} j\omega L_{kp} \underline{I}_p \right) \underline{I}_k^* , \tag{3.234}$$

numită putere complexă consumată în impedanțele circuitului. Astfel relația (3.231) devine

$$\underline{S}_G = \underline{S}_{\underline{Z}} . \tag{3.235}$$

Membrul drept al relației (3.234) se poate scrie şi sub forma:

$$\sum_{k=1}^{l} R_k I_k^2 + j\sum_{k=1}^{l} \omega L_k I_k^2 - j\sum_{k=1}^{l} \frac{1}{\omega C_k} I_k^2 + j2\sum_{k} \sum_{p>k} \omega L_{kp} I_k I_p \cos\left(\alpha_{i_k} - \alpha_{i_p}\right), \tag{3.236}$$

unde s-a ținut seama de relația

$$\sum_{k=1}^{l} \left(\sum_{p=1,\, p\neq k}^{l} j\omega L_{kp} \underline{I}_p \right) \underline{I}_k^* = j\sum_{k} \sum_{p>k} \omega L_{kp} \left(\underline{I}_k \underline{I}_p^* + \underline{I}_k^* \underline{I}_p \right) = j2\sum_{k} \sum_{p>k} \omega L_{kp} I_k I_p \cos\left(\alpha_{i_k} - \alpha_{i_p}\right). \tag{3.237}$$

Separând părțile reale şi părțile imaginare ale relației (3.235) şi luând în considerație relațiile (3.233), (3.234) şi (3.236), rezultă:

$$P_G = P_R \text{ şi } Q_G = Q_X , \tag{3.238}$$

unde:

$$P_G = \sum_{k=1}^{n_e} E_k I_k \cos\varphi_k + \sum_{k=1}^{n_{ec}} E_{ck} I_{ck} \cos\varphi_{ck} - \sum_{k=1}^{n_j} U_{j_k} J_k \cos\varphi_{j_k} - \sum_{k=1}^{n_{jc}} U_{j_{ck}} J_{ck} \cos\varphi_{j_{ck}} \tag{3.239}$$

$$P_R = \sum_{k=1}^{l} R_k I_k^2 \tag{3.240}$$

$$Q_G = \sum_{k=1}^{n_e} E_k I_k \sin\varphi_k + \sum_{k=1}^{n_{ec}} E_{ck} I_{ck} \sin\varphi_{ck} - \sum_{k=1}^{n_j} U_{j_k} J_k \sin\varphi_{j_k} - \sum_{k=1}^{n_{jc}} U_{j_{ck}} J_{ck} \sin\varphi_{j_{ck}} \tag{3.241}$$

$$Q_X = Q_L + Q_C = \sum_{k=1}^{l} \omega L_k I_k^2 + 2\sum_{k} \sum_{p>k} \omega L_{kp} I_k I_p \cos\left(\alpha_{i_k} - \alpha_{i_p}\right) - \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{\omega C_k} I_k^2 \tag{3.242}$$

$$Q_L = \sum_{k=1}^{l} \omega L_k I_k^2 + 2\sum_{k} \sum_{p>k} \omega L_{kp} I_k I_p \cos\left(\alpha_{i_k} - \alpha_{i_p}\right),\; Q_C = -\sum_{k=1}^{l} \frac{1}{\omega C_k} I_k^2 = -\sum_{k=1}^{l} \omega C_k U_{C_k}^2 . \tag{3.243}$$

Relațiile (3.235) şi (3.238)-(3.243) constituie a doua formă a teoremei conservării puterilor care are enunțul: *la un circuit electric în regim sinusoidal, izolat de exterior, suma puterilor complexe* (*active, reactive*) *cedate de sursele circuitului este egală cu suma puterilor complexe* (*active, reactive*) *consumate în impedanțele* (*rezistoarele, bobinele şi condensatoarele*) *circuitului*.

P_R este puterea activă disipată în rezistoarele circuitului şi Q_L, respectiv Q_C sunt puterile reactive absorbite de bobinele, respectiv condensatoarele circuitului.

În ecuațiile (3.243) puse sub forma:

$$Q_L = 2\omega W_m ,\; Q_C = -2\omega W_e \tag{3.244}$$

puterile reactive Q_L şi Q_C sunt proporționale cu energiile medii acumulate în câmpul magnetic al bobinelor, respectiv în câmpul electric al condensatoarelor circuitului,

$$W_m = W_L = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{l} L_k I_k^2 + \sum_k \sum_{p>k} L_{pk} I_k I_p \cos\left(\alpha_{i_k} - \alpha_{i_p}\right),\ W_e = W_C = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{l} C_k U_k^2 . \tag{3.245}$$

Fie u şi i, respectiv u' şi i' două valori pereche de tensiuni şi curenți prin elementul de circuit al unui circuit electric în regim sinusoidal

$$u = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \alpha_u);\ i = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \alpha_u - \varphi); \tag{3.246}$$
$$u' = \sqrt{2}U' \sin(\omega t + \alpha_{u'});\ i' = \sqrt{2}I' \sin(\omega t + \alpha_{u'} - \varphi),$$

în care U, I şi U', I' satisfac relația

$$\frac{U}{I} = \frac{U'}{I'} = Z, \tag{3.247}$$

Z fiind modulul impedanței elementului de circuit considerat.

Puterile instantanee încrucişate (pseudoputerile instantanee) ui' şi $u'i$ se descompun fiecare într-un termen constant şi un termen variabil în timp

$$ui' = UI' \cos(\alpha_u - \alpha_{u'} + \varphi) - p_0';\ u'i = U'I \cos(\alpha_{u'} - \alpha_u + \varphi) - p_0', \tag{3.248}$$

în care

$$p_0' = UI' \cos(2\omega t + \alpha_u + \alpha_{u'} - \varphi) = U'I \cos(2\omega t + \alpha_{u'} + \alpha_u - \varphi). \tag{3.249}$$

Dacă: $\alpha_u = \alpha_{u'}$; $U = U'$ şi $I = I'$ se regăseşte puterea activă P şi puterea oscilantă (fluctuantă) p_0 , (relația (3.75))

$$\langle ui' \rangle = \langle u'i \rangle \overset{d}{=} \frac{1}{T}\int_0^T ui' \mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T u'i \mathrm{d}t = P = UI\cos\varphi; \tag{3.250}$$

$$p_0' = p_0 = UI \sin\left(\omega T + 2\alpha_u - \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \tag{3.251}$$

Dacă $\alpha_u = \alpha_{u'} \pm \frac{\pi}{2}; U = U'$ şi $I = I'$, se obține puterea reactivă Q

$$\left\langle u(t) i\left(t + \frac{T}{4}\right)\right\rangle = \left\langle u\left(t - \frac{T}{4}\right) i(t)\right\rangle = UI \sin\varphi = Q . \tag{3.252}$$

Puterea reactivă Q este egală cu media pe o perioadă a produsului dintre tensiunea instantanee $u(t)$ şi curentul $i(t + T/4)$ la momentul $t + T/4$, respectiv media pe o perioadă a produsului dintre curentul instantaneu $i(t)$ şi tensiunea $u(t - T/4)$ la momentul $t - T/4$.

Dacă se aplică teorema lui Tellegen, [1], la momentele t şi $t - \tau$, rezultă teorema de conservare a puterilor încrucişate

$$\sum_{k=1}^{l} u_k(t) i_k(t - \tau) = \sum_{k=1}^{l} u_k(t - \tau) i_k(t) = 0 . \tag{3.253}$$

Din relația (3.253) rezultă conservarea puterilor instantanee $p(t)$, active P, reactive Q şi oscilante (fluctuante) $p_0(t)$

$$p(t) = \sum_{k=1}^{l} u_k(t) i_k(t) = 0;\ P = \sum_{k=1}^{l} \langle p_k(t) \rangle = \langle p(t) \rangle = 0;$$
$$Q = \sum_{k=1}^{l} \langle u_k(t) i_k(t + T/4) \rangle = 0 \text{ şi } \sum_{k=1}^{l} p_{0k}(t) = 0 \tag{3.254}$$

3.9.2.1. Compensarea puterii reactive. Îmbunătățirea factorului de putere

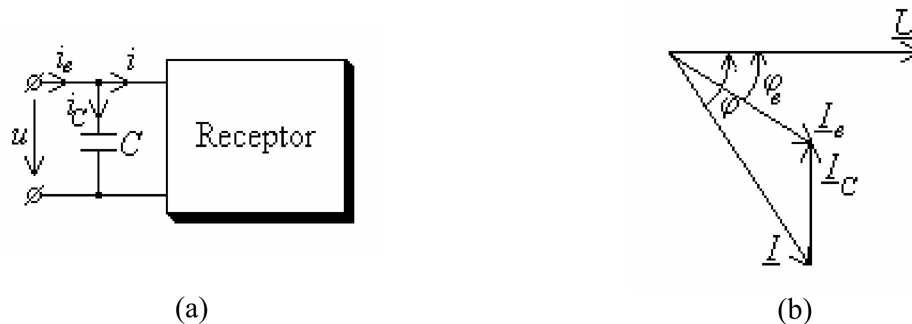
Conductoarele liniilor de distribuție a energiei electrice se dimensionează din punctul de vedere al izolației în funcție de valoarea efectivă a tensiunii U, iar secțiunea conductoarelor se alege în funcție valoarea efectivă a curentului I. Rețelele de transport şi distribuție a energiei electrice sunt utilizate în condiții optime dacă puterile active sunt maxime şi egale cu puterile aparente $S = P = UI$.

În realitate, din cauza defazajului φ dintre tensiune şi curent, puterea activă este mai mică decât puterea aparentă şi rețeaua este utilizată în condiții cu atât mai dezavantajoase cu cât factorul de putere este mai mic. Transferul de putere reactivă prin rețea conduce nu numai la reducerea capacității de transmisie a puterii active, ci şi la pierderi suplimentare de putere activă pe liniile rețelei.

În general, în rețelele electrice de distribuție a energiei electrice, puterea reactivă este de natură inductivă datorită principalilor consumatori inductivi: motoare asincrone, transformatoare etc., dar ea poate fi capacitivă în rețelele cu pondere mare de cabluri (rețele urbane) astfel încât în anumite situații este necesară injectarea de putere reactivă (în rețelele inductive), iar în altele este necesară consumarea ei (în rețelele capacitive).

Această compensare a puterii reactive se poate face la nivelul sistemului electroenergetic, cu ajutorul compensatoarelor sincrone (maşini sincrone funcționând în regim supraexcitat sau subexcitat) sau a compensatoarelor statice (dispozitive alcătuite din bobine şi condensatoare comandate cu punți cu tiristoare).

Îmbunătățirea factorului de putere la nivelul unui receptor se poate realiza principial (fig. 3.38,a) conectând la bornele receptorului un condensator de capacitate C.



(a) (b)

Fig. 3.38. Compensarea factorului de putere.

Capacitatea necesară obținerii unui factor de putere impus $\cos\varphi_e$, superior factorului de putere cosφ sub care receptorul absoarbe puterea activă P, puterea reactivă Q şi la o tensiune de alimentare care are valoarea efectivă U şi pulsația ω, se obține simplu din teoremele de conservare a puterilor

$$P_e = P + P_C \text{ şi } Q_e = Q + Q_C. \tag{3.255}$$

Puterile activă şi reactivă absorbite de condensator fiind

$$P_C = 0;\ Q_C = -B_C U^2 = -\omega C U^2, \tag{3.256}$$

şi exprimând puterile reactive cu relațiile

$$Q_e = P_e tg\varphi_e = P tg\varphi_e; Q = P tg\varphi, \tag{3.257}$$

rezultă:

$$C = \frac{P(tg\varphi - tg\varphi_e)}{\omega U^2}. \tag{3.258}$$

În figura 3.38,b s-a desenat diagrama vectorială a curenţilor corespunzătoare relaţiei complexe

$$\underline{I}_e = \underline{I}_C + \underline{I} \tag{3.259}$$

cu

$$\underline{I}_C = j\omega C\underline{U} \tag{3.260}$$

şi presupunând $\alpha_u = 0$.

Realizarea unui factor de putere unitar ($\varphi = 0$), corespunzătoare rezonanţei, necesită o capacitate

$$C = \frac{Ptg\varphi}{\omega U^2}. \tag{3.261}$$

3.9.3. Transfigurarea stea-poligon complet

Conectarea a n laturi într-un nod comun (fig. 3.39,a) formează un circuit în stea. Nodul 0 se numeşte punct neutru.

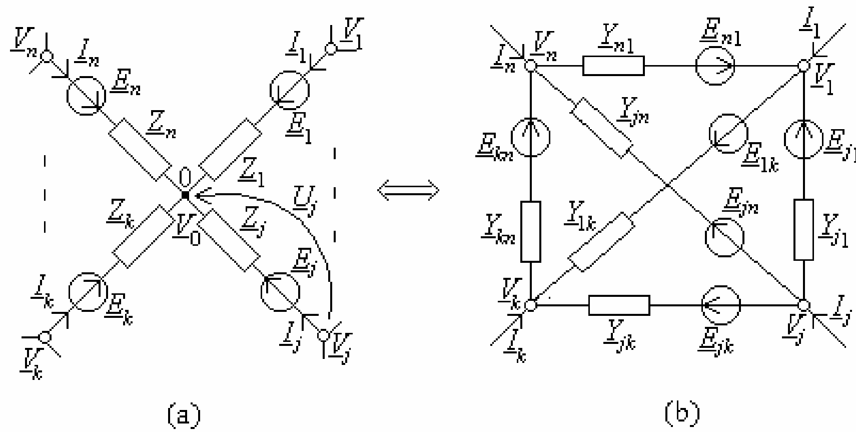


Fig. 3.39. Transfigurarea stea – poligon complet.

Curentul complex $\underline{I}_j$ care intră în borna de acces j a circuitului stea, poate fi exprimat cu teorema lui Joubert (3.52)

$$\underline{I}_j = \underline{Y}_j \underline{U}_j + \underline{Y}_j \underline{E}_j, \qquad j = \overline{1,n}. \tag{3.262}$$

Exprimând tensiunea complexă $\underline{U}_j$ ca diferenţă de potenţiale, se obţine:

$$\underline{I}_j = \underline{Y}_j \underline{V}_j - \underline{Y}_j \underline{V}_0 + \underline{Y}_j \underline{E}_j. \tag{3.263}$$

Aplicând prima teoremă a lui Kirchhoff în nodul 0 rezultă:

$$\sum_{j=1}^{n} I_j = \sum_{j=1}^{n} G_j V_j - V_0 \sum_{j=1}^{n} G_j + \sum_{j=1}^{n} G_j E_j = 0, \tag{3.264}$$

din care se determină potenţialul complex al punctului neutru:

$$\underline{V}_0 = \frac{\sum_{j=1}^{n} \underline{Y}_j \underline{V}_j + \sum_{j=1}^{n} \underline{Y}_j \underline{E}_j}{\sum_{j=1}^{n} \underline{Y}_j}. \tag{3.265}$$

Substituind relația (3.265) în (3.263) şi modificând notația indicelui în raport cu care se face însumarea în (3.265), se obține:

$$\begin{aligned} \underline{I}_j &= \underline{Y}_j \underline{V}_j - \frac{\sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k \underline{V}_k + \sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k \underline{E}_k}{\sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k} \underline{Y}_j + \underline{Y}_j \underline{E}_j = \\ &= \frac{\underline{Y}_j}{\sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k} \left(\underline{V}_j \sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k - \sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k \underline{V}_k - \sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k \underline{E}_k + \underline{E}_j \sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k \right) = \\ &= \frac{\underline{Y}_j}{\sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k} \left(\sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k \underline{U}_{jk} + \sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k (\underline{E}_j - \underline{E}_k) \right), \qquad j = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{3.266}$$

Se poate găsi totdeauna un circuit în poligon complet (fig.1.41,b) echivalent unui circuit în stea dat.

Valoarea complexă a curentului din latura j_k, $\underline{I}_{jk}$, se determină cu ajutorul teoremei lui Joubert:

$$\underline{I}_{jk} = \underline{Y}_{jk} \underline{U}_{jk} + \underline{Y}_{jk} \underline{E}_{jk}, \tag{3.267}$$

iar curentul $\underline{I}_j$ care intră în borna de acces j, se determină cu ajutorul primei teoreme a lui Kirchhoff, în funcție de curenții laturilor poligonului

$$\underline{I}_j = \sum_{k=1, k\neq j}^{n} \underline{Y}_{jk} \underline{U}_{jk} + \sum_{k=1, k\neq j}^{n} \underline{Y}_{jk} \underline{E}_{jk}, \qquad j = \overline{1,n}. \tag{3.268}$$

Comparând relațiile (3.266) şi (3.268), se obține:

$$\underline{Y}_{jk} = \frac{\underline{Y}_j \underline{Y}_k}{\sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k}, \quad \text{pentru} \quad j,k = \overline{1,n} \quad \text{şi} \quad j \neq k \tag{3.269}$$

şi

$$\sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_{jk} \underline{E}_{jk} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\underline{Y}_j \underline{Y}_k}{\sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k} (\underline{E}_j - \underline{E}_k), \text{ pentru} \quad j = \overline{1,n} \quad \text{şi} \quad k \neq j. \tag{3.270}$$

Deoarece, pentru circuitele reciproce, $\underline{Y}_{jk} = \underline{Y}_{kj}$, numărul relațiilor independente de forma (3.269) este

$$n_Y = \frac{n(n-1)}{2}. \tag{3.271}$$

Aceste ecuații permit calculul tuturor admitanțelor complexe ale poligonului complet. Numărul de ecuații independente de tipul (3.270) este

$$n_E = n - 1. \tag{3.272}$$

Cum în cazul general numărul de surse de tensiune este egal cu cel al admitanțelor şi cum $n_E < n_Y$ rezultă că sistemul de ecuații (3.270) este nedeterminat. Relațiile de tip (3.270) sunt satisfăcute dacă

$$\underline{E}_{jk} = \underline{E}_j - \underline{E}_k, \quad \text{pentru} \quad j,k = \overline{1,n} \tag{3.273}$$

În consecință, relațiile de transfigurare a unui circuit cu conexiune stea într-un circuit cu conexiune poligon complet sunt (3.269) şi (3.273).

În general, transfigurarea inversă (din poligon complet în stea) nu este posibilă deoarece numărul n al admitanțelor complexe necunoscute $\underline{Y}_k$ este mai mic decât numărul ecuațiilor de tip (3.269), cu excepția cazului $n = 3$.

Relațiile pentru transfigurarea în ambele sensuri (fig. 3. 40) sunt date mai jos.

Transfigurarea stea - triunghi | Transfigurarea triunghi - stea

$$\underline{Z}_{12} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_3\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3} \qquad \underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}$$

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_3\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1}; \qquad \underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{23}\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} \tag{3.274}$$

$$\underline{Z}_{31} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_3\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \qquad \underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_{31}\underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}$$

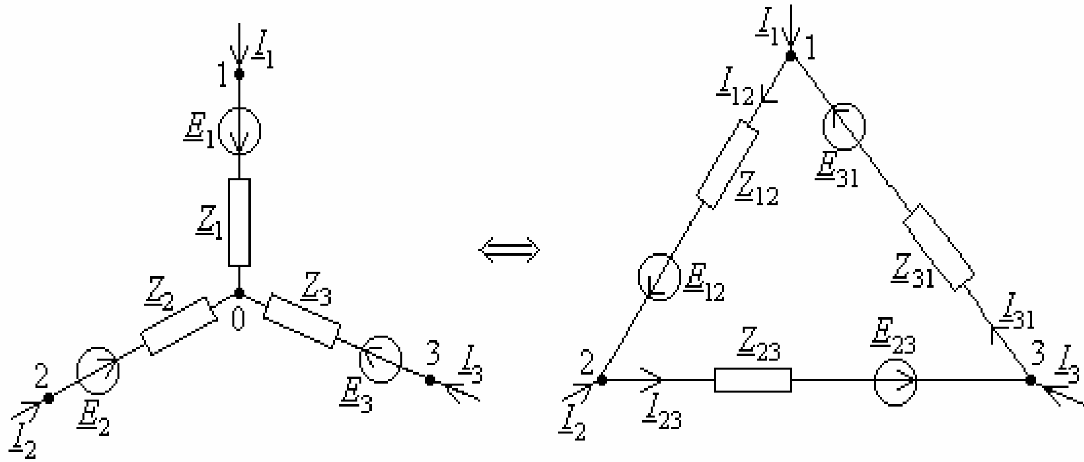


Fig. 3.40. Transfigurarea stea activă în triunghi activ.

şi

$$\underline{E}_{12} = \underline{E}_1 - \underline{E}_2 \qquad \underline{E}_1 = \frac{\underline{Y}_2\underline{E}_{12} + \underline{Y}_3\underline{E}_{13}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$$

$$\underline{E}_{23} = \underline{E}_2 - \underline{E}_3; \qquad \underline{E}_2 = \frac{\underline{Y}_3\underline{E}_{23} + \underline{Y}_1\underline{E}_{21}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} \tag{3.275}$$

$$\underline{E}_{31} = \underline{E}_3 - \underline{E}_1 \qquad \underline{E}_3 = \frac{\underline{Y}_1\underline{E}_{31} + \underline{Y}_2\underline{E}_{32}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$$

Din punctul de vedere al analizei circuitelor electrice, transfigurarea stea-poligon complet prezintă o mare importanță, deoarece eliminarea punctului neutru reduce cu o unitate numărul nodurilor circuitului. Prin transfigurări succesive se pot elimina toate nodurile interioare ale unui multipol.

3.9.4. Teoremele generatoarelor echivalente

3.9.4.1. Teorema generatorului echivalent de tensiune (teorema lui Thévenin)

Dacă între bornele A şi B ale unui circuit electric liniar aflat în regim sinusoidal se conectează o nouă latură cu impedanța complexă $\underline{Z}_{AB}$ *şi t.e.m. complexă* $\underline{E}_{AB}$ (fig. 3.41), *valoarea complexă a intensității curentului prin această latura este*

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB0} + \underline{E}_{AB}}{\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{AB0}}, \tag{3.276}$$

în care: $\underline{U}_{AB0}$ - este valoarea complexă a tensiunii între bornele A şi B la mers în gol (adică înainte de conectarea laturii considerate), figura 3.42,a; $\underline{Z}_{AB0}$ - reprezintă impedanța complexă echivalentă (de intrare) a circuitului pasivizat (fig. 3.42,b) în raport cu bornele A şi B, înainte de conectarea laturii considerate.

Demonstrație. Conform teoremei superpoziție (pasivizând pe rând latura A, B, respectiv dipolul), valoarea complexă a intensității curentului din latura conectată la bornele *A*, *B* ale circuitului (fig. 3.41) are expresia

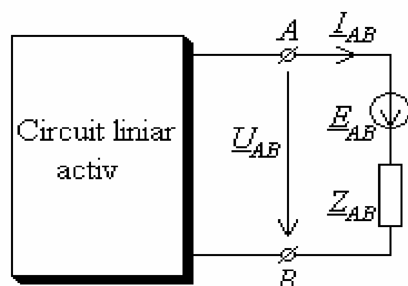


Fig. 3.41. Generatorul echivalent de tensiune.

$$\underline{I}_{AB} = \underline{I}_i + \frac{\underline{E}_{AB}}{\underline{Z}_{AB0} + \underline{Z}_{AB}}, \tag{3.277}$$

unde:

$\underline{I}_i$ - este valoarea complexă a curentului determinat de sursele interne ale circuitului (când $\underline{E}_{AB} = 0$);

$\underline{Z}_{AB0}$ - reprezintă impedanța complexă a dipolului cu toate sursele independente interne pasivizate.

Relația (3.277) este valabilă pentru orice valoare a lui $\underline{I}_{AB}$, inclusiv pentru $\underline{I}_{AB} = 0$. În acest caz se obține:

$$\underline{I}_i = -\frac{\underline{E}_{AB}}{\underline{Z}_{AB0} + \underline{Z}_{AB}}. \tag{3.278}$$

Pe de altă parte, valoarea complexă a curentului prin latura (A, B) se poate exprima şi cu teorema lui Joubert:

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB0} + \underline{E}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}}, \tag{3.279}$$

care în cazul particular studiat conduce la relația

$$\underline{E}_{AB} = -\underline{U}_{AB0}, \tag{3.280}$$

unde $\underline{U}_{AB0}$ este tensiunea la bornele A, B la mersul în gol (curentul prin latură este nul).

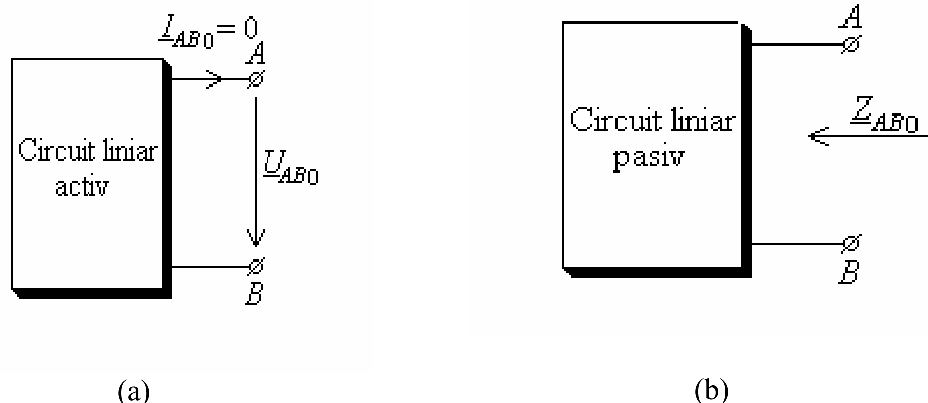


Fig. 3.42. Referitor la teorema generatorului echivalent de tensiune.

Substituind ultima relație în (3.278) se obține valoarea complexă a curentului dat de sursele interne

$$\underline{I}_i = \frac{\underline{U}_{AB0}}{\underline{Z}_{AB0} + \underline{Z}_{AB}}, \tag{3.281}$$

care înlocuită în ecuația (3.277) conduce la relația (3.276), ceea ce demonstrează teorema.

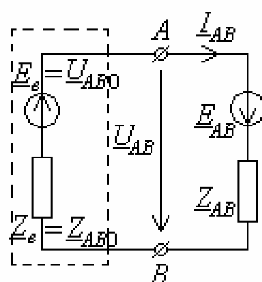


Fig. 3.43. Circuitul echivalent Thévenin.

Teorema lui Thévenin se numeşte şi *teorema generatorului echivalent de tensiune*, deoarece conform relației (3.276) dipolul liniar activ este echivalent la bornele A, B cu un generator de t.e.m. $\underline{E}_e = \underline{U}_{AB0}$ şi impedanță complexă internă $\underline{Z}_e = \underline{Z}_{AB0}$ (fig. 3.43).

În cazul particular când latura externă (*A*, *B*) este pasivă ($\underline{E}_{AB} = 0$) relația (3.276) conduce la forma uzuală a teoremei lui Thévenin:

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB0}}{\underline{Z}_{AB} + \underline{U}_{AB0}}. \tag{3.282}$$

Mărimile $\underline{U}_{AB0}$ şi $\underline{Z}_{AB0}$ se pot calcula rezolvând separat circuitele din figura 3.42,a, respectiv b, sau, mai convenabil, transfigurând dipolul liniar activ succesiv, până la latura echivalentă cu $\underline{E}_e$ şi $\underline{Z}_e$ ce satisfac relațiile de mai sus.

3.9.4.2. Teorema generatorului echivalent de curent (teorema lui Norton)

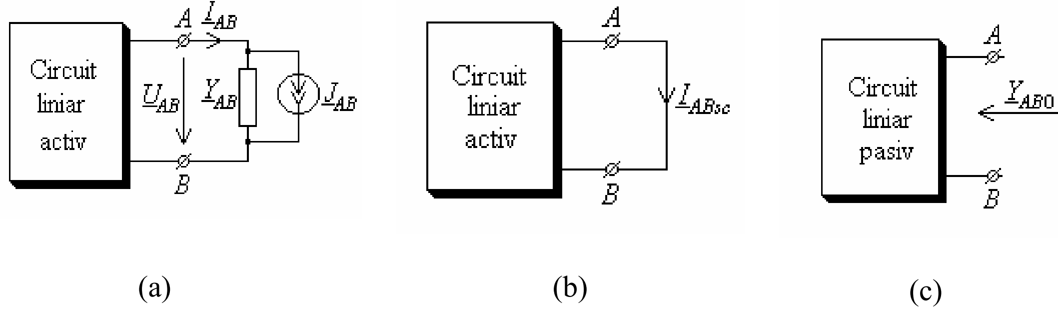
Fie *A*, *B* două borne de acces ale unui circuit electric liniar aflat în regim sinusoidal permanent (fig. 3.44,a). *Conectând între aceste două borne un receptor de admitanță complexă $\underline{Y}_{AB}$ în paralel cu o sursă ideală independentă de curent de intensitate $\underline{J}_{AB}$, se realizează o tensiune complexă*

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{I}_{ABsc} - \underline{J}_{AB}}{\underline{Y}_{AB} + \underline{Y}_{AB0}}, \tag{3.283}$$

unde:

$\underline{I}_{ABsc}$ - este valoarea complexă a curentului prin latura (A, B) când bornele A şi B sunt scurtcircuitate în absenţa sursei $\underline{J}_{AB}$ (fig. 3.44,b);

$\underline{Y}_{AB0}$ - admitanţa complexă echivalentă (de intrare) în raport cu bornele *A* şi *B* (fig. 3.44,c), când circuitul este pasivizat şi receptorul nu este conectat.



(a) (b) (c)

Fig. 3.44. Referitor la teorema generatorului echivalent de curent.

Demonstraţie. Tensiunea complexă de la bornele A, B are expresia

$$\underline{U}_{AB} = \underline{Z}_{AB}\left(\underline{I}_{AB} - \underline{J}_{AB}\right). \tag{3.284}$$

După ce se substituie generatorul real de curent $\left(\underline{J}_{AB}, \underline{Y}_{AB}\right)$cu generatorul echivalent real de tensiune $\left(\underline{E}_{AB}, \underline{Z}_{AB}\right)$, cu $\underline{Z}_{AB} = 1/\underline{Y}_{AB}$ şi $\underline{E}_{AB} = \underline{J}_{AB}/\underline{Y}_{AB}$, curentul $\underline{I}_{AB}$ se poate calcula cu teorema lui Thévenin (3.276)

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB0} + \underline{Z}_{AB}\underline{J}_{AB}}{\underline{Z}_{AB0} + \underline{Z}_{AB}}. \tag{3.285}$$

Prin urmare

$$\underline{U}_{AB} = \underline{Z}_{AB}\left(\frac{\underline{U}_{AB0} + \underline{Z}_{AB}\underline{J}_{AB}}{\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{AB0}} - \underline{J}_{AB}\right) = \frac{\underline{Z}_{AB}\underline{U}_{AB0} - \underline{Z}_{AB}\underline{Z}_{AB0}\underline{J}_{AB}}{\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{AB0}}. \tag{3.286}$$

Curentul de scurtcircuit prin latura (A, B) ($\underline{Z}_{AB} = 0, \underline{J}_{AB} = 0$) rezultă din relaţia (1.303)

$$\underline{I}_{ABsc} = \frac{\underline{U}_{AB0}}{\underline{Z}_{AB0}}. \tag{3.287}$$

Prin definiţie, admitanţa complexă de intrare este

$$\underline{Y}_i = \underline{Y}_{AB0} \overset{\mathrm{d}}{=} \underline{Z}_{AB0}^{-1} \tag{3.288}$$

şi deci, înmulţind cu produsul $\underline{Y}_{AB}\underline{Y}_{AB0}$ numărătorul şi numitorul fracţiei (1.307), se obţine teorema lui Norton.

Relaţia (3.283) arată că dipolul liniar activ poate fi echivalat cu un generator de curent (fig. 3.45) format dintr-o sursă ideală de curent $\underline{J}_e = \underline{I}_{ABsc}$, conectată în paralel cu o admitanţă complexă $\underline{Y}_e = \underline{Y}_{AB0}$. Din această cauză, teorema lui Norton se mai numeşte şi *teorema generatorului echivalent de curent*.

Dacă latura (A, B) este pasivă ($\underline{J}_{AB} = 0$), teorema Norton capătă forma:

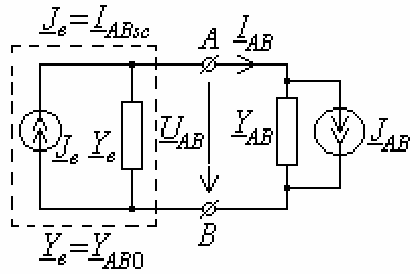


Fig. 3.45. Circuitul echivalent Norton.

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{I}_{ABsc}}{\underline{Y}_{AB} + \underline{Y}_{AB0}}. \qquad (3.289)$$

Mărimile $\underline{I}_{ABsc}$ şi $\underline{Y}_{AB0}$ pot fi determinate rezolvând circuitele din figura 3.44,a, respectiv b, sau prin transfigurarea dipolului în raport cu bornele A şi B până la un generator echivalent de curent cu $\underline{J}_e$ în paralel cu admitanța complexă $\underline{Y}_e$.

3.9.5. Eliminarea cuplajelor magnetice

Două bobine ideale conectate în serie şi cuplate magnetic (fig. 3.46, a, când cuplajul este pozitiv şi, respectiv fig. 4.47,a, în cazul cuplajului negativ) sunt echivalente cu circuitele din figura 3.46,b şi, respectiv, figura 3.47,b, unde cuplajele sunt eliminate.

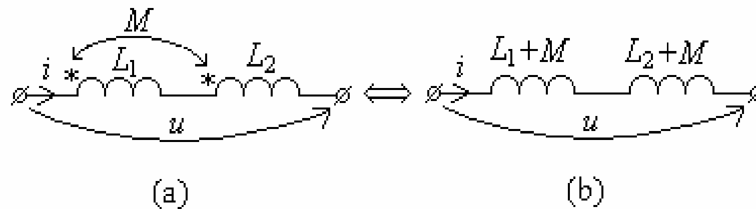


Fig. 3.46. Desfacerea cuplajului magnetic între două bobine conectate în serie când cuplajul este pozitiv.

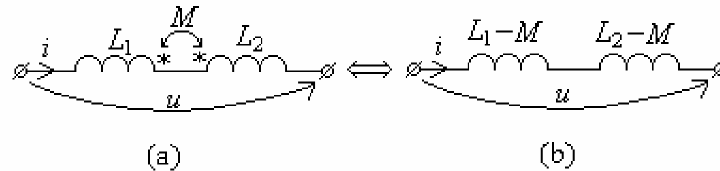


Fig. 3.47. Desfacerea cuplajului magnetic între două bobine conectate în serie când cuplajul este negativ.

În cazul în care într-un circuit electric laturile care conțin bobine cuplate magnetic au un nod comun şi în acel nod comun sunt conectate numai *trei laturi*, cuplajele magnetice ale bobinelor din aceste laturi se pot elimina (fig. 3.48,a), valorile curenților laturilor rămânând neschimbate. Eliminarea cuplajelor se face în funcție de poziția bornelor polarizate ale celor două bobine cuplate magnetic, în raport cu nodul comun astfel: *dacă bornele polarizate au aceeaşi poziție* (*au poziții diferite*) *față de nodul comun se scade* (*se adună*) *modulul inductivității mutuale din inductivitățile proprii a celor două bobine, iar în a treia latură se introduce* (*în serie*) *o bobină suplimentară care are inductivitatea proprie egală cu plus* (*minus*) *modulul inductivității mutuale* (fig. 3.48,b). Această regulă derivă din prelucrarea ecuațiilor obținute cu teoremele lui Kirchhoff. Ca urmare, eliminarea cuplajelor magnetice cu această procedură nu modifică valorile intensităților curenților din laturile circuitului, însă tensiunile de la bornele laturilor afectate de eliminarea cuplajelor se vor modifica.

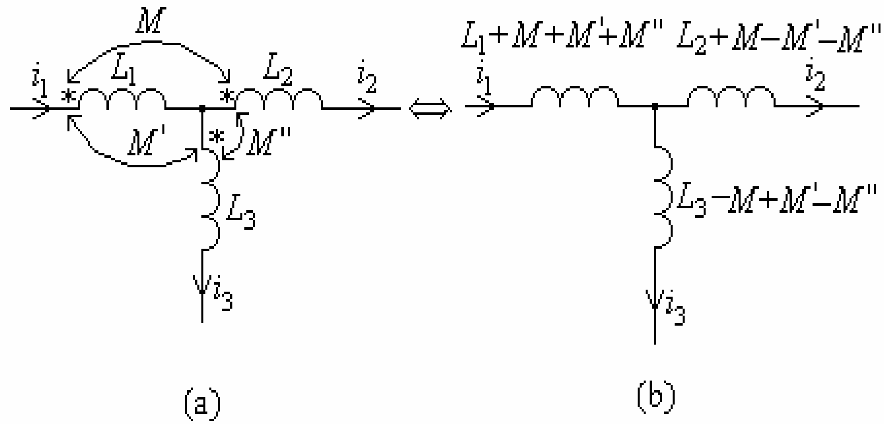


Fig. 3.48. Desfacerea cuplajelor magnetice a trei bobine cuplate magnetic care au un nod comun.

În principiu este posibilă eliminarea cuplajelor magnetice şi în cazul când gradul nodului comun acestor bobine este mai mare de trei. În acest caz se introduc noduri suplimentare, ceea ce determină creşterea complexităţii circuitului analizat.

3.10. ANALIZA CIRCUITELOR LINIARE ÎN REGIM SINUSOIDAL - METODE ŞI ALGORITMI DE CALCUL

3.10.1. Metoda teoremelor lui Kirchhoff în formă complexă

Pentru un circuit în regim sinusoidal liniar, conex, invariabil în timp, cu l laturi, conţinând rezistoare, bobine cuplate sau nu magnetic şi surse independente de tensiune, şi n noduri, aplicarea celor două teoreme ale lui Kirchhoff în formă simbolică conduce la obţinerea unui sistem complet de l ecuaţii, din care n–1 ecuaţii de tipul (3.42) şi $b = l$–n+1 ecuaţii de tipul (3.43), în l necunoscute, curenţii complecşi ai laturilor.

Dacă circuitul conţine şi surse de tensiune comandate, relaţia (3.43) devine

$$\sum_{l_k \in (b_h)} (A) \left(\underline{Z}_k \underline{I}_k + \sum_{p=1,\, p\neq k}^{n} j\omega L_{kp} \underline{I}_p \right) - \sum_{l_k \in (b_h)} (A) \underline{E}_{ck} = \sum_{l_k \in (b_h)} (A) \underline{E}_k ,\ h \in \overline{1,b}, b = l - n + 1 , \tag{3.290}$$

iar t.e.m. complexe ale surselor comandate ($\underline{E}_{ck}$) se exprimă prin ecuaţiile de comandă prelucrate în funcţie de necunoscutele curenţii complecşi ai laturilor. În cazul circuitelor care conţin şi surse de curent independente şi/sau comandate, numărul de necunoscute curenţi de laturi este l–l_J. Acestea se obţin prin rezolvarea unui sistem de ecuaţii obţinut prin aplicarea primei teoreme a lui Kirchhoff în n–1 noduri independente şi a celei de-a doua ecuaţii într-un *număr de bucle independente redus* la b_r= l–n+1– (l_J+l_{Jc}), unde l_J reprezintă numărul de laturi cu surse de curent independente, iar l_{Jc} reprezintă numărul de laturi cu surse de curent comandate.

Acestui sistem i se adaugă ecuaţiile de comandă ale surselor comandate prelucrate în funcţie de necunoscutele curenţi de laturi.

Observaţii

1. Pentru a se obţine numărul de bucle b_r, deci pentru a se obţine un număr redus de ecuaţii ale sistemului, este necesară o alegere corespunzătoare a buclelor independente, astfel încât nici una din ele să nu treacă prin laturi cu surse independente şi/sau comandate de curent. În

caz contrar, numărul de necunoscute ale sistemului va fi $l + l_{Jc}$, din care $l - l_J$ vor fi necunoscute curenți de laturi, iar restul de $l_J + l_{Jc}$ vor fi necunoscutele tensiuni la bornele surselor independente şi/sau comandate de curent, ecuația generală, corespunzătoare celei de-a doua teoreme a lui Kirchhoff fiind exprimată cu relația (3.45);

2. Este evident că alegerea unui număr redus de bucle b_r prezintă avantajul obținerii unui sistem redus de ecuații, deci a reducerii efortului de calcul; pe de altă parte relația (3.45) permite scrierea sistematică a sistemului de ecuații;

3. Odată calculați curenții complecşi din laturi, tensiunile complexe la bornele laturilor se pot determina în modul următor:

- pentru laturile fără surse de curent se aplică ecuația caracteristică (3.51) sau teorema a doua a lui Kirchhoff;
- pentru laturile formate din surse independente sau comandate de curent, numai cu ajutorul teoremei a doua a lui Kirchhoff.

Algoritmul de aplicare al metodei teoremelor lui Kirchhoff

Pasul 1. Se determină numărul nodurilor şi al laturilor circuitului;

Pasul 2. Se determină schema echivalentă în complex a circuitului şi se elimină toate cuplajele magnetice care satisfac condițiile prezentate în § 3.9.5;

Pasul 3. Se aleg sensuri de referință şi se ataşează simboluri pentru intensitățile curenților din laturi;

Pasul 4. Se calculează numărul redus de bucle ale circuitului şi se aleg aceste bucle stabilindu-se un sens de parcurgere pentru fiecare;

Pasul 5. Se scriu ecuațiile în complex corespunzătoare primei teoreme a lui Kirchhoff în (n–1) noduri independente şi ecuațiile corespunzătoare celei de-a doua teoreme pe cele $b_r = l - n + 1 - \left(l_J + l_{Jc}\right)$ bucle independente;

Pasul 6. Se rezolvă sistemul de ecuații obținut prin completarea celui de la pasul 5 cu ecuațiile de comandă ale surselor de curent şi de tensiune comandate, prelucrate în funcție de curenții laturilor, determinându-se valorile complexe ale intensitățile curenților din laturi şi apoi valorile lor instantanee;

Pasul 7. Se validează rezultatul cu ajutorul bilanțului puterilor active şi reactive. Se determină mai întâi puterile complexe debitate de sursele circuitului şi apoi puterile active şi reactive consumate în rezistoarele şi, respectiv, în bobinele şi condensatoarele circuitului.

Analiza asistată de calculator a circuitelor electrice necesită **formularea matriceală a ecuațiilor circuitului**. Pentru ***circuite reciproce***, luând în considerare structura laturii standard prezentată în figura 3.9,b, formularea matriceală a teoremelor lui Kirchhoff în formă simbolică şi a ecuațiilor caracteristice (constitutive) ale laturilor conduce la ecuațiile

$$\boldsymbol{A}\underline{\boldsymbol{I}}_l = \boldsymbol{0} \tag{3.291}$$

$$\boldsymbol{B}\underline{\boldsymbol{U}}_l = \boldsymbol{0} \tag{3.292}$$

$$\underline{\boldsymbol{U}}_l = \underline{\boldsymbol{Z}}_l\underline{\boldsymbol{I}}_l - \underline{\boldsymbol{E}}_l. \tag{3.293}$$

Cele $2l$ ecuații (3.291)-(3.293) determină în mod univoc curenții complecşi şi tensiunile complexe ale laturilor circuitului, dacă se dau valorile: rezistențelor, inductivităților proprii şi mutuale, capacităților laturilor, valorile complexe ale t.e.m. ale surselor independente de tensiune şi frecvența acestor t.e.m.

Înlocuind relația (3.293) în (3.292) şi cuplând apoi cu (3.291) se obține *forma matriceală în complex a ecuațiilor circuitului în curenții laturilor:*

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B}\underline{\boldsymbol{Z}}_l \end{bmatrix}\underline{\boldsymbol{I}}_l = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B}\underline{\boldsymbol{E}}_l \end{bmatrix}, \tag{3.294}$$

unde $\boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{B}$) este matricea $(n\text{-}1)\times l$ ($b\times l$) de incidență redusă laturi - noduri (laturi - bucle), $\underline{\boldsymbol{I}}_l(\underline{\boldsymbol{U}}_l)$ este vectorul ($l\times1$) al valorilor complexe ale curenților (tensiunilor) laturilor circuitului, $\underline{\boldsymbol{Z}}_l$ este matricea ($l\times l$) a impedanțelor complexe ale laturilor circuitului, iar $\underline{\boldsymbol{E}}_l$ este vectorul ($l\times1$) al t.e.m. complexe ale surselor independente de tensiune.

Sistemul de ecuații (3.294) se rezolvă în raport cu vectorul curenților complecşi ai laturilor $\underline{\boldsymbol{I}}_l$, apoi cu ecuațiile (3.293) se determină valorile complexe ale tensiunilor la bornele laturilor.

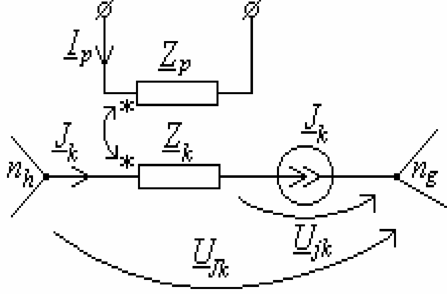


Fig. 3.49. Latură care contine o sursă independentă de curent în serie cu o impedanță cuplată magnetic.

O formulare matriceală alternativă se obține dacă se face următoarea partiționare a laturilor circuitului:

l_Z - laturi conținând impedanțe complexe cuplate sau nu magnetic şi eventual surse de tensiune independente (fig. 3.9,a);

l_E - laturi conținând surse ideale independente de tensiune;

l_J - laturi conținând surse independente de curent şi, eventual impedanțe complexe cuplate sau nu magnetic (fig. 3.49).

Dacă circuitul are numai laturi de tipul l_Z şi l_E, toți curenții laturilor şi l–l_E tensiuni la borne (pentru laturile tip l_E, $\underline{\boldsymbol{U}}_E = -\underline{\boldsymbol{E}}_E$) sunt necunoscute.

În cazul în care circuitul conține şi surse de curent, numărul necunoscutelor curenți de laturi este l–l_J.. În locul curenților de laturi apar ca necunoscute tensiunile la bornele surselor de curent. Pe baza partiționării propuse pentru laturile circuitului şi notând $l_1 = l_Z + l_E$, vectorii $\underline{\boldsymbol{I}}_l, \underline{\boldsymbol{U}}_l$ şi $\underline{\boldsymbol{E}}_l$ capătă forma:

$$\underline{\boldsymbol{I}}_l = \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{I}}_Z \\ \underline{\boldsymbol{I}}_E \\ \underline{\boldsymbol{I}}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{I}}_1 \\ \underline{\boldsymbol{I}}_J \end{bmatrix}; \underline{\boldsymbol{U}}_l = \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{U}}_Z \\ \underline{\boldsymbol{U}}_E \\ \underline{\boldsymbol{U}}_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{U}}_1 \\ \underline{\boldsymbol{U}}_J \end{bmatrix}; \underline{\boldsymbol{E}}_l = \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{E}}_Z \\ \underline{\boldsymbol{E}}_E \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{E}}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{3.295}$$

ce pune în evidență necunoscutele circuitului $\underline{\boldsymbol{I}}_1, \underline{\boldsymbol{U}}_Z$ şi $\underline{\boldsymbol{U}}_J$.

Ecuațiile caracteristice de latură în complex au forma:

$$\underline{\boldsymbol{U}}_1 = \underline{\boldsymbol{Z}}_{11}\underline{\boldsymbol{I}}_1 + \underline{\boldsymbol{Z}}_{1J}\underline{\boldsymbol{I}}_J - \underline{\boldsymbol{E}}_1, \tag{3.296}$$

pentru laturile de tipul 1 ($l_1 = l_Z + l_E$);

$$\underline{\boldsymbol{U}}_J = \underline{\boldsymbol{Z}}_{J1}\underline{\boldsymbol{I}}_1 + \underline{\boldsymbol{Z}}_{JJ}\underline{\boldsymbol{I}}_J + \underline{\boldsymbol{U}}_j, \tag{3.297}$$

pentru laturile de tipul l_J.

Cu partiționarea propusă pentru laturi, matricea $\underline{\boldsymbol{Z}}_l$ a impedanțelor complexe ale laturilor, de dimensiune ($l\times l$), are forma

$$\underline{\boldsymbol{Z}}_l = \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{Z}}_{ZZ} & \mathbf{0} & \underline{\boldsymbol{Z}}_{ZJ} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \underline{\boldsymbol{Z}}_{JZ} & \mathbf{0} & \underline{\boldsymbol{Z}}_{JJ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{Z}}_{11} & \underline{\boldsymbol{Z}}_{1J} \\ \underline{\boldsymbol{Z}}_{J1} & \underline{\boldsymbol{Z}}_{JJ} \end{bmatrix}. \tag{3.298}$$

Cu partiționarea laturilor în l_1 şi l_J, ecuațiile (3.291) şi (3.292) devin

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{I}}_1 \\ \underline{\boldsymbol{I}}_J \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \qquad \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{U}}_1 \\ \underline{\boldsymbol{U}}_J \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \tag{3.299}$$

Înlocuind relațiile (3.296) şi (3.297) în a doua ecuație (3.299), separând mărimile necunoscute şi cuplând ecuațiile astfel obținute cu prima ecuația (3.299), se obține forma compactă

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} \\ \left(\boldsymbol{B}_1 \underline{\boldsymbol{Z}}_{11} + \boldsymbol{B}_J \underline{\boldsymbol{Z}}_{1J}\right) & \boldsymbol{B}_J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{I}}_1 \\ \underline{\boldsymbol{U}}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{A}_J \underline{\boldsymbol{I}}_J \\ \boldsymbol{B}_1 \underline{\boldsymbol{E}}_1 - \left(\boldsymbol{B}_1 \underline{\boldsymbol{Z}}_{1J} + \boldsymbol{B}_J \underline{\boldsymbol{Z}}_{JJ}\right) \underline{\boldsymbol{I}}_J \end{bmatrix}. \tag{3.300}$$

Ecuația (3.300) se numeşte *ecuația matriceală hibridă a circuitului* şi are forma

$$\underline{\boldsymbol{C}}\,\underline{\boldsymbol{X}} = \underline{\boldsymbol{S}}. \tag{3.301}$$

Sistemul ecuațiilor circuitului fiind complet şi liniar independent, matricea $\underline{\boldsymbol{C}}$ de dimensiune ($l \times l$) este nesingulară, deci cele l necunoscute ale circuitului din care $l_1 = l_R + l_E = l - l_J$, curenți de laturi, şi l_J tensiuni la bornele surselor independente de curent, se determină din ecuația matriceală (3.300). Din ecuația (3.296) se determină apoi vectorul $\underline{\boldsymbol{U}}_1$, iar vectorul $\underline{\boldsymbol{U}}_J$ se determină cu relația (3.297).

Exemplul 3.6: Fie circuitul electric reprezentat în figura 3.50, în care se cunosc: $j_1 = j_5 = \sqrt{2}10\sin 100\pi t$ A; $e_2 = \sqrt{2}220\sin(100\pi t + \pi/2)$ V; $e_4 = \sqrt{2}220\sin 100\pi t$ V; $\omega L_1 = \omega M_{12} = \omega M_{21} = \omega M_{23} = \omega M_{32} = 11\ \Omega$; $\omega L_2 = 1/\omega C_2 = 33\ \Omega$; $R_3 = \omega L_3 = 22\ \Omega$. Circuitul are $n = 3$, $l = 5$ şi $b = l - n + 1 = 3$. Cele trei bucle independente s-au ales în aşa fel încât prin sursele de curent să treacă o singură buclă şi sensul buclei să coincidă cu sensul curentului sursei de curent.

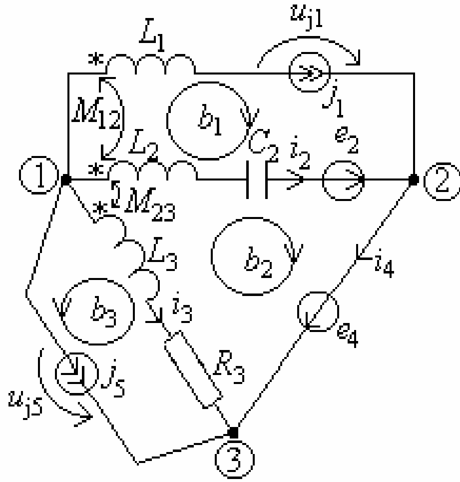


Fig. 3.50. Schema circuitului.

Matricea redusă de incidență laturi-noduri are structura:

$$\boldsymbol{A} = \begin{matrix} & l_2 & l_3 & l_4 & l_{J1} & l_{J5} \\ n_1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ n_2 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{matrix}.$$

Matricea de incidență laturi-bucle, partiționată conform relației (3.324), are forma:

$$\boldsymbol{B} = \begin{matrix} & l_2 & l_3 & l_4 & l_{J1} & l_{J5} \\ b_2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ b_1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b_3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}.$$

Ecuația matriceală (3.300) are următoarea expresie:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -j\left(\omega L_2 - \dfrac{1}{\omega C_2} - \omega M_{12}\right) & -j\omega M_{23} & 0 & 1 & 0 \\ j\left(\omega L_2 - \dfrac{1}{\omega C_2} - \omega M_{32}\right) & -R_3 - j\omega L_3 + j\omega M_{23} & 0 & 0 & 0 \\ -j\omega M_{32} & -\left(R_3 + j\omega L_3\right) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{I}_4 \\ \underline{U}_{j1} \\ \underline{U}_{j5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\underline{J}_1 - \underline{J}_5 \\ \underline{J}_1 \\ -\underline{E}_2 - j\left(\omega L_1 - \omega M_{21}\right)\underline{J}_1 \\ \underline{E}_2 + \underline{E}_4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ecuația matriceală redusă, corespunzătoare curenților $\underline{I}_2, \underline{I}_3$ şi $\underline{I}_4$, are structura:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ j\left(\omega L_2 - \dfrac{1}{\omega C_2} - \omega M_{32}\right) & -R_3 - j\omega L_3 + j\omega M_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{I}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\underline{J}_1 - \underline{J}_5 \\ \underline{J}_1 \\ \underline{E}_2 + \underline{E}_4 - j\omega M_{21}\underline{J}_1 \end{bmatrix}.$$

Rezolvând aceste ecuații, se obțin:

$$\underline{I}_2 = -5(2+j)\,\text{A};\ \underline{I}_3 = 5(-2+j)\,\text{A};\ \underline{I}_4 = -5j\ \text{A};$$
$$\underline{U}_{j1} = -110(1+2j)\,\text{V};\ \underline{U}_{j5} = -55(5+4j)\,\text{V}.$$

Puterea complexă cedată de sursele circuitului este

$$\underline{S} = -\underline{U}_{j1}\underline{J}_1^* + \underline{E}_2\underline{I}_2^* + \underline{E}_4\underline{I}_4^* - \underline{U}_{j5}\underline{J}_5^* = 110(1+2j)\cdot 10 + 220j\cdot(-10+5j) +$$
$$+ 220\cdot 5j + 55(5+4j)\cdot 10 = 2750 + 3300j\ \text{VA} \Rightarrow \begin{cases} P_g = 2750\ \text{W} \\ Q_g = 3300\ \text{var} \end{cases}.$$

Puterea activă şi, respectiv, reactivă consumate în rezistoarele şi, respectiv, bobinele şi condensatoarele circuitului din figura 3.50 au expresiile:

$$P_R = R_3 I_3^2 = 22\cdot 25\cdot 5 = 2750\ \text{W} \equiv P_g$$

şi, respectiv

$$Q_X = \omega L_1 J_1^2 + \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right) I_2^2 + \omega L_3 I_3^2 + 2\omega M_{12} J_1 I_2 \cos\left(\alpha_{j_1} - \alpha_{i_2}\right) + 2\omega M_{23} I_2 I_3 \cos\left(\alpha_{i_2} - \alpha_{i_3}\right) =$$
$$= 11.100 + (33-33)\cdot 125 + 22\cdot 125 + 2\cdot 11\cdot 10\cdot 5\sqrt{5}\cos(0 + \pi - arctg(1/2)) +$$
$$+ 2\cdot 11\cdot 5\sqrt{5}\cdot 5\sqrt{5}\cos(-\pi + arctg(1/2) - \pi + arctg(1/2)) = 3300\ \text{var} \equiv Q_g.$$

3.10.2. Metoda curenților de buclă

Pentru circuitele de mari dimensiuni, sistemul de ecuații obținut prin aplicarea teoremelor lui Kirchhoff, fie în varianta hibridă cu l necunoscute, fie în varianta cu număr redus la $l - l_J$ necunoscute, poate fi de dimensiuni prea mari. Apare deci necesitatea utilizării unor metode alternative de analiză a circuitelor electrice, care să reducă numărul ecuațiilor ce descriu funcționarea circuitului, respectiv numărul variabilelor independente.

Una din aceste metode este metoda curenților de buclă, care asociază circuitului un nou set de necunoscute - curenții complecşi de bucle $\underline{\boldsymbol{I}}_b$, în număr de $b = l - n + 1$, introduse astfel încât să verifice prima teoremă a lui Kirchhoff. Prin urmare, curenții laturilor se exprimă ca sumă algebrică a curenților de buclă ce trec prin latura respectivă (fig. 3.51):

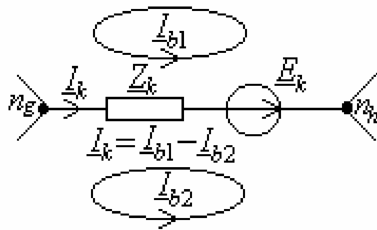


Fig. 3.51. Asocierea curenților de buclă.

$$\underline{I}_k = \sum_{(b_h)\ni l_k} (A)\underline{I}_{b_h}. \tag{3.301}$$

Noile necunoscute se determină cu ajutorul teoremei a doua a lui Kirchhoff sub forma obținută prin prelucrarea relației (3.47), în funcție de (3.301). Se obține *forma compactă a ecuațiilor circuitului în necunoscute curenți complecşi de bucle*:

$$\sum_{g=1}^{b} \underline{Z}_{hg} \underline{I}_{b_g} = \underline{E}_{b_h}, \ h = \overline{1,b}; \ b = l - n + 1, \tag{3.302}$$

unde:

-$\underline{Z}_{hh}$ reprezintă impedanța complexă proprie a buclei h, egală cu suma impedanțelor complexe ale laturilor ce compun bucla, la care se adaugă şi contribuțiile de forma $2\underline{Z}_{m_{kp}} = \pm 2\, jM_{kp}$, datorate cuplajelor magnetice dintre perechile de bobine ce aparțin aceleiaşi bucle h, cu semnul plus (minus) dacă curentul de buclă complex $\underline{I}_{b_h}$ are acelaşi sens (sens invers) în raport cu bornele polarizate ale celor două bobine cuplate magnetic;

-$\underline{Z}_{hg}$ reprezintă impedanța mutuală (de cuplaj) dintre bucla h (în care se scrie teorema a doua a lui Kirchhoff) şi bucla g, egală cu suma impedanțelor complexe ale laturilor comune celor două bucle (luate cu semnul + sau −, după cum curenții de buclă $\underline{I}_{b_h}$ şi $\underline{I}_{b_g}$ au sau nu acelaşi sens în aceste laturi), la care se adaugă suma impedanțelor mutuale dintre perechile de bobine aparținând câte una fiecărei bucle (semnele lor rezultă din modul cum se asociază sensul fiecărui curent de buclă cu borna polarizată a bobinei corespunzătoare, conform figurii 3.52). Dacă circuitul este reciproc $\underline{Z}_{hg} = \underline{Z}_{gh}$;

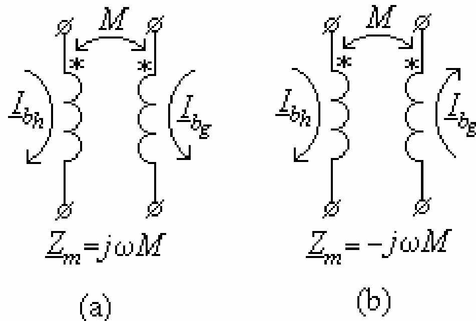


Fig. 3.52. Determinarea semnului impedanței complexe de cuplaj.

-$\underline{E}_{b_h} = \sum_{(b_h) \ni l_k} (A) \underline{E}_k$ reprezintă t.e.m. complexă a buclei b_h, egală cu suma algebrică a t.e.m. complexe ale surselor independente şi/sau comandate de tensiune din laturile buclei ($\underline{E}_k$ are semnul (+) dacă sensul ei coincide cu cel al buclei b_h).

Dacă în circuit există surse de tensiune şi/sau de curent comandate, sistemul de ecuații (3.302) se completează cu ecuațiile de comandă exprimate în funcție de necunoscutele metodei, $\underline{I}_{b_g}$.

Numărul de variabile independente introdus de metoda curenților de buclă este $b = l-n+1$. Pentru circuitele fără surse de curent aceste necunoscute se determină prin rezolvarea sistemului (3.302).

În cazul când circuitul conține surse de curent independente şi/sau comandate, unor variabile li se pot atribui valorile curenților acestor surse. Pentru aceasta, asocierea variabilelor $\underline{I}_b$ cu cele $l-n+1$ bucle independente ale circuitului se face astfel încât prin fiecare latură cu sursă de curent $\underline{J}$ sau $\underline{J}_c$ să treacă un singur curent de buclă şi numai unul. Conform relației (3.301) acest curent de buclă va avea valoarea curentului sursei:

$$\underline{I}_{b_k} = \underline{J}_k, \ k = \overline{1, l_J} \text{ şi/sau } \underline{I}_{b_p} = \underline{J}_{jp}, \ p = \overline{1, l_{Jc}}. \tag{3.303}$$

Pentru restul variabilelor, în număr de $l - n + 1 - (l_J + l_{Jc})$, se aplică relația (3.302) *într-un număr redus de bucle*, deci $h = \overline{1, b_r}$. Sistemului obținut din ecuațiile (3.302) şi (3.303) i se adaugă ecuațiile de comandă ale surselor comandate, exprimate în funcție de necunoscutele metodei, $\underline{I}_{b_g}$.

Observație

Pentru circuitele care conțin surse de curent independente $\underline{J}$ şi/sau comandate $\underline{J}_c$, metoda curenților de buclă permite o reducere a numărului de ecuații ale sistemului (3.302) cu numărul total al acestor surse de curent, în condițiile alegerii corespunzătoare a buclelor.

Algoritmul de aplicare al metodei curenților de buclă

Pasul 1. Se determină numărul de noduri, numărul de laturi şi numărul surselor de curent ;

Pasul 2. Se determină numărul variabilelor independente introduse de metodă $b = l–n+1$;

Pasul 3. Se aleg (l_J+l_{Jc}) bucle care să conțină câte o singură sursă de curent independentă sau comandată şi li se ataşează câte un curent de buclă al cărui sens va fi acelaşi cu al sursei de curent; curenții acestor bucle vor fi exprimați cu relațiile (3.303);

Pasul 4. Pentru restul de bucle independente, în număr redus la $b_r = l - n + 1 - (l_J + l_{Jc})$ se atribuie tot atâtea variabile curenți de buclă cu sensuri oarecare, fiecare reprezentând şi sensul de parcurgere al buclei respective. Ecuațiile curenților de buclă asociate acestor bucle se pot obține mai simplu *prin utilizarea teoremei a doua a lui Kirchhoff* (*pe buclele respective*) *substituind curenții de latura cu relația* (3.301*) în funcție de curenții de buclă*;

Pasul 5. Se aplică teorema a doua a lui Kirchhoff în formă simbolică pe aceste bucle, ținând seama că în membrul stâng al ecuației (3.302) pot apare căderi de tensiune determinate de variabile exprimate cu relațiile (3.303);

Pasul 6. Se ataşează sistemului obținut cu ecuațiile (3.302) şi (3.303) ecuațiile de comandă ale surselor comandate, exprimate în funcție de variabilele independente ale metodei;

Pasul 7. Se rezolvă sistemul astfel obținut în variabile curenți complecşi de buclă;

Pasul 8. Se determină curenții complecşi ai laturilor cu ecuația (3.301);

Pasul 9. Tensiunile complexe la bornele laturilor se determină în modul descris în § 3.10.1.

Pasul 10. Se verifică bilanțul puterilor active şi reactive.

Exemplu 3.7: Pentru circuitul de curent alternativ din figura 3.53, se cunosc: $e_2 = 30\sqrt{2}\sin(100\pi t - \pi/2)\text{V}$, $J_3 = \sqrt{2}\cos 100\pi t\,\text{A}$, $\omega L_1 = R_1 = R_4 = 1/\omega C_4 = 15\Omega$, $\omega L_2 = 1/\omega C_2 = 20\Omega$, $\omega M_{12} = \omega M_{21} = 15\Omega$ şi $a_{5_4} = 1$.

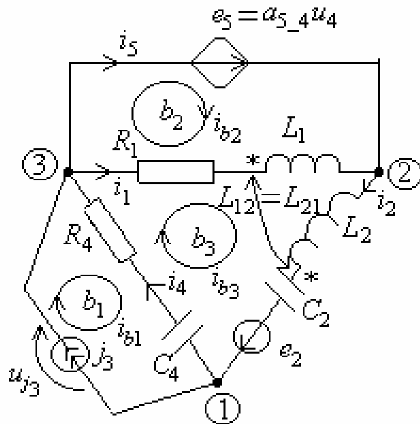


Fig. 3.53. Schema circuitului.

Să se calculeze: a) valorile complexe şi instantanee ale curenților şi tensiunii u_3; b) valoarea complexă şi instantanee a tensiunii u_2; c) puterea activă cedată de sursa de tensiune comandată în tensiune e_5.

a) $\underline{E}_2 = -30j$, $\underline{J}_3 = j$.

Pentru calculul valorilor complexe ale curenților laturilor se va utiliza ecuațiile circuitului în curenți de buclă în complex.

$$\underline{I}_1 = -\underline{I}_{b2} + \underline{I}_{b3}, \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{b3},$$

$$\underline{J}_3 = \underline{I}_{b1} = j, \quad \underline{I}_4 = -\underline{I}_{b1} + \underline{I}_{b3} \text{ şi } \underline{I}_5 = \underline{I}_{b2}.$$

$$(b_2):\ \underline{Z}_1\underline{I}_{b2} - (\underline{Z}_1 - j\omega M_{12} + \underline{A}_{5_4}\underline{Z}_4)\underline{I}_3 = -\underline{A}_{5_4}\underline{Z}_4\underline{J}_3;$$

$$(b_3):\ \left(-\underline{Z}_1 + j\omega M_{21}\right)\underline{I}_{b2} + \left(\underline{Z}_1 - 2j\omega M_{12} + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_4\right)\underline{I}_{b3} = \underline{E}_2 + \underline{Z}_4\underline{J}_3 .$$

După substituirea valorilor numerice ale parametrilor, ecuațiile circuitului în curenți de buclă în complex corespunzătoare celor $b_r = b - l_j = 3 - 1 = 2$ bucle reduse, devin:

$$(b_2):\ (1+j)\underline{I}_{b2} - (2-j)\underline{I}_{b3} = -1-j$$

$$(b_3):\ -\underline{I}_{b2} + 2(1-j) = 1-j .$$

de unde rezultă:

$$\underline{I}_{b2} = \frac{3(-3-j)}{5},\ \underline{I}_{b3} = \frac{(1-3j)}{5} .$$

Deci:

$$\underline{I}_1 = 2\text{A} \Rightarrow i_1(t) = 2\sqrt{2}\sin 100\pi t\,\text{A};\ \underline{I}_2 = \frac{1-3j}{5} \Rightarrow i_2(t) = \frac{2\sqrt{5}}{5}\sin(100\pi t - \text{arctg}3)\text{A};$$

$$\underline{I}_4 = \frac{1-8j}{5} \Rightarrow i_4(t) = \frac{\sqrt{130}}{5}\sin(100\pi t - \text{arctg}8)\text{A};$$

$$\underline{I}_5 = \frac{3(-3-j)}{5} \Rightarrow i_5(t) = \frac{6\sqrt{5}}{5}\sin(100\pi t - \pi + \text{arctg}1/3)\text{A} .$$

Din teorema a doua a lui Kirchhoff aplicată pe bucla b_1 rezultă:

$$\underline{U}_3 = \underline{U}_4 = \underline{E}_5 = (R_4 - j/\omega C_4)\underline{I}_4 = 15(1-j)\frac{1-8j}{5} = 3(-7-9j) .$$

$$u_3(t) = u_4(t) = e_5(t) = 3\sqrt{260}\sin(100\pi t - \pi + \text{arctg}9/7) .$$

b) $\underline{U}_2 = j\left(\omega L_2 - \dfrac{1}{\omega C_2}\right)\underline{I}_2 - j\omega M_{21}\underline{I}_1 - \underline{E}_2 = j(20-20)\dfrac{1-3j}{5} + 15j\cdot 2 - 30j = 0 \Rightarrow u_2 = 0 .$

c) $P_5 = E_5 I_5 \cos\varphi_5 = 3\sqrt{1303}\,3\dfrac{\sqrt{10}}{5}\cdot\cos(-\pi + \text{arctg}9) .$

Formularea matriceală a metodei curenților de buclă în cazul ***circuitelor reciproce*** depinde de tipul adoptat pentru latura standard.

Notând cu $\underline{\boldsymbol{I}}_b$ vectorul ($b\times 1$) al curenților de buclă asociați celor b bucle independente, $b = l-n+1$, curenții laturilor circuitului se pot exprima în funcție de curenții de bucle cu relația

$$\underline{\boldsymbol{I}}_l = \boldsymbol{B}^{\text{t}}\underline{\boldsymbol{I}}_b . \tag{3.304}$$

Pentru latura reprezentată în figura 1.9,a, înlocuind relația (1.335) în (1.314) şi relația astfel obținută în (1.313), se obține *ecuația matriceală a curenților de buclă* în complex sub forma

$$\boldsymbol{B}\underline{\boldsymbol{Z}}_l\boldsymbol{B}^{\text{t}}\underline{\boldsymbol{I}}_b = \boldsymbol{B}\underline{\boldsymbol{E}}_l , \tag{3.305}$$

sau

$$\underline{\boldsymbol{Z}}_b\underline{\boldsymbol{I}}_b = \underline{\boldsymbol{E}}_b , \tag{3.306}$$

cu

$$\underline{\boldsymbol{Z}}_b = \boldsymbol{B}\underline{\boldsymbol{Z}}_l\boldsymbol{B}^{\text{t}} \tag{3.307}$$

şi

$$\underline{\boldsymbol{E}}_b = \boldsymbol{B}\underline{\boldsymbol{E}}_l, \tag{3.308}$$

unde matricea $\underline{\boldsymbol{Z}}_b$ de dimensiune ($b\times b$) este matricea impedanţelor complexe proprii ale buclelor, iar $\underline{\boldsymbol{E}}_b$ de dimensiune ($b\times 1$), este vectorul t.e.m. complexe ale buclelor.

Rezolvând ecuaţia (3.305) se obţine vectorul necunoscutelor curenţi de bucle, cu ajutorul cărora, aplicând relaţia (3.304), se determină imaginile în complex ale curenţilor din laturile circuitului.

În cazul când circuitul conţine şi laturi tip l_J, se poate reduce sistemul (3.306) la un număr de ecuaţii corespunzător unui număr redus de bucle $b_r = l-n+1-l_J$.

Pentru aceasta, toate sursele de curent din graful circuitului vor fi introduse în coarbore. Cum sistemul buclelor fundamentale (în număr de $l-n+1$) se formează cu laturi ale arborelui şi cu câte o coardă, fiecare curent de buclă va fi asociat unei coarde având acelaşi sens cu sensul ei de orientare. O parte din aceste coarde sunt laturile tip l_J, iar restul, laturi tip l_Z. Se asigură astfel condiţia ca fiecare buclă să conţină cel mult o sursă de curent. Procedura de obţinere a ecuaţiilor matriceale este formal identică cu cea de la circuitele electrice rezistive (vezi capitolul 2 şi [1]).

3.10.3. Metoda potenţialelor nodurilor

Această metodă asociază circuitului setul de necunoscute format din potenţialele complexe ale nodurilor, $\underline{V}_{n-1}$, în număr de $n-1$, introduse astfel încât să satisfacă a doua teoremă a lui Kirchhoff. Ca urmare, tensiunile laturilor se exprimă ca sumă algebrică a potenţialelor adiacente laturii respective (fig. 3.54):

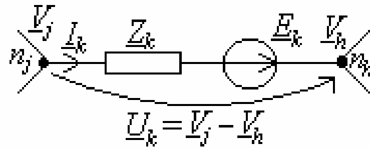


Fig. 3.54. Structura în c.a. a laturii standard (fără cuplaje magnetice).

$$\underline{U}_k = \underline{V}_j - \underline{V}_h \tag{3.309}$$

Unul din cele n noduri ale circuitului este ales ca nod de referinţă, având potenţialul nul.

Pentru circuitele electrice în regim sinusoidal pentru care impedanţa complexă a fiecărei laturii este nenulă şi care nu conţin cuplaje magnetice, teorema lui Joubert (3.52) se poate scrie şi sub forma

$$\underline{I}_k = \underline{Y}_k\left(\underline{V}_j - \underline{V}_h\right) + \underline{Y}_k\underline{E}_k, \tag{3.310}$$

unde s-a ţinut seama şi de relaţia (3.309) şi unde $\underline{Y}_k = 1/\underline{Z}_k$ reprezintă admitanţa complexă a laturii l_k.

Noile necunoscute se determină cu ajutorul primei teoreme a lui Kirchhoff sub forma obţinută prin substituirea relaţiei (3.310) în ecuaţia (3.44), reprezentând *forma compactă a ecuaţiilor circuitului în variabile potenţiale la noduri în complex*, pentru circuitele de curent alternativ care nu conţin cuplaje magnetice şi la care fiecare latură are impedanţa complexă nenulă:

$$\sum_{j=1}^{n-1}\underline{Y}_{ij}\underline{I}_j = \underline{J}_{ni}, \qquad i = \overline{1, n-1}, \tag{3.311}$$

unde:

- $\underline{Y}_{ii} = \sum_{l_k \in (n_i)} \underline{Y}_k$ reprezintă admitanța nodală complexă proprie nodului n_i (în care se scrie prima teoremă a lui Kirchhoff), egală cu suma admitanțelor complexe ale laturilor incidente în acest nod;

- $\underline{Y}_{ij} = -\sum_{l_k \in (n_i \cap n_j)} \underline{Y}_k$ este admitanța complexă nodală mutuală (comună) dintre nodurile n_i și n_j, egală cu suma cu semn schimbat a admitanțelor complexe ale laturilor conectate în paralel între cele două noduri. Dacă circuitul analizat este reciproc $\underline{Y}_{ij} = \underline{Y}_{ji}$;

- $\underline{J}_{ni} = -\sum_{l_k \in (n_i)} (A) \underline{I}_{sci}$ reprezintă curentul complex de scurtcircuit injectat în nodul n_i, egal cu suma algebrică a curenților complecşi de scurtcircuit ai surselor din laturile incidente în acest nod: pentru sursele de tensiune $\underline{I}_{sck} = \underline{Y}_k \underline{E}_k$, iar pentru sursele de curent $\underline{I}_{sck} = \underline{J}_k$. În suma algebrică se iau cu semnul (+) curenții $\underline{I}_{sck}$ ai surselor ce "ies" din nod şi cu (−) ai celor ce "intră".

Dacă circuitul conține surse de tensiune şi/sau de curent comandate, sistemul de ecuații (3.311) se completează cu ecuațiile de comandă exprimate în funcție de necunoscutele metodei, $\underline{V}_j$.

Numărul de variabile independente introdus de această metodă este $n-1$.

Pentru circuitele fără surse ideale de tensiune independente sau comandate $\underline{E}^i$, respectiv $\underline{E}^i_c$, necunoscutele potențiale complexe la noduri se determină rezolvând sistemul (3.311) format din $n-1$ ecuații independente.

În cazul circuitelor care conțin surse ideale de tensiune, potențialele nodurilor j şi h la care este conectată o astfel de latură (fig. 3.55,a şi 3.55,b), se exprimă cu relațiile (3.312).

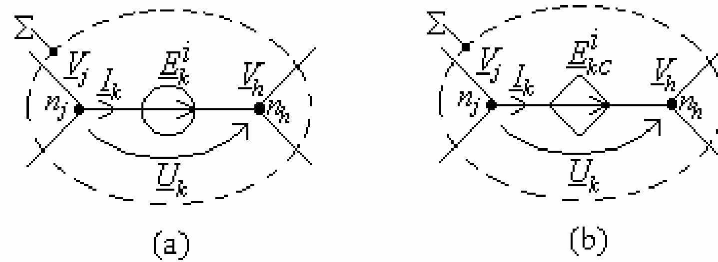


Fig. 3.55. Laturi necompatibile cu metoda nodală.

$$\underline{U}_k = \underline{V}_j - \underline{V}_h = -\underline{E}^i_k, \quad \underline{U}_k = \underline{V}_j - \underline{V}_h = -\underline{E}^i_{kc}, \tag{3.312}$$

de unde:

$$\underline{V}_h = \underline{V}_j + \underline{E}^i_k, \quad \underline{V}_h = \underline{V}_j + \underline{E}^i_{kc}. \tag{3.313}$$

Rezultă deci că pentru $(l_{E^i} + l_{E^i_c})$ necunoscute se pot formula ecuații de tipul

$$\underline{V}_{h(k)} = \underline{V}_{j(k)} + \underline{E}^i_k, k = \overline{1, l_{E^i}} \tag{3.314}$$

şi/sau

$$\underline{V}_{h(k)} = \underline{V}_{j(k)} + \underline{E}^i_{kc}, k = \overline{1, l_{E^i_c}}\ . \tag{3.315}$$

Pentru restul necunoscutelor ar trebui să se aplice ecuațiile (3.311) într-un *număr redus de noduri*, $n_r = n-1-(l_{E^i}+l_{E^i_c})$, deci $i = \overline{1, n_r}$.

Observații

1. Ecuația (3.311) *nu se poate aplica într-un nod în care este incidență o latură cu sursă ideală de tensiune*, deoarece curentul de scurtcircuit al acestei surse este infinit (impedanța complexă internă a ei este zero). În acest caz se poate recurge la următoarea tehnică: se alege o suprafață închisă Σ, care să cuprindă în interior latura *jh* ce conține sursa ideală de tensiune, sau, dacă este cazul, toate laturile conectate în paralel între nodurile *j* şi *h*, pe care se scrie apoi prima teoremă a lui Kirchhoff în formă simbolică. Se aplică apoi sistemul (3.311) în $n_r = n-1-(l_{E^i}+l_{E_c^i})$ noduri şi suprafețe Σ, adică pentru $i=\overline{1,n_r}$.

2. Rezultă că pentru circuitele care conțin surse ideale de tensiune independente şi/sau comandate, (E^i şi/sau E_c^i), metoda potențialelor nodurilor permite o reducere a numărului de ecuații de forma (3.342) cu numărul total al acestor surse de tensiune.

Algoritmul de aplicare al metodei potențialelor nodurilor

Pasul 1. Se determină numărul de noduri ale circuitului;

Pasul 2. Se alege un nod *n* de referință al cărui potențial complex se consideră nul, $\underline{V}_n = 0$;

Pasul 3. Se scriu $(l_{E^i}+l_{E_c^i})$ ecuații de tipul (3.315) pentru potențialele nodurilor adiacente surselor ideale de tensiune;

Pasul 4. Se aplică relațiile (3.311) în $n_r = n-1-(l_{E^i}+l_{E_c^i})$ noduri şi suprafețe Σ, adică pentru $i=\overline{1,n_r}$, ținând seama de faptul că în termenii din partea stângă ai relațiilor pot interveni şi potențiale pentru care s-au scris ecuațiile de la pasul 3;

Pasul 5. Sistemului obținut cu relațiile (3.311) şi (1.315) i se adaugă ecuațiile de comandă ale surselor comandate, exprimate în funcție de variabilele independente ale metodei;

Pasul 6. Se rezolvă sistemul de la pasul 5 şi se obțin valorile complexe ale celor $n-1$ variabile potențiale ale nodurilor;

Pasul 7. Cu relația (3.309) se calculează apoi tensiunile complexe la bornele laturilor circuitului;

Pasul 8. Se determină curenții complecşi din laturile circuitului cu ecuația caracteristică a laturii pentru laturile care conțin impedanțe complexe şi eventual surse de tensiune înseriate cu acestea, sau cu prima teoremă a lui Kirchhoff pentru cele formate din surse ideale de tensiune;

Pasul 9. Se verifică bilanțul puterilor active şi reactive sau bilanțul puterilor complexe.

În cazul în care circuitul analizat conține cuplaje magnetice se poate aplica metoda potențialelor la noduri dacă se fac anumite echivalări (vezi [2]) sau dacă se echivalează cuplajele magnetice cu circuite echivalente ce conțin surse comandate (vezi § 3.10.6).

O altă variantă de aplicare a metodei constă în introducerea ca necunoscute în sistemul de ecuații a curenților complecşi prin laturile cu surse ideale de tensiune şi prin bobinele cuplate magnetic (în general, a tuturor elementelor de circuit necompatibile cu metoda nodală clasică). Deşi are un număr mai mare de ecuații, această metodă cu necunoscute hibride, numită **metoda nodală modificată**, permite scrierea sistematică a sistemului de ecuații.

Pentru formularea matriceală a metodei potențialelor nodurilor în cazul ***circuitelor reciproce, fără cuplaje magnetice***, se adoptă latura standard din figura 3.54, în care se consideră conectată în paralel şi o sursă ideală independentă de curent având curentul complex $\underline{J}_k$. Din cele *n* noduri ale circuitului se alege un nod de referință, cu potențial zero, iar celorlalte $n-1$ noduri li se atribuie potențialele necunoscute $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \ldots, \underline{V}_{n-1}$.

Tensiunile complexe ale laturilor se pot exprima în funcție de potențialele complexe ale nodurilor cu relația

$$\underline{\boldsymbol{U}}_l = \boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\underline{\boldsymbol{V}}_{n-1}. \tag{3.316}$$

Considerând ecuația caracteristică a laturii

$$\underline{\boldsymbol{I}}_l = \underline{\boldsymbol{Y}}_l\left(\underline{\boldsymbol{U}}_l + \underline{\boldsymbol{E}}_l\right) + \underline{\boldsymbol{J}}_l, \tag{3.317}$$

unde $\underline{\boldsymbol{Y}}_l = \underline{\boldsymbol{Z}}_l^{-1}$ reprezintă matricea pătrată ($l \times l$) a admitanțelor complexe ale laturilor (se presupune $\underline{\boldsymbol{Z}}_l$ nesingulară), substituind relația (3.316) în (3.317) și ecuația astfel obținută în (3.291), se obține *forma matriceală a ecuațiilor circuitului în potențialele nodurilor în complex*:

$$\boldsymbol{A}\underline{\boldsymbol{Y}}_l\boldsymbol{A}^t\underline{\boldsymbol{V}}_{n-1} = -\boldsymbol{A}\left(\underline{\boldsymbol{Y}}_l\underline{\boldsymbol{E}}_l + \underline{\boldsymbol{J}}_l\right). \tag{3.318}$$

Ecuația (3.318) se poate pune sub forma

$$\underline{\boldsymbol{Y}}_{n-1}\underline{\boldsymbol{V}}_{n-1} = \underline{\boldsymbol{J}}_{n-1}, \tag{3.319}$$

unde

$$\underline{\boldsymbol{Y}}_{n-1} = \boldsymbol{A}\underline{\boldsymbol{Y}}_{n-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}} \tag{3.320}$$

este matricea admitanțelor complexe nodale, de ordin $(n-1)\times(n-1)$ și

$$\underline{\boldsymbol{J}}_{n-1} = -\boldsymbol{A}\left(\underline{\boldsymbol{Y}}_l\underline{\boldsymbol{E}}_l + \underline{\boldsymbol{J}}_l\right) \tag{3.321}$$

este vectorul curenților injectați în noduri de sursele din laturile incidente în aceste noduri.

Relația (3.319) permite implementarea simplă pe calculator a ecuațiilor circuitului [1], [14].

Rezolvând sistemul (3.319) se obține vectorul potențialelor complexe necunoscute ale celor $n-1$ noduri, apoi cu relația (1.316) se calculează vectorul tensiunilor la bornele laturilor $\boldsymbol{U}_l$. Cu relația (3.317) se obține în cele din urmă vectorul curenților complecși ai laturilor.

În cazul când circuitul electric analizat conține laturi formate numai din surse ideale independente de tensiune și dacă aceste laturi formează un arbore se poate aplica metoda nodală descrisă în capitolul 2 și în [1], ținând seama evident de analogia formală dintre circuitele de c.c. și circuitele electrice de c.a. fără cuplaje magnetice în complex.

Exemplul 3.8: Fie circuitul din figura 3.56, în care $e_1 = 100sin(100\pi t - \pi/4)$ V, $j_4 = 5\sqrt{2}\,sin100\pi t$ A, $R_1 = \omega L_2 = 1/\omega C_2 = R_3 = \omega L_3 = R_5 = 1/\omega C_5 = 5\ \Omega$, $\underline{E}_6 = \underline{Z}_{6,1}\underline{I}_1$, $\underline{Z}_{6,1} = 5(1-j)\Omega$. Se cer: a) să se calculeze valorile complexe și instantanee ale mărimilor: i_1, i_2, i_3, i_5, i_6, e_6 și u_4, utilizând ecuațiile circuitului în potențialele nodurilor în complex; b) să se verifice bilanțul puterilor active și reactive.

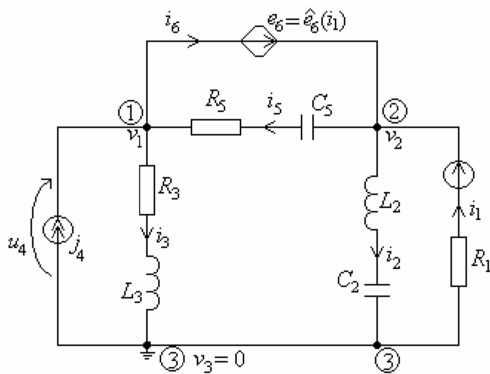


Fig. 3.56. Schema circuitului.

a) Se asociază celor trei noduri ale circuitului din figura 3.56, potențialele complexe: $\underline{V}_1, \underline{V}_2$ și $\underline{V}_3$.

Se consideră $\underline{V}_3 = 0$ V. Circuitul analizat conține o latură formată numai din sursă ideală de tensiune comandată în curent (latura 6). Aplicând legea lui Ohm în complex laturii 6, se obține:

$$\underline{V}_1 - \underline{V}_2 + \underline{E}_6 = 0$$

sau echivalent

$$\underline{V}_1 - \underline{V}_2 + \underline{Z}_{6,1}\left(-\underline{V}_2 + \underline{E}_1\right)/R_1 = 0,$$

unde s-a ținut seama de relația de definiție a sursei comandate, în care mărimea de comandă s-a exprimat cu ajutorul legii lui Ohm, aplicată laturii 1.

Pentru a obține a doua ecuație în potențialele nodurilor, se aplică legea lui Ohm în complex (teorema Joubert) laturii 2 care se află la rezonanță de tensiune:

$$\underline{V}_2 = 0.$$

Deci:

$$\underline{V}_1 = -\underline{Z}_{6,1} \cdot \frac{\underline{E}_1}{R_1} = 100j\,.$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_1}{R_1} = 10(1-j) \Rightarrow i_1 = 20\sin(100\pi t - \pi/4)\,\text{A};$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{V}_1}{R_3 + j\omega L_3} = 10(1+j) \Rightarrow i_3 = 20\sin(100\pi t + \pi/4)\,\text{A};$$

$$\underline{I}_5 = -\frac{\underline{V}_1}{R_5 - j/\omega C_5} = 10(1-j) \Rightarrow i_5 = 20\sin(100\pi t - \pi/4)\,\text{A};$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 - \underline{I}_3 + \underline{J}_4 = 5(1-4j) \Rightarrow i_2 = 5\sqrt{34}\sin(100\pi t - \text{arctg}4)\,\text{A};$$

$$\underline{I}_6 = -\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_5 = 5(1-4j) \Rightarrow i_6 = 5\sqrt{34}\sin(100\pi t - \text{arctg}4)\,\text{A};$$

$$\underline{E}_6 = -\underline{V}_1 = -100j \Rightarrow e_6 = 100\sqrt{2}\sin(100\pi t - \pi/2)\,\text{V};$$

$$\underline{U}_4 = -\underline{V}_1 = -100j \Rightarrow u_4 = 100\sqrt{2}\sin(100\pi t - \pi/2)\,\text{V}.$$

b) $$\underline{S}_g = P_g + jQ_g = \underline{E}_1\underline{I}_1^* + \underline{E}_6\underline{I}_6^* - \underline{U}_4\underline{J}_4^* = 3000\,\text{VA} \Rightarrow \begin{cases} P_g = 3000\,\text{W} \\ Q_g = 0\,\text{var} \end{cases};$$

$$P_R = R_1 I_1^2 + R_3 I_3^2 + R_5 I_5^2 = 3000\,\text{W} = P_g;$$

$$Q_X = (\omega L_2 - 1/\omega C_2)I_2^2 + \omega L_3 I_3^2 - 1/\omega C_5 I_5^2 = 0\,\text{var} = Q_g.$$

3.10.4. Metoda nodală modificată

Metoda de analiză nodală a circuitelor electrice în regim sinusoidal prezentată în paragraful anterior, numită **metoda nodală** (**MN***),* nu permite ca circuitul analizat să conțină elemente de circuit pentru care ecuația caracteristică (3.317) nu poate fi formulată - numite *elemente de circuit necompatibile cu metoda nodală* (cum sunt: sursele ideale independente şi/sau comandate de tensiune, bobinele cuplate magnetic, scurtcircuitele, laturile de comandă a surselor comandate $e_c(i_C)$ şi $j_c(i_C)$ etc.). În astfel de situații, pentru a păstra avantajele deosebite ale **metodei analizei nodale** (**MAN**) şi în cazul în care circuitul de curent alternativ analizat conține elemente de circuit necompatibile cu această metodă, s-a procedat la extinderea acesteia, obținându-se astfel **metoda analizei nodale modificate** (**MANM**).

În această metodă se consideră ca variabile independente potențialele complexe ale celor $n-1$ noduri independente ale circuitului, $\underline{V}_{n-1}$, şi curenții complecşi ai tuturor elementelor de circuit necompatibile cu metoda nodală, $\underline{\boldsymbol{I}}_m$.

Ecuațiile circuitelor de curent alternativ corespunzătoare metodei nodale modificate au următoarea formă matriceală:

$$\begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{Y}}_{n-1,n-1} & \underline{\boldsymbol{B}}_{n-1,m} \\ \underline{\boldsymbol{A}}_{m,n-1} & \underline{\boldsymbol{Z}}_{m,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{V}}_{n-1} \\ \underline{\boldsymbol{I}}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{I}}_{sc,n-1} \\ \underline{\boldsymbol{E}}_m \end{bmatrix}, \tag{3.322}$$

unde: $\underline{\boldsymbol{Y}}_{n-1,n-1}$ este matricea admitanțelor complexe nodale corespunzătoare celor n−1 noduri independente; $\underline{\boldsymbol{B}}_{n-1,m}$ este o matrice de dimensiunea $(n-1)\times m$, ale cărei elemente sunt −1, 0, +1 sau factorii de transfer (amplificare) în curent ai surselor comandate $j_c(i_C)$; $\underline{\boldsymbol{A}}_{m,n-1}$ reprezintă o matrice de dimensiunea $m\times(n-1)$ cu elemente −1, 0, +1 sau factorii de transfer (amplificare) în tensiune ai surselor comandate $e_c(u_C)$; $\underline{\boldsymbol{Z}}_{m,m}$ este o matrice pătrată $m\times m$ cu elemente nenule formate din impedanțele complexe de transfer ale surselor comandate $e_c(i_C)$ şi impedanțele complexe corespunzătoare bobinelor cuplate magnetic; $\underline{\boldsymbol{V}}_{n-1}$ este vectorul potențialelor complexe ale celor $n-1$ noduri independente; $\underline{\boldsymbol{I}}_m$ - vectorul curenților complecşi de comandă,

$$\underline{\boldsymbol{I}}_m = \left[\underline{\boldsymbol{I}}^{\mathrm{t}}_{E^i}, \underline{\boldsymbol{I}}^{\mathrm{t}}_{E_c}, \underline{\boldsymbol{I}}^{\mathrm{t}}_{E^C}, \underline{\boldsymbol{I}}^{\mathrm{t}}_{J^C}, \underline{\boldsymbol{I}}^{\mathrm{t}}_{M}, \underline{\boldsymbol{I}}^{\mathrm{t}}_{sc}\right]^{\mathrm{t}}, \tag{3.323}$$

în care: $\underline{\boldsymbol{I}}_{E^i}$ - este vectorul curenților complecşi prin laturile formate numai din surse ideale independente de tensiune; $\underline{\boldsymbol{I}}_{E_c}$ - este vectorul curenților complecşi prin laturile comandate ale surselor ideale de tensiune comandate; $\underline{\boldsymbol{I}}_{E^C}$ - este vectorul curenților complecşi prin laturile de comandă ai surselor de tensiune comandate în curent; $\underline{\boldsymbol{I}}_{J^C}$ - este vectorul curenților complecşi prin laturile comandate ale surselor de curent comandate în curent; $\underline{\boldsymbol{I}}_M$ - este vectorul curenților complecşi prin bobinele cuplate magnetic şi $\underline{\boldsymbol{I}}_{sc}$ - este vectorul curenților complecşi prin laturile scurtcircuitate (pasive ş aflate la rezonanță); $\underline{\boldsymbol{I}}_{sc,n-1}$- vectorul curenților complecşi de scurtcircuit injectați în cele $n-1$ noduri şi $\underline{\boldsymbol{E}}_m$ este vectorul t.e.m. complexe corespunzătoare surselor ideale independente de tensiune.

Este evident că dacă circuitul analizat nu conține surse comandate $e_c(u_C)$) şi $i_c(i_C)$, atunci $\underline{\boldsymbol{B}}_{n-1,m} = \underline{\boldsymbol{A}}^t_{m,n-1}$.

Ecuațiile (3.322) se obțin prin aplicarea primei teoreme a lui Kirchhoff, în formă simbolică, în cele $n-1$ noduri, în care curenții laturilor compatibile cu metoda nodală se exprimă cu legea conducției electrice în complex (teorema lui Joubert) în funcție de parametrii laturilor şi potențialele nodurilor. Ecuațiile corespunzătoare laturilor curenților de comandă se obțin cu ajutorul legii lui Ohm, în care mărimile comandate sunt exprimate în funcție de mărimile de comandă, conform relațiilor de definiție ale surselor comandate respective.

În cele ce urmează se prezintă contribuția câtorva elemente de circuit la formarea matricei sistemului de ecuații (3.322) şi la formarea vectorului termenilor liberi (TL). Pentru fiecare latură se notează cu n_+ potențialul electric al nodului din care pleacă sensul curentului electric şi cu n_- potențialul electric al nodului în care intră sensul curentului electric.

Sursa ideală independentă de tensiune

$$(l_e):\quad \underline{V}_+ - \underline{V}_- = -\underline{E}$$

	n_+	n_-	$\underline{I}_E$	TL
n_+			+1	
n_-			−1	
$\underline{I}_E$	+1	−1		$-\underline{E}$

Sursa ideală independentă de curent

$$(n_+):\quad ... = -\underline{J};\quad (n_-):\quad ... = \underline{J}$$

	n_+	n_-	TL
n_+			$-\underline{J}$
n_-			$\underline{J}$

Latura standard din figura 3.54

$$(n_+): ... + \underline{Y}_k \underline{V}_{k_+} - \underline{Y}_k \underline{V}_{k_-} + ... = -\underline{Y}_k \underline{E}_k;\ (n_-): ... - \underline{Y}_k \underline{V}_{k_+} + \underline{Y}_k \underline{V}_{k_-} + ... = \underline{Y}_k \underline{E}_k$$

	n_{k+}	n_{k-}	TL
n_{k+}	$\underline{Y}_k$	$-\underline{Y}_k$	$-\underline{Y}_k\,\underline{E}_k$
n_{k-}	$-\underline{Y}_k$	$\underline{Y}_k$	$\underline{Y}_k\,\underline{E}_k$

Sursa comandată $e_c(i_C)$ (fig. 3.57)

$$(l_C):\quad \underline{V}_{C_+} - \underline{V}_{C_-} = 0;\quad (l_c):\quad \underline{V}_{c_+} - \underline{V}_{c_-} - \underline{Z}_{c_C}\underline{I}_C = 0$$

	n_{C+}	n_{C-}	n_{c+}	n_{c-}	$\underline{I}_C$	$\underline{I}_c$	TL
n_{C+}					+1		
n_{C-}					–1	+1	
n_{c+}						–1	
n_{c-}							
$\underline{I}_C$	+1	–1					
$\underline{I}_c$			+1	–1	$\underline{Z}_{cC}$		

Sursa comandată $j_c(u_C)$ (fig. 3.58)

$$(n_{c_+}):\ ... + \underline{Y}_{c_C}\underline{V}_{C_+} - \underline{Y}_{c_C}\underline{V}_{C_-} + ... = 0;\ (n_{c_-}):\ ... - \underline{Y}_{c_C}\underline{V}_{C_+} + \underline{Y}_{c_C}\underline{V}_{C_-} + ... = 0$$

	n_{C+}	n_{C-}	n_{c+}	n_{c-}	TL
n_{C+}					
n_{C-}					
n_{c+}	$\underline{Y}_{c_C}$	$-\underline{Y}_{c_C}$			
n_{c-}	$-\underline{Y}_{c_C}$	$\underline{Y}_{c_C}$			

Sursa comandată $e_c(u_C)$ (fig. 3.59)

$$(l_c):\quad \underline{V}_{c_+} - \underline{V}_{c_-} - \underline{A}_{c_C}(\underline{V}_{C_+} - \underline{V}_{C_-}) = 0$$

	n_{C+}	n_{C-}	n_{c+}	n_{c-}	$\underline{I}_c$	TL
n_{C+}						
n_{C-}						
n_{c+}					+1	
n_{c-}					–1	
$\underline{I}_c$	$\underline{A}_{cC}$	$-\underline{A}_{cC}$	+1	–1		

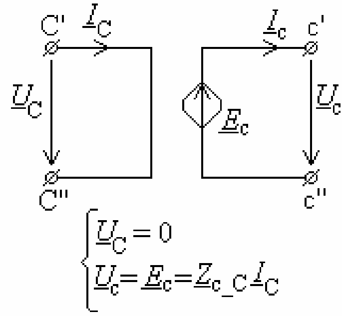


Fig. 3.57. Sursa comandată $e_c(i_C)$.

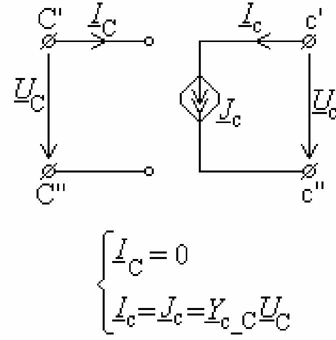


Fig. 3.58. Sursa comandată $j_c(u_C)$.

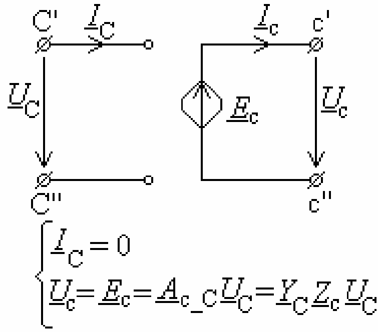


Fig. 3.59. Sursa comandată $e_c(u_C)$.

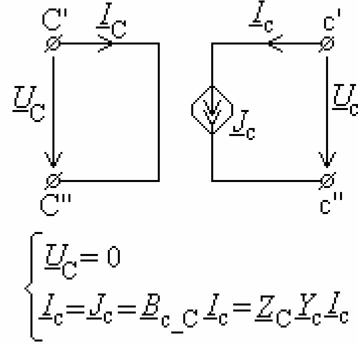


Fig. 3.60. Sursa comandată $j_c(i_C)$.

Sursa comandată $j_c(i_C)$ (fig. 3.60)

$$\left(n_{c_+}\right):\quad ... + \underline{B}_{c_C}\,\underline{I}_C + ... = 0;\quad \left(n_{c_-}\right):\quad ... - \underline{B}_{c_C}\,\underline{I}_C + ... = 0$$

	n_{C+}	n_{C-}	n_{c+}	n_{c-}	$\underline{I}_C$	TL
n_{C+}					+1	
n_{C-}					–1	
n_{c+}					$\underline{B}_{c_C}$	
n_{c-}					$-\underline{B}_{c_C}$	
$\underline{I}_C$	+1	–1				

Exemplul 3.9: Se consideră circuitul reprezentat în figura 3.61, în care $e_1 = 100sin(100\pi t - \pi/4)$ V, $j_4 = 5\sqrt{2}\,sin100\pi t$ A, $R_1 = \omega L_2 = 1/\omega C_2 = R_3 = \omega L_3 = R_5 = 1/\omega C_5 = 5\ \Omega$, $\underline{E}_6 = \underline{Z}_{6_7}\underline{I}_7$, $\underline{Z}_{6_7} = 5(1 - j)\Omega$. Se cer: a) să se calculeze valorile complexe şi instantanee ale mărimilor: i_1, i_2, i_3, i_5, i_6, e_6 şi u_4, utilizând ecuaţiile nodale modificate în complex; b) să se verifice bilanţul puterilor active şi reactive.

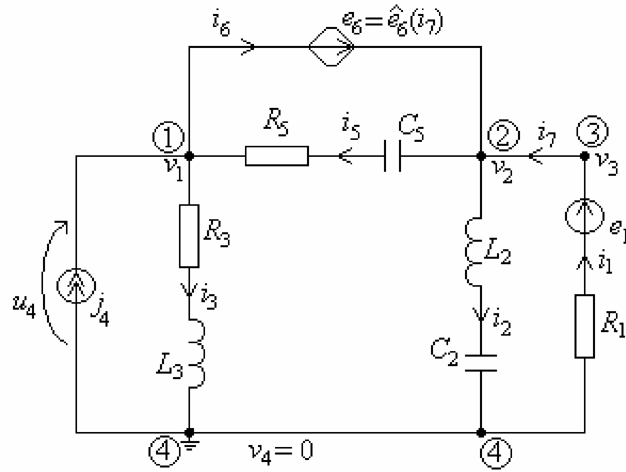


Fig. 3.61. Diagrama circuitului.

a) Se asociază celor patru noduri ale circuitului din figura 3.61, potențialele complexe: $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$ și $\underline{V}_4$.

Se consideră $\underline{V}_4 = 0\,\text{V}$. Circuitul analizat conține o latură formată numai din sursă ideală de tensiune comandată în curent (latura 6) și deoarece $\underline{Z}_2 = j\omega L_2 - \dfrac{j}{\omega C_2} = 5j - 5j = 0$ curentul $\underline{I}_2$ trebuie considerat ca variabilă independentă. Structura vectorului variabilelor independente este

$$\underline{\boldsymbol{X}} = \left[\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3, \underline{I}_2, \underline{I}_6, \underline{I}_7\right]^{\text{t}}.$$

Ecuațiile nodale modificate în complex ale circuitului din figura 3.61 sunt:

$$(n_1):\quad \left(\frac{1}{R_3 + j\omega L_3} + \frac{1}{R_5 + \dfrac{1}{j\omega C_5}}\right)\underline{V}_1 - \left(\frac{1}{R_5 + \dfrac{1}{j\omega C_5}}\right)\underline{V}_2 + \underline{I}_6 = \underline{J}_4\ ;$$

$$(n_2):\quad -\left(\frac{1}{R_5 + \dfrac{1}{j\omega C_5}}\right)\underline{V}_1 + \left(\frac{1}{R_5 + \dfrac{1}{j\omega C_5}}\right)\underline{V}_2 + \underline{I}_2 - \underline{I}_6 - \underline{I}_7 = 0\,;$$

$$(n_3):\quad \frac{1}{R_1}\underline{V}_3 + \underline{I}_7 = \frac{\underline{E}_1}{R_1}\,;$$

$$(l_2):\quad \underline{V}_2 = 0\,;$$

$$(l_5):\quad \underline{V}_1 - \underline{V}_2 + \underline{Z}_{6_7}\underline{I}_7 = 0\,;$$

$$(l_7):\quad -\underline{V}_2 + \underline{V}_3 = 0.$$

Ecuațiile matriceale (3.323) au următoarea structură:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_3+j\omega L_3}+\frac{1}{R_5+\frac{1}{j\omega C_3}} & -\frac{1}{R_5+\frac{1}{j\omega C_3}} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{R_5+\frac{1}{j\omega C_3}} & -\frac{1}{R_5+\frac{1}{j\omega C_3}} & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_{6_7} \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \\ \underline{V}_3 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_6 \\ \underline{I}_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\underline{E}_1}{R_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rezolvând sistemul de ecuații de mai sus se obține:

$$\underline{V}_1 = 100j\ ,\ \underline{V}_2 = 0,\ \ \underline{V}_3 = 0,,\ \underline{I}_2 = 5(1-4j),\ \underline{I}_6 = 5(1-4j)\ \text{ și } \underline{I}_7 = 10(1+j).$$

Deci:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_1}{R_1} = 10(1-j) \Rightarrow i_1 = 20\sin(100\pi t - \pi/4)\,\text{A};$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{V}_1}{R_3 + j\omega L_3} = 10(1+j) \Rightarrow\ i_3 = 20\sin(100\pi t + \pi/4)\,\text{A};$$

$$\underline{I}_5 = -\frac{\underline{V}_1}{R_5 - j/\omega C_5} = 10(1-j) \Rightarrow\ i_5 = 20\sin(100\pi t - \pi/4)\,\text{A};$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 - \underline{I}_3 + \underline{J}_4 = 5(1-4j) \Rightarrow i_2 = 5\sqrt{34}\sin(100\pi t - \text{arctg}4)\ \text{A};$$

$$\underline{I}_6 = -\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_5 = 5(1-4j) \Rightarrow\ i_6 = 5\sqrt{34}\sin(100\pi t - \text{arctg}4)\ \text{A};$$

$$\underline{E}_6 = -\underline{V}_1 = -100j\ \Rightarrow e_6 = 100\sqrt{2}\sin(100\pi t - \pi/2)\,\text{V};$$

$$\underline{U}_4 = -\underline{V}_1 = -100j\ \Rightarrow\ u_4 = 100\sqrt{2}\sin(100\pi t - \pi/2)\,\text{V}.$$

b) $$\underline{S}_g = P_g + jQ_g = \underline{E}_1\underline{I}_1^* + \underline{E}_6\underline{I}_6^* - \underline{U}_4\underline{J}_4^* = 3000\ \text{VA} \Rightarrow \begin{cases} P_g = 3000\ \text{W} \\ Q_g = 0\ \text{var} \end{cases};$$

$$P_R = R_1I_1^2 + R_3I_3^2 + R_5I_5^2 = 3000\ \text{W} = P_g;$$

$$Q_X = (\omega L_2 - 1/\omega C_2)I_2^2 + \omega L_3 I_3^2 - 1/\omega C_5 I_5^2 = 0\ \text{var} = Q_g.$$

3.11. FUNCȚII DE CIRCUIT

Fie un circuit electric de c.a. (în regim sinusoidal), liniar, pasiv care are două porți de acces: una de intrare (*i*’, *i*’’) şi cealaltă de ieşire (*e*’, *e*’’) (fig. 3.62). Cele patru funcții de circuit (rețea) în regim sinusoidal în raport cu cele două porți de acces se definesc ca în tabelul 3.11.1.

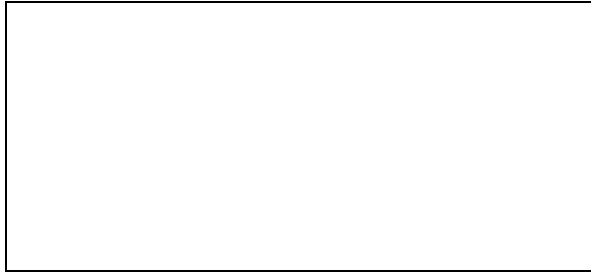
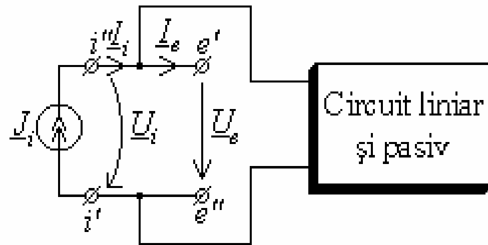


Fig. 3.62.Definirea funțiilor de circuit.

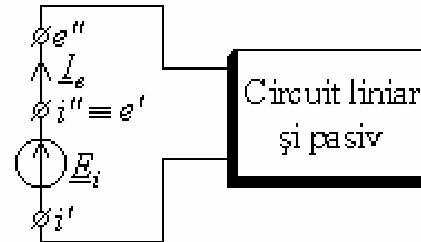
Porțile intrare-ieşire pentru calculul impedanței (admitanței) complexe de intrare sunt tratate ca în figura 3.63,a (fig. 3.63,b).

Metodele de generare a funcțiilor de circuit prezentate în capitolul 5 din [1,2] rămân (cu modificările corespunzătoare analogiei formale dintre circuitele de c.c. şi circuitele de c.a. în complex) valabile şi în cazul circuitelor electrice liniare în regim sinusoidal.

În [22] se prezintă un program de generare a tuturor funcțiilor de circuit în formă simbolică, parțial simbolică şi/sau numerică numit **PGFC** **P**rogram de **G**enerare a **F**uncțiilor de **C**ircuit.



(a)



(b)

Fig. 3.63. Definirea impedanței şi admitanței de intrare.

Exemplul 3.10: Să se determine factorul de amplificare în tensiune pentru circuitul reprezentat în figura 3.64,a. Înlocuind amplificatorul operațional prin schema echivalenta formată dintr-o sursa ideală de tensiune comandată în tensiune se obține schema echivalentă din figura 3.64,b. Se observă că tensiunea complexă de ieşire are expresia

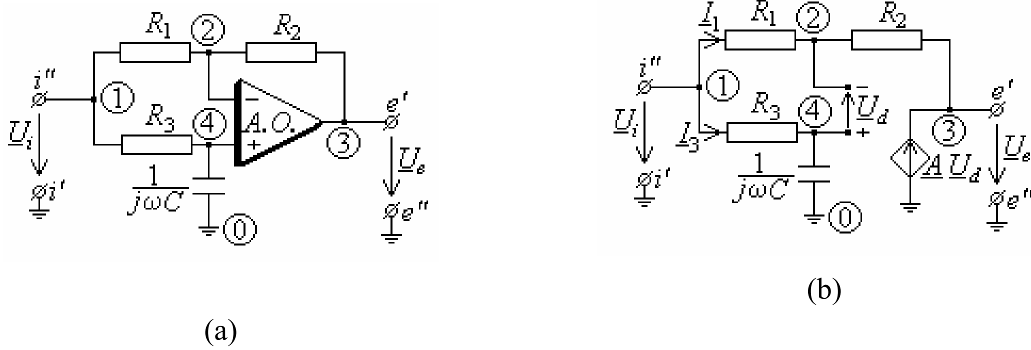
$$\underline{U}_e = \underline{A}\underline{U}_d .$$

Tabelul 3.11.1

Tipul funcție de circuit	Relația de definiție
Impedanța complexă de transfer, $\underline{Z}_{ei}$	$\underline{Z}_{ei} \overset{d}{=} \left.\frac{\underline{U}_e}{\underline{J}_i}\right\|_{\underline{I}_i=\underline{J}_i;\underline{I}_e=0}$
Admitanța complexă de transfer, $\underline{Y}_{ei}$	$\underline{Y}_{ei} \overset{d}{=} \left.\frac{\underline{I}_e}{\underline{E}_i}\right\|_{\underline{U}_i=\underline{E}_i;\underline{U}_e=0}$
Factorul de transfer (amplificare) în tensiune, $\underline{A}_{ei}$	$\underline{A}_{ei} \overset{d}{=} \left.\frac{\underline{U}_e}{\underline{E}_i}\right\|_{\underline{U}_i=\underline{E}_i;\underline{I}_e=0}$
Factorul de transfer (amplificare) în curent, $\underline{B}_{ei}$	$\underline{B}_{ei} \overset{d}{=} \left.\frac{\underline{I}_e}{\underline{J}_i}\right\|_{\underline{I}_i=\underline{J}_i;\underline{U}_e=0}$

Din teorema a doua a lui Kirchhoff aplicată pe buclele: 1-4-0-1, 1-2-3-0-1 şi 2-3-0-4-2 rezultă:

$$\underline{I}_3 = \frac{j\omega C\underline{U}_i}{jCR_3\omega + 1},$$



(b)

(a)

Fig. 3.63. Schema circuitului.

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_i - \underline{U}_e}{R_1 + R_2},$$

$$\underline{U}_d = -R_2 \frac{\underline{U}_i - \underline{U}_e}{R_1 + R_2} - \underline{U}_e + \frac{\underline{U}_i}{jCR_3\omega + 1}.$$

Din relaţiile de mai sus se obţine expresia factorului de transfer (amplificare) în tensiune

$$\underline{A}_{ei} = \frac{\underline{U}_e}{\underline{U}_i} = \frac{\underline{A}(-jR_2R_3C\omega + R_1)}{(jR_3C\omega + 1)(R_1 + R_2 + \underline{A}R_1)}.$$

Dacă se consideră că $\underline{A} \to \infty$ se obţine

$$\underline{A}_{ei}(\omega) = \frac{-jR_2R_3C\omega + R_1}{jR_1R_3C\omega + R_1},$$

de unde rezultă:

$$\underline{A}_{ei}(0) = 1 \text{ şi } \lim_{\omega\to\infty} \underline{A}_{ei}(\omega) = -\frac{R_2}{R_1}.$$

În cazul $\omega \to \infty$ amplificatorul operaţional din figura 3.63,a acţionează ca un amplificator inversor cu amplificarea $-R_2 / R_1$.

Atât programul PGFC cât şi programul SPICE permit reprezentarea grafică a modulului şi argumentului oricărei funcţii de reţea în funcţie de frecvenţă. Domeniile de frecvenţă întâlnite în practică sunt adesea foarte largi, astfel încât pentru reprezentarea grafică a caracteristicilor de frecvenţă (*amplitudine-frecvenţă* şi *fază-frecvenţă*) cu un grad de claritate adecvat pe întregul domeniu de variaţie al frecvenţei, este convenabil să se utilizeze **axe semilogaritmice**. Modulul funcţiei de circuit $|\underline{F}_{ei}(\omega)|$ şi faza $\arg(\underline{F}_{ei}(\omega))$ sunt reprezentate grafic pe scări liniare calibrate în *decibeli* şi, respectiv în *grade*. Frecvenţa (pulsaţia) este reprezentată pe o scară logartitmică calibrată *în decade de frecvenţe* (*pulsaţii*).

Reprezentările grafice semilogaritmice se numesc **reprezentări sau diagrame Bode**, după numele inginerului american Hendrik W. Bode, iniţiatorul acestor reprezentări.

Mai întâi se împarte axa verticală în intervale egale de decibeli, astfel +40 +20 0 –20 –40 sau în intervale egale de grade $+180^0\ +90^0\ 0^0\ -90^0\ -180^0$, apoi se iau, pe axa orizontală, intervale spațiale egale care reprezintă **decade** de frecvențe (pulsații) $1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, ...$, în Hz (rad/s) (fig. 3.64).

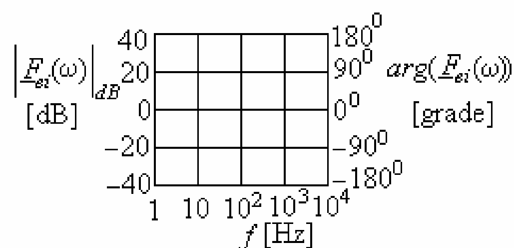


Fig. 3.64. Diagrama Bode.

Intervalul de o decadă se mai numeşte şi **ciclu**. O valoare oarecare a frecvenței (pulsației) f (ω) din intervalul ciclului $10^n < f < 10^{n+1}$ este localizată prin

$$l = \log_{10} \frac{f}{10^n} \qquad (3.324)$$

De exemplu, localizarea frecvenței f = 320 Hz, din interiorul ciclului $10^2 < f < 10^3$ Hz este $l = \log_{10}\left(\frac{320}{10^2}\right) \cong 0{,}5$. În figura 3.65 sunt prezentate frecvențele din interiorul ciclului $1 < f < 10$ Hz.

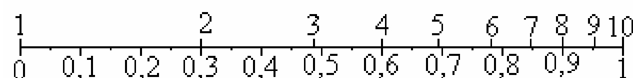


Fig. 3.65. Frecvențele din intervalul $1 < f < 10$ Hz..

Adesea este convenabil să se lucreze cu **frecvențe** (**pulsații**) **normalizate** $f / f_0\ (\omega / \omega_0)$, unde $f_0\ (\omega_0)$ este frecvența (pulsația) caracteristică a circuitului. Unitățile frecvenței normalizate sunt *decadele*. Natura logaritmică a scalei frecvenței comprimă frecvențele înalte şi dilată frecvențele joase. Această proprietate permite vizualizarea răspunsului la ambele extreme ale frecvenței cu un nivel de detaliu comparabil.

Valoarea în decibeli (dB) a modulului funcției de circuit se defineşte astfel:

$$\left|\underline{F}_{ei}\right|_{\mathrm{dB}} \overset{\mathrm{d}}{=} 20 \log_{10}\left|\underline{F}_{ei}\right|. \qquad (3.325)$$

Conversia inversă de la valorile în dB la valorile normale (obişnuite) ale funcției de circuit este

$$\left|\underline{F}_{ei}\right| = 10^{\left|\underline{F}_{ei}\right|_{\mathrm{dB}}/20}. \qquad (3.326)$$

De exemplu, valoarea în dB a factorului de amplificare în tensiune de –400 este $20 \log_{10} 400 = 52$ dB. Invers, valoarea de 46 de dB corespunde unei valori a lui $\left|\underline{A}_{ei}\right|$ de $10^{42/20} \cong 200$. În tabelul 3.11.2 sunt prezentate cele mai uzuale valori ale modulului

factorului de transfer (amplificare) în tensiune sau în curent şi valorile corespunzătoare în decibeli.

Se observă că: (a) valoare *unitate* a modulului factorului de amplificare în tensiune corespunde lui *zero* dB; (b) modulele *mai mari* decât unitatea corespund la valori *pozitive* în dB şi (c) valorilor modulelor *mai mici* decât unitatea le corespund valori *negative* în dB.

Tabelul 3.11.2

$\lvert\underline{F}_{ei}\rvert$	$\lvert\underline{F}_{ei}\rvert_{\mathrm{dB}}$	$\lvert\underline{F}_{ei}\rvert$	$\lvert\underline{F}_{ei}\rvert_{\mathrm{dB}}$
1	0	1	0
$\sqrt{2}$	3	$1/\sqrt{2}$	–3
2	6	1ţ2	–6
$\sqrt{10}$	10	$1/\sqrt{10}$	–10
10	20	0,1	–20
100	40	0,01	–40
1000	60	0,001	–60
10^{n}	$20n$	10^{-n}	$-20n$

Ținând seama de proprietățile numerelor complexe se poate demonstra simplu că între două funcții de circuit oarecare $\underline{F}_{ei,1}$ şi $\underline{F}_{ei,2}$ există următoarele relații:

$$\left|\underline{F}_{ei,1}\times\underline{F}_{ei,2}\right|_{\mathrm{dB}}=\left|\underline{F}_{ei,1}\right|_{\mathrm{dB}}+\left|\underline{F}_{ei,2}\right|_{\mathrm{dB}} \tag{3.327,a}$$

$$\arg\left(\underline{F}_{ei,1}\times\underline{F}_{ei,2}\right)=\arg\left(\underline{F}_{ei,1}\right)+\arg\left(\underline{F}_{ei,2}\right) \tag{3.327,b}$$

$$\left|\underline{F}_{ei,1}/\underline{F}_{ei,2}\right|_{\mathrm{dB}}=\left|\underline{F}_{ei,1}\right|_{\mathrm{dB}}-\left|\underline{F}_{ei,2}\right|_{\mathrm{dB}} \tag{3.328,a}$$

$$\arg\left(\underline{F}_{ei,1}/\underline{F}_{ei,2}\right)=\arg\left(\underline{F}_{ei,1}\right)-\arg\left(\underline{F}_{ei,2}\right) \tag{3.328,b}$$

$$\left|1/\underline{F}_{ei}\right|_{\mathrm{dB}}=-\left|\underline{F}_{ei}\right|_{\mathrm{dB}} \tag{3.329,a}$$

$$\arg\left(1/\underline{F}_{ei}\right)=-\arg\left(\underline{F}_{ei}\right). \tag{3.329,b}$$

Exemplul 3.11: Se determine polii şi zerourile impedanței complexe de intrare a circuitului reprezentat în figura 3.67 şi să se deseneze diagramele Bode (amplitudine-pulsație şi fază-pulsație).

Impedanța complexă de intrare a circuitului simplu din figura 1.72,a are expresia:

$$\underline{Z}_{ii}(\omega) = \frac{jR_1R_2C\omega + R_1 + R_2}{jR_2C\omega + 1} = \frac{10^3\left(j\omega + 10^6\right)}{j\omega + 10^3}.$$

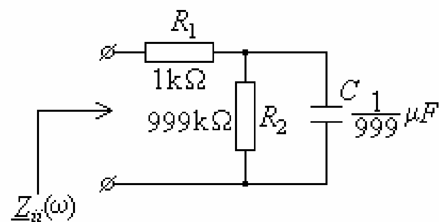
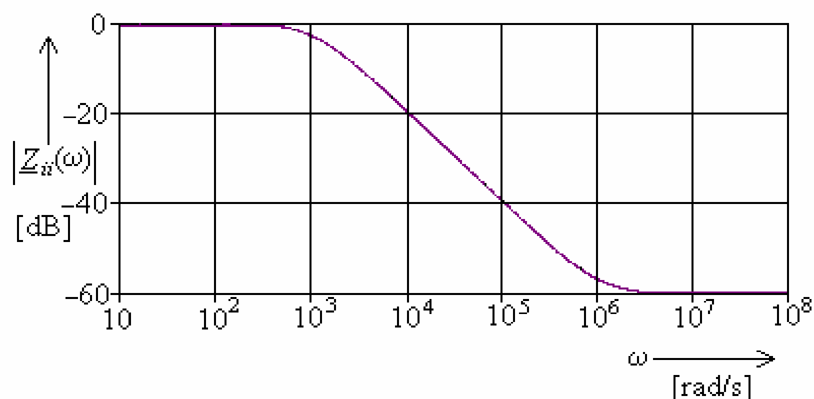


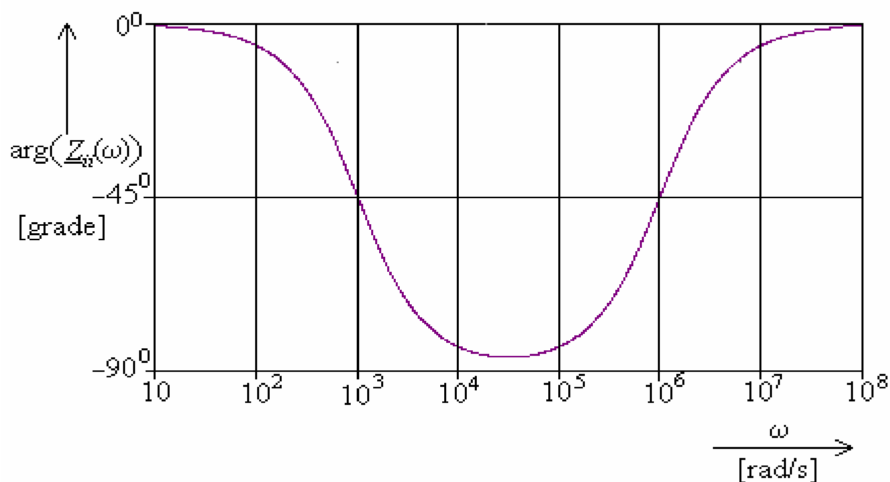
Fig. 3.66. Schema circuitului.

Impedanța complexă de intrare are un singur pol $s = j\omega = p_1 = -10^3$ și un singur zero. Diagramele Bode sunt prezentate în figura 3.67,a. și, respectiv, în figura 3.67,b. Se observă că faza (fig.3.67,b) prezintă un minim pentru

$$\omega_m = 10^4\sqrt{10} \text{ rad/s}.$$



(a)



(b)

Fig. 3.66. Diagramele Bode pentru circuitul din figura 3.65.

BIBLIOGRAFIE

1. **L.O. Chua, P.M. Lin,** *Computer-aided analysis of electronic circuit'*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

2. **L.O. Chua, C.A. Desoer, E.S. Kuh**, *Linear and nonlinear circuits*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1987.

3. **A.F. Schwarz**, *Computer-aided design of microelectronic circuits and systems. Fundamentals, Methods and Tools*, Academic Press, New York, 1987.

4. **C.I. Mocanu,** *Teoria circuitelor electrice*, Editură Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.

5. **M. Preda, P. Cristea,** *Bazele electrotehnicii*, vol. II. Circuite electrice, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980.

6. **M. Hasler, J. Neirynck,** *Circuits nonlinéaires*, Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, 1985.

7. **N. Balabanian, T. Bickart, S. Seshu**, *Teoria modernă a circuitelor*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1974.

8. **W. J. McCalla**, *Fundamentals of Computer-Aided Circuit Simulation*, Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordecht/Lancaster, 1988.

9. **S. Franco**, *Electric Circuits Fundamentals*, Saunders College Publishing, New York, 1995.

10. **A. Timotin**, Viorica Hortopan, A. Ifrim, M. Preda, *Lecţii de Bazele Electrotehnicii*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1970.

11. **A. Moraru**, *Bazele electrotehnicii*', vol. II. Teoria circuitelor, Tipografia Universităţii Politehnica Bucureşti, 1993.

12. **D. Topan**, *Circuits électriques*, Editura Universitaria, Craiova, 1996.

13. **M. Iordache, M. Perpelea**, *Analiza asistata de calculator a circuitelor electrice si electronice neliniare complexe de mari dimensiuni*, Editura Didactica si Pedagogica, Bucureşti, 1995.

14. **Lucia Dumitriu, M., Iordache**, *Teoria modernă a circuitelor electrice* - Vol. I - *Fundamentare teoretică, Aplicaţii, Algoritmi şi Programe de calcul*, Editura All Educational S.A., Bucureşti 1998.

15. **M.Iordache, Lucia Dumitriu**, *Teoria modernă a circuitelor electrice* - Vol. II - *Fundamentare teoretică, Aplicaţii, Algoritmi şi Programe de calcul*, Editura All Educational S.A., Bucureşti 2000.

16. **M. Iordache, Lucia Dumitriu,** *Simularea asistată de calculator a circuitelor analogice*, Editura POLITEHNICA Press, Bucureşti 2002 (450).

17. **M. Iordache**, **L. Mandache,** *Analiza asistată de calculator a circuitelor analogice neliniare*, Editura POLITEHNICA Press, Bucureşti 2004.

18. **Lucia Dumitriu, M. Iordache**, *Simularea numerică a circuitelor analogice cu programul PSPICE*, Editura MATRIX ROM, Bucureşti, 2006.

19. **M. Iordache, L. Mandache, M. Perpelea**, *Analyse numérique circuits analogiques non linéaires*, Groupe Genoyer, Marseille, 2006.

20. **L. O. Chua, C. A. Desoer, E. S. Kuh** *Linear and nonlinear circuits*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1987.

21. A. Moraru, *Bazele electrotehnicii, vol. II. Teoria circuitelor*. Tipografia Universităţii „Politehnica" Bucureşti, 1993.

22. **M. Iordache, Lucia Dumitriu** *„PGFC - Program de Generare a Funcţiilor de Circuit", Manual de utilizare.* Biblioteca de programe a Catedrei de Electrotehnică a Universităţii „Politehnica" Bucureşti, 1998.

23.**T. Marian** *„SPICE,* . Editura Teora, Bucureşti, 1996.

24. **M. Badea**, *Analiza asistată de calculator a circuitelor electrice*, Editura InfoMed, Craiova, 1997.

CAPITOLUL 4

CIRCUITE ELECTRICE TRIFAZATE

4.1. INTRODUCERE

Cel mai simplu sistem de transmisie a energiei electrice este constituit dintr-un generator care furnizează o t.e.m. alternativă $e(t) = \sqrt{2}\, E \sin(\omega t + \gamma)$ şi un receptor reprezentat printr-o impedanţă de sarcină. În acest caz transmiterea energiei electromagnetice de la sursă la consumator se face printr-o linie electrică realizată cu două conductoare de secţiuni egale. Dacă U_n şi I_n sunt valorile nominale ale tensiunii, respectiv curentului (valori impuse de izolaţia liniei, respectiv de pierderile de putere în conductoare) puterea activă maximă pe care o poate transmite linia (la factor de putere unitar) este

$$P_{\max} = P_n^{(1)} = U_n I_n , \tag{4.1}$$

ceea ce înseamnă o putere specifică pe conductor egală cu

$$P_{n\,cond}^{(1)} = \frac{U_n I_n}{2} . \tag{4.2}$$

Dacă sursa de producere a energiei electromagnetice este un generator care produce un sistem de trei t.e.m. alternative, linia de transmisie este alcătuită din trei conductoare de fază având aceeaşi secţiune, eventual şi un conductor neutru de secţiune mai mică, iar receptorul are impedanţele de fază conectate în stea sau triunghi, sistemul de producere, transmisie şi distribuţie a energiei electromagnetice se numeşte **sistem trifazat**.

Dacă conductoarele liniei trifazate sunt dimensionate pentru intensitatea I_n egală cu a curentului liniei monofazate şi pentru aceeaşi tensiune U_n între două conductoare, se poate demonstra [1] că puterea maximă (la factor de putere unitar) ce revine fiecărui conductor este, indiferent de tipul conexiunii (stea sau triunghi), $U_n I_n / \sqrt{3}$.

Rezultă deci că linia trifazată are o capacitate de transmisie a puterii active de $2/\sqrt{3}$ ori mai mare decât a liniei monofazate.

Comparativ cu sistemul monofazat, sistemul trifazat (ce caracterizează tehnica actuală de producere, transmisie şi distribuţie a energiei electromagnetice) are următoarele avantaje:

- o transmisie de energie mai ieftină, costul liniei de transport fiind mai mic la aceeaşi putere tranzitată;
- posibilitatea de a dispune la consumator de două tensiuni diferite - cea de fază (între oricare fază şi neutru) şi cea de linie (dintre faze);
- posibilitatea de a produce câmpuri magnetice învârtitoare care permit realizarea motoarelor asincrone care sunt cele mai simple şi economice motoare electrice;
- producerea unui sistem trifazat de t.e.m. este principial la fel de simplă ca şi aceea a unei singure t.e.m.

4.2. SISTEME DE MĂRIMI TRIFAZATE

Un ansamblu de trei mărimi sinusoidale ordonate, de aceeaşi frecvenţă, defazate între ele, se numeşte sistem trifazat şi poate fi exprimat cu relaţia

$$v_k = \sqrt{2}\;\; V_k \sin(\omega t + \gamma_k), \quad k = \overline{1,3}. \tag{4.3}$$

Dacă valorile efective ale mărimilor sistemului sunt egale

$$V_1 = V_2 = V_3 = V \tag{4.4}$$

şi defazajele între două mărimi consecutive sunt

$$\gamma_1 - \gamma_2 = \gamma_2 - \gamma_3 = \frac{2\pi}{3}\alpha, \tag{4.5}$$

sistemul se numeşte *trifazat simetric*.

Dacă $\alpha = 1$ sistemul se numeşte *de succesiune directă*, iar vectorii $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$ (reprezentând imaginile complexe ale celor trei mărimi sinusoidale) sunt ordonați în sens orar. Dacă $\alpha = -1$ sistemul se numeşte *de succesiune inversă*, iar cei trei vectori sunt ordonați în sens trigonometric. Valoarea $\alpha = 0$ corespunde sistemului *de succesiune homopolară*, pentru care cei trei vectori sunt în fază.

a) Fie **sistemul trifazat simetric direct** format din mărimile

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{2}V\sin(\omega t + \gamma) \\ v_2 &= \sqrt{2}V\sin(\omega t + \gamma - \frac{2\pi}{3}) \\ v_3 &= \sqrt{2}V\sin(\omega t + \gamma - \frac{4\pi}{3}) = \sqrt{2}V\sin(\omega t + \gamma + \frac{2\pi}{3}), \end{aligned} \tag{4.6}$$

mărimea v_2 fiind defazată în urma mărimii v_1, iar mărimea v_3 în urma mărimii v_2, ca în figura 4.1.

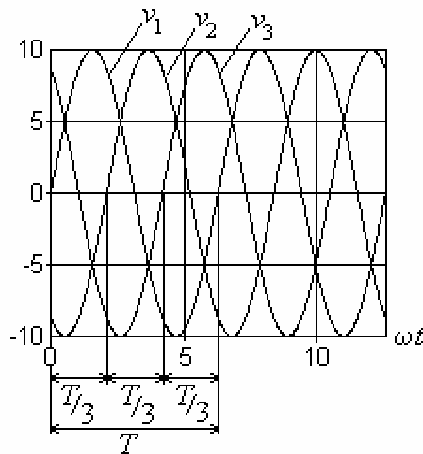


Fig. 4.1. Variațiile în timp a trei mărimi trifazate simetrice de succesiune directă.

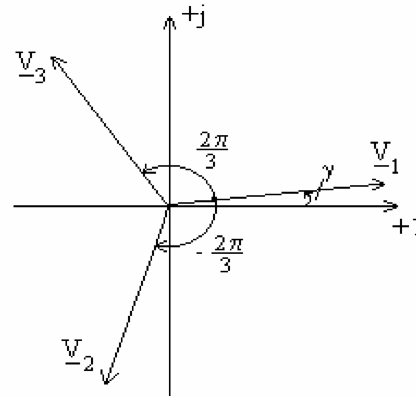


Fig. 4.2. Reprezentarea fazorială a unui sistem trifazat simetric direct.

Reprezentarea în complex a mărimilor sistemului (4.6) conduce la relațiile

$$\begin{aligned} \underline{V}_1 &= Ve^{j\gamma} = \underline{V} \\ \underline{V}_2 &= Ve^{j(\gamma - \frac{2\pi}{3})} = \underline{V}e^{-j\frac{2\pi}{3}} = a^2\underline{V} \\ \underline{V}_3 &= Ve^{j(\gamma + \frac{2\pi}{3})} = \underline{V}e^{j\frac{2\pi}{3}} = a\underline{V}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

a căror reprezentare în planul complex este dată în figura 4.2.

În relațiile (4.7) s-a introdus operatorul complex de rotație

$$a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, \tag{4.8}$$

care roteşte vectorul pe care-l înmulțeşte cu $\frac{2\pi}{3}$ în sens orar.

Înmulțirea cu a^2 roteşte vectorul în sens trigonometric cu $\frac{2\pi}{3}$.

Operatorul a are următoarele proprietăți:

$$|a| = 1, \quad a^2 = (a)^*, \quad (a^2)^* = a, \tag{4.9}$$

$$a = a^4 = a^{3n+1}, \quad a^2 = a^5 = a^{3n+2}, \quad a^3 = a^6 = a^{3n} = 1; \quad 1 + a + a^2 = 0.$$

b) Un **sistem trifazat simetric invers** este compus din mărimile:

$$v_1 = \sqrt{2}V\sin(\omega t + \gamma)$$
$$v_2 = \sqrt{2}V\sin(\omega t + \gamma + \frac{2\pi}{3})$$
$$v_3 = \sqrt{2}V\sin(\omega t + \gamma + \frac{4\pi}{3}) = \sqrt{2}V\sin(\omega t + \gamma - \frac{2\pi}{3}), \tag{4.10}$$

mărimea v_2 fiind defazată înaintea mărimii v_1, iar mărimea v_3 înaintea mărimii v_2, ca în figura 4.3.

Reprezentarea în complex a celor trei mărimi sinusoidale conduce la sistemul

$$\underline{V}_1 = Ve^{j\gamma} = \underline{V}$$
$$\underline{V}_2 = Ve^{j(\gamma + \frac{2\pi}{3})} = \underline{V}e^{j\frac{2\pi}{3}} = a\underline{V}$$
$$\underline{V}_3 = Ve^{j(\gamma - \frac{2\pi}{3})} = \underline{V}e^{-j\frac{2\pi}{3}} = a^2\underline{V}, \tag{4.11}$$

iar diagrama vectorială este dată în figura 4.4.

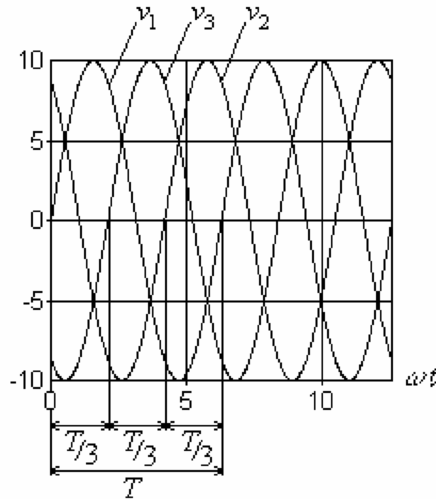


Fig. 4.3. Variațiile în timp a trei mărimi trifazate simetrice de succesiune inversă.

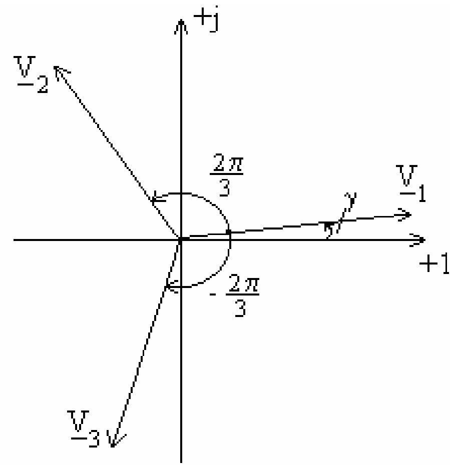


Fig. 4.4. Reprezentarea fazorială a unui sistem trifazat simetric invers.

Teorema 4.2.1. Suma mărimilor unui sistem trifazat simetric de succesiune directă sau inversă este nulă atât în valori complexe cât şi în valori instantanee.

Pentru demonstrarea teoremei în valori complexe se utilizează ultima relație (4.19)

$$\underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3 = \underline{V}(1 + a^2 + a) = 0, \tag{4.12}$$

iar forma în valori instantanee a teoremei,

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0 \tag{4.13}$$

se demonstrează pe baza proprietăților funcțiilor trigonometrice.

Teorema 4.2.2. Fie sistemul trifazat simetric de succesiune directă sau inversă $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$. Sistemul format din mărimile diferență a câte două mărimi consecutive ale acestuia este tot un sistem trifazat simetric de aceeaşi succesiune ca şi mărimile $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$.

Demonstrație. Fie sistemul $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$ de succesiune directă. Sistemul mărimilor diferență este compus din mărimile

$$\begin{aligned}
\underline{V}_{12} &= \underline{V}_1 - \underline{V}_2 = \underline{V} - a^2\underline{V} = \underline{V}(1-a^2) = \sqrt{3}\,\underline{V}e^{j\frac{\pi}{6}} \\
\underline{V}_{23} &= \underline{V}_2 - \underline{V}_3 = a^2\underline{V} - a\underline{V} = \underline{V}(a^2-a) = \sqrt{3}\,\underline{V}e^{-j\frac{\pi}{2}} \\
\underline{V}_{31} &= \underline{V}_3 - \underline{V}_1 = a\underline{V} - \underline{V} = \underline{V}(a-1) = \sqrt{3}\,\underline{V}e^{j\frac{5\pi}{6}}.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

După cum se observă, valoarea efectivă a mărimilor diferență este aceeaşi şi de $\sqrt{3}$ ori mai mare decât valoarea efectivă V, mărimile complexe $\underline{V}_{12}, \underline{V}_{23}, \underline{V}_{31}$ sunt defazate cu $\frac{\pi}{6}$ înainte față de mărimile $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$, iar defazajele între două mărimi consecutive ale noului sistem sunt $\frac{2\pi}{3}$. Să reținem deci pentru mărimea $\underline{V}_{12}$ relațiile

$$V_{12} = \sqrt{3}\,V \tag{4.15}$$

$$\arg \underline{V}_{12} = \arg \underline{V} + \frac{\pi}{6}. \tag{4.16}$$

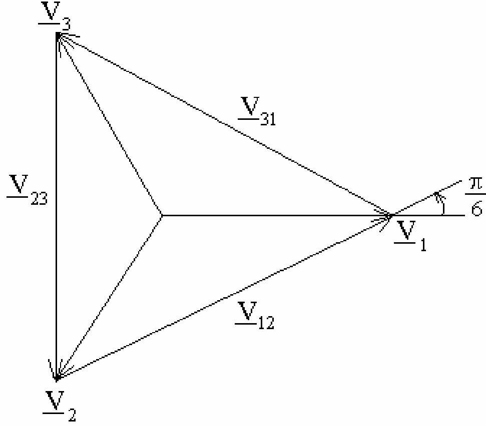


Fig. 4.5. Reprezentarea vectorială (fazorială) a mărimilor diferență.

Reprezentarea vectorială a celor două sisteme de importanță practică deosebită, este dată în figura 4.5.

O demonstrație similară se poate face considerând sistemul $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$ de succesiune inversă.

În acest caz se obțin relațiile

$$\begin{aligned}
\underline{V}_{12} &= \underline{V}_1 - \underline{V}_2 = \underline{V} - a\underline{V} = \underline{V}(1-a) = \sqrt{3}\,\underline{V}e^{-j\frac{\pi}{6}} \\
\underline{V}_{23} &= \underline{V}_2 - \underline{V}_3 = a\underline{V} - a^2\underline{V} = \underline{V}(a-a^2) = \sqrt{3}\,\underline{V}e^{j\frac{\pi}{2}} \\
\underline{V}_{31} &= \underline{V}_3 - \underline{V}_1 = a^2\underline{V} - \underline{V} = \underline{V}(a^2-1) = \sqrt{3}\,\underline{V}e^{-j\frac{5\pi}{6}}.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Observație

Se numeşte regim (trifazat) simetric, regimul în care mărimile electrice (curenții şi tensiunile) formează sisteme trifazate simetrice de succesiune directă sau inversă.

c) Un **sistem homopolar** este format din trei mărimi sinusoidale cu valori efective egale şi în fază

$$v_1 = v_2 = v_3 = \sqrt{2}\, V \sin(\omega t + \gamma), \qquad (4.18)$$

adică în reprezentare complexă

$$\underline{V}_1 = \underline{V}_2 = \underline{V}_3 = \underline{V} = V e^{j\gamma}. \qquad (4.19)$$

Evident, diferenţa a două mărimi consecutive este nulă, iar suma tuturor este

$$\underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3 = 3\underline{V} = 3 V e^{j\gamma}. \qquad (4.20)$$

4.3. CONEXIUNILE CIRCUITELOR TRIFAZATE

Sistemele trifazate pot funcţiona în una din următoarele conexiuni:

- în conexiune stea, obţinută prin legarea sfârşitului celor trei faze la un acelaşi punct numit *neutru* sau *nul*;
- în conexiune triunghi, realizată prin legarea sfârşitului fiecărei faze la începutul fazei următoare.

4.3.1. Conexiunea stea în regim simetric

În figura 4.6. este reprezentat un sistem trifazat compus din generator, linie de transmisie şi receptor, elementele terminale fiind conectate în stea. Considerăm (pentru moment) că impedanţele pe faze ale celor trei componente ale sistemului sunt egale, adică $\underline{Z}_{g1} = \underline{Z}_{g2} = \underline{Z}_{g3} = Z_g e^{j\varphi_g}$ etc.

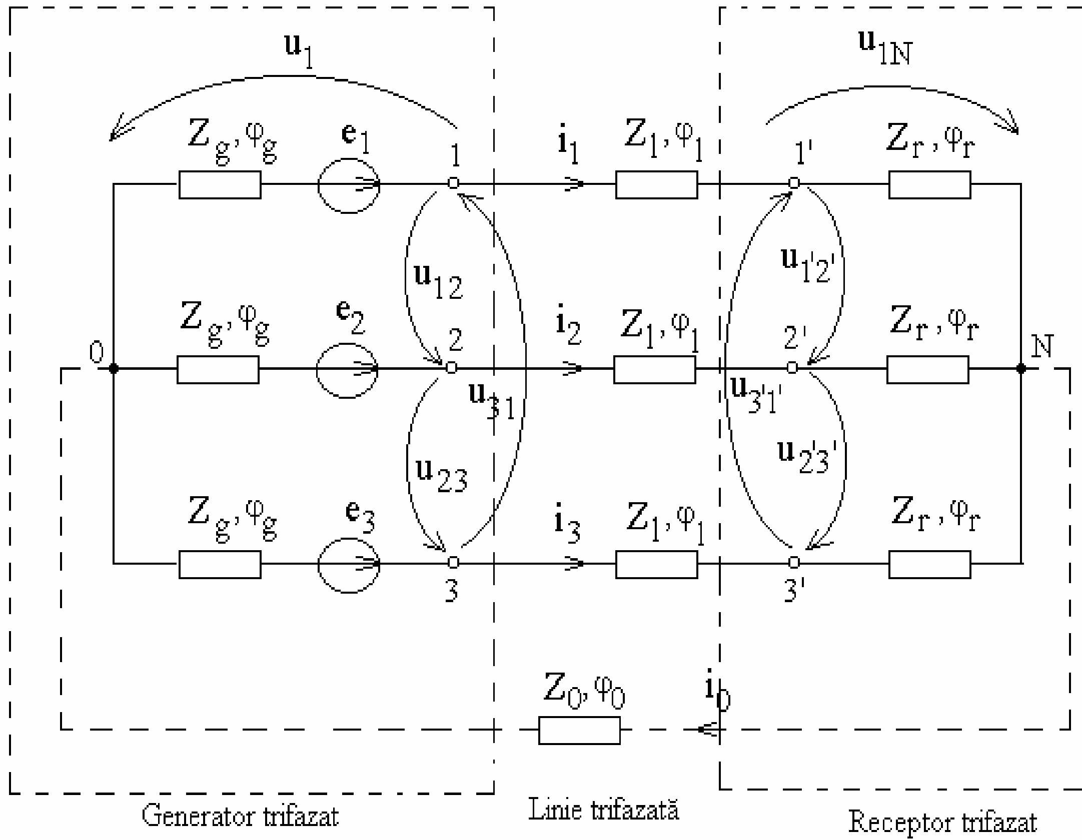


Fig. 4.6. Structura unui sistem trifazat cu generatorul şi receptorul conectate în stea.

Punctul comun la care se conectează bornele fazelor generatorului, notat cu 0, se numeşte *neutrul* (*nulul*) *generatorului*, în timp ce punctul comun la care se conectează bornele impedanţelor de fază ale receptorului, notat cu *N*, se numeşte *neutrul* (*nulul*) *receptorului*. Conexiunea stea având trei conductoare de fază - poate fi completată cu un conductor conectat între cele două neutre şi numit *conductor neutru* sau *fir de nul*. Între tensiunile de fază ale generatorului (tensiunile între fiecare din bornele 1,2,3 şi neutrul 0), notate cu u_1, u_2, u_3 şi tensiunile de linie (între fazele corespunzătoare) la borne, notate cu u_{12}, u_{23}, u_{31}, pentru sensurile de referinţă din figura 4.6, se pot scrie cu ajutorul teoremei a doua a lui Kirchhoff relaţiile

$$u_{12} = u_1 - u_2, \quad u_{23} = u_2 - u_3, \quad u_{31} = u_3 - u_1, \tag{4.21}$$

respectiv

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_1 - \underline{U}_2, \quad \underline{U}_{23} = \underline{U}_2 - \underline{U}_3, \quad \underline{U}_{31} = \underline{U}_3 - \underline{U}_1. \tag{4.22}$$

Sistemul tensiunilor fiind simetric, conform relaţiei (2.17) rezultă

$$U_{lg} = \sqrt{3}\, U_{fg}, \tag{4.23}$$

unde s-a notat cu U_l valoarea efectivă a tensiunilor de linie, respectiv cu U_f valoarea efectivă a tensiunilor de fază.

Similar între tensiunile de fază ale receptorului (tensiunile între fiecare din bornele 1',2',3' şi neutrul N), notate cu u_{1N}, u_{2N}, u_{3N} şi tensiunile de linie la bornele receptorului, notate cu $u_{1'2'}, u_{2'3'}, u_{3'1'}$ există relația

$$U_{lr} = \sqrt{3} U_{fr}. \quad (4.24)$$

Aplicând prima teoremă a lui Kirchhoff în punctul N, pentru circuitul cu fir neutru rezultă:

$$i_1 + i_2 + i_3 = i_0. \quad (4.25)$$

Cum regimul este simetric, conform relației (2.15), avem

$$i_0 = 0, \quad (4.26)$$

relație valabilă indiferent dacă există fir de nul sau nu.

Rezultă că indiferent de valoarea impedanței firului neutru $(Z_0 \geq 0)$ căderea de tensiune u_{N0} este nulă.

Pentru sistemul trifazat din figura 4.6 curenții în fazele generatorului, liniei şi receptorului sunt egali, adică

$$I_{fg} = I_l = I_{fr}. \quad (4.27)$$

4.3.2. Conexiunea triunghi în regim simetric

Dacă într-un sistem trifazat alcătuit din generator, linie de transmisie şi receptor, elementele terminale sunt conectate în triunghi, se obține schema din figura 4.7.

Notând cu i_{12}, i_{23}, i_{31} şi $i_{1'2'}, i_{2'3'}, i_{3'1'}$, curenții din fazele generatorului, respectiv ale receptorului, şi cu i_1, i_2, i_3 curenții de linie, aplicând prima teoremă a lui Kirchhoff se obțin relațiile

$$i_1 = i_{12} - i_{31} = i_{1'2'} - i_{3'1'}, \quad i_2 = i_{23} - i_{12} = i_{2'3'} - i_{1'2'}, \quad i_3 = i_{31} - i_{23} = i_{3'1'} - i_{2'3'}, \quad (4.28)$$

respectiv

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} = \underline{I}_{1'2'} - \underline{I}_{3'1'}, \ \underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} = \underline{I}_{2'3'} - \underline{I}_{1'2'}, \ \underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} = \underline{I}_{3'1'} - \underline{I}_{2'3'}. \quad (4.29)$$

Regimul fiind simetric, conform cu relația (4.15), între valoarea efectivă a curenților de linie şi cea a curenților de fază ai generatorului, respectiv receptorului, există relația

$$I_l = \sqrt{3} I_{fg} = \sqrt{3} I_{fr}. \quad (4.30)$$

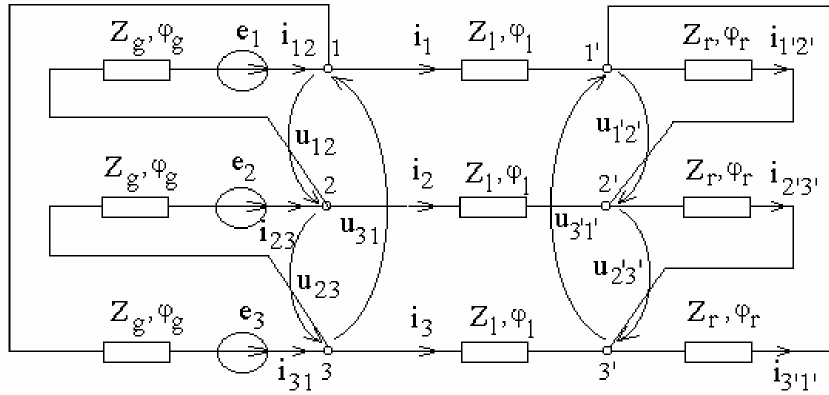


Fig. 4.7. Structura unui sistem trifazat cu generatorul şi receptorul conectate în triunghi.

În cazul conexiunii triunghi, tensiunile de fază ale generatorului, respectiv receptorului, sunt egale cu tensiunile de linie la bornele acestora, adică între valorile efective ale acestor tensiuni există relaţiile

$$U_{fg} = U_{lg}, \text{ respectiv } U_{fr} = U_{lr}. \tag{4.31}$$

Observaţii

1. În regim simetric, în oricare conexiune suma curenţilor de linie şi suma tensiunilor de linie este nulă atât în valori instantanee cât şi complexe.

2. În afara conexiunilor prezentate în figurile 4.6 şi 4.7 există, desigur, încă două variante mixte: generator în stea şi receptor în triunghi şi invers. Relaţiile pentru aceste conexiuni pot fi deduse pe baza celor de mai sus.

4.4. CIRCUITE TRIFAZATE CU CUPLAJE MAGNETICE

4.4.1. Receptor trifazat în conexiune stea cu cuplaje magnetice

Considerăm un receptor în conexiune stea având impedanţe egale pe faze $\left(\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z}\right)$ fără conductor neutru, care prezintă cuplaje magnetice statice între faze (fig. 4.8,a).

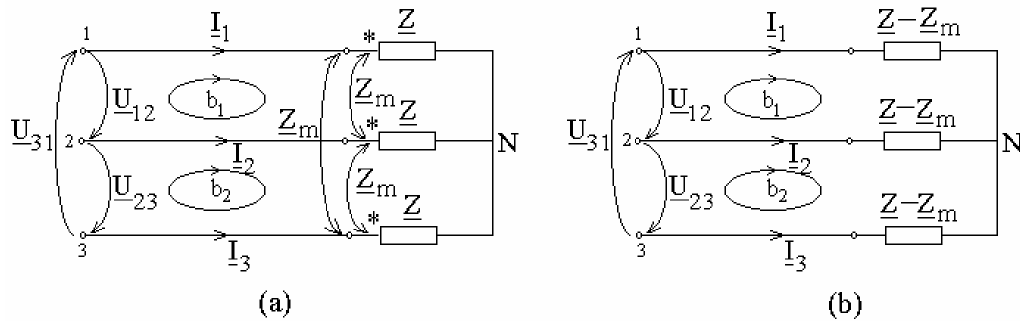


Fig. 4.8. Receptor trifazat în conexiune stea cu cuplaje magnetice.

Teorema a doua a lui Kirchhoff aplicată pe buclele b_1 şi b_2 conduce la ecuaţiile

$$\underline{U}_{12} = \underline{Z}\underline{I}_1 - \underline{Z}\underline{I}_2 + \underline{Z}_M\underline{I}_2 - \underline{Z}_M\underline{I}_1 - \underline{Z}_M\underline{I}_3 + \underline{Z}_M\underline{I}_3$$

$$\underline{U}_{23} = \underline{Z}\underline{I}_2 - \underline{Z}\underline{I}_3 + \underline{Z}_M\underline{I}_3 - \underline{Z}_M\underline{I}_2 + \underline{Z}_M\underline{I}_1 - \underline{Z}_M\underline{I}_1, \quad (4.32$$

)

din care se obțin relațiile

$$\underline{U}_{12} = (\underline{Z} - \underline{Z}_M)\underline{I}_1 - (\underline{Z} - \underline{Z}_M)\underline{I}_2\,;\;\; \underline{U}_{23} = (\underline{Z} - \underline{Z}_M)\underline{I}_2 - (\underline{Z} - \underline{Z}_M)\underline{I}_3, \qquad (4.33)$$

ce corespund schemei echivalente fără cuplaje magnetice din figura 4.8,b.

4.4.2. Receptor trifazat în conexiune triunghi cu cuplaje magnetice

Fie un receptor echilibrat în conexiune triunghi având cuplaje magnetice între faze (fig. 4.9,a)

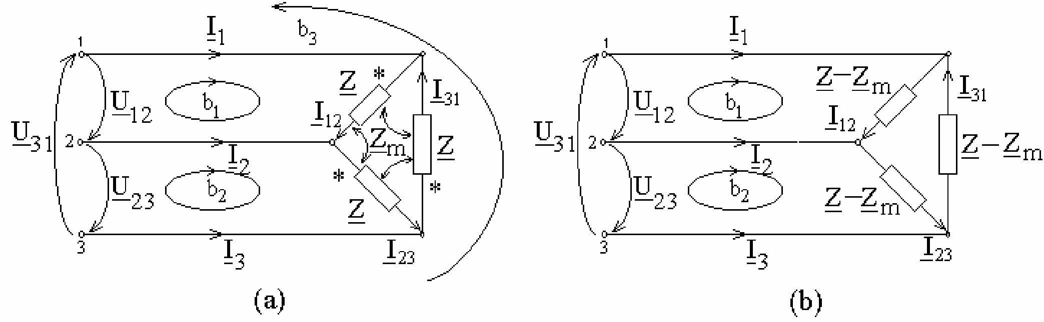


Fig. 4.9. Receptor trifazat în conexiune triunghi cu cuplaje magnetice.

Aplicând teorema a doua a lui Kirchhoff pe cele trei bucle obținem

$$\begin{aligned}
\underline{U}_{12} &= \underline{Z}\underline{I}_{12} + \underline{Z}_M\underline{I}_{31} + \underline{Z}_M\underline{I}_{23} = \underline{Z}\underline{I}_{12} + \underline{Z}_M(\underline{I}_{23} + \underline{I}_{31})\\
\underline{U}_{23} &= \underline{Z}\underline{I}_{23} + \underline{Z}_M\underline{I}_{12} + \underline{Z}_M\underline{I}_{31} = \underline{Z}\underline{I}_{23} + \underline{Z}_M(\underline{I}_{12} + \underline{I}_{31})\\
\underline{U}_{31} &= \underline{Z}\underline{I}_{31} + \underline{Z}_M\underline{I}_{12} + \underline{Z}_M\underline{I}_{23} = \underline{Z}\underline{I}_{31} + \underline{Z}_M(\underline{I}_{12} + \underline{I}_{23}).
\end{aligned} \qquad (4.34)$$

Adunând cele trei ecuații şi ținând seama că suma tensiunilor de linie este nulă, rezultă

$$(\underline{Z} + 2\underline{Z}_M)(\underline{I}_{12} + \underline{I}_{23} + \underline{I}_{31}) = 0. \qquad (4.35)$$

Cum primul termen este diferit de zero datorită rezistențelor pozitive ale laturilor, rezultă relația

$$\underline{I}_{12} + \underline{I}_{23} + \underline{I}_{31} = 0. \qquad (4.36)$$

Ținând seama de ecuația (4.36), sistemul (4.34) devine

$$\underline{U}_{12} = (\underline{Z} - \underline{Z}_M)\underline{I}_{12}, \quad \underline{U}_{23} = (\underline{Z} - \underline{Z}_M)\underline{I}_{23}, \quad \underline{U}_{31} = (\underline{Z} - \underline{Z}_M)\underline{I}_{31}, \qquad (4.37)$$

corespunzând schemei echivalente fără cuplaje magnetice din figura 4.9,b.

4.4.3. Linie trifazată cu cuplaje magnetice între conductoarele fazelor

Pentru linia trifazată reprezentată în figura 4.10,a, se calculează căderea de tensiune pe impedanța fazei 1:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_l\underline{I}_1 + \underline{Z}_M\underline{I}_2 + \underline{Z}_M\underline{I}_3 = \underline{Z}_l\underline{I}_1 + \underline{Z}_M(\underline{I}_2 + \underline{I}_3). \qquad (4.38)$$

Dacă sistemul curenților de linie este simetric,

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0. \qquad (4.39)$$

ecuația (4.38) devine

$$\underline{U}_1 = (\underline{Z}_l - \underline{Z}_M)\underline{I}_1 \tag{4.40}$$

şi corespunde schemei echivalente din figura 4.10,b, fazele liniei fiind identice.

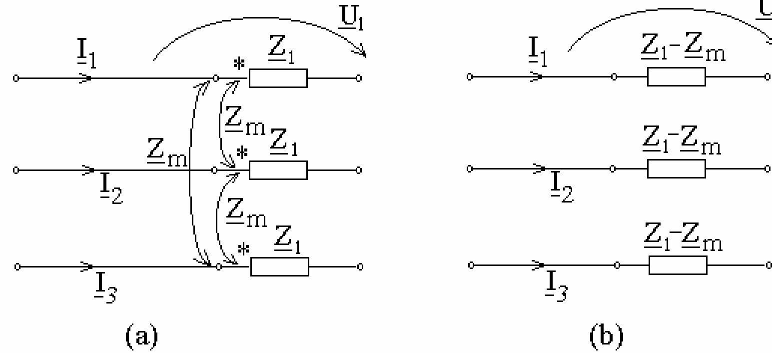


Fig. 4.10. Linie trifazată cu cuplaje magnetice.

Exemplul 4.1: Să se determine schema echivalentă în conexiune stea a receptorului trifazat din figura 4.11,a.

Aplicând succesiv regula de eliminare a cuplajelor mutuale prezentată în paragraful 3.9.5, se obțin schemele echivalente din figura 4.11,b şi c.

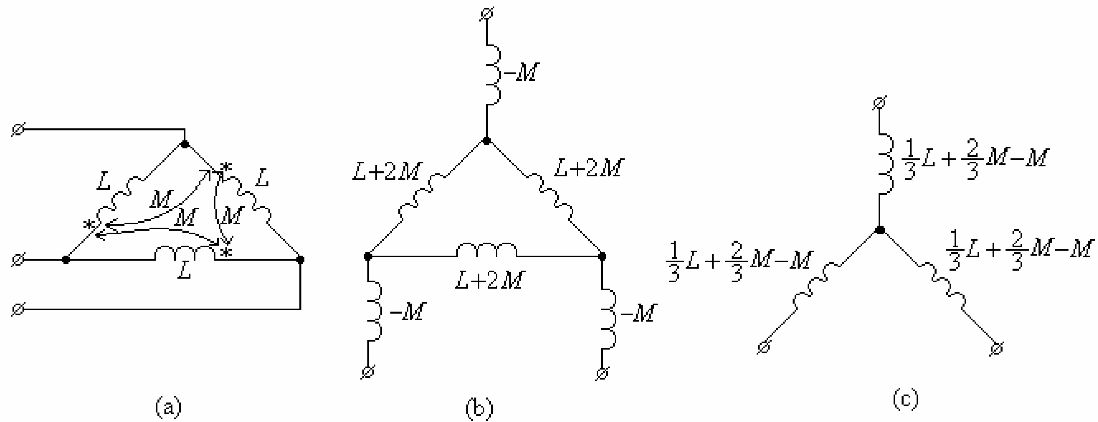


Fig. 4.11. Eliminarea cuplajelor magnetice.

Exemplul 4.2.: Circuitul din figura 4.12,a este alimentat cu un sistem de tensiuni sinusoidale de succesiune directă. Fiind date $R, \omega L, 1/\omega C$, se cer:

a) reactanța de cuplaj ωM pentru ca cei trei curenți de fază să formeze un sistem simetric de succesiune directă;
b) expresiile curenților.

Se elimină cuplajul magnetic, obținându-se schema echivalentă din figura 4.12,b.

a) Considerând sistemul trifazat simetric al curenților, se scriu ecuațiile corespunzătoare teoremei a doua a lui Kirchhoff pe cele două bucle:

$$\underline{U}_{12} = \underline{I}\left[R + j\left(\omega M - \frac{1}{\omega C}\right)\right] - a^2\underline{I}\left[R + j\omega(L - M)\right]$$

$$\underline{U}_{23} = a^2\underline{I}\left[R + j\omega(L - M)\right] - a\underline{I}\left[R + j\omega(L - M)\right].$$

Împărțind ecuațiile se obține:

$$\frac{1}{a^2}=\frac{R+j\left(\omega M-\frac{1}{\omega C}\right)-a^2\left[R+j\omega(L-M)\right]}{a\left[R+j\omega(L-M)\right](a-1)},$$

din care rezultă relația:

$$\omega M=\frac{1}{2}\left(\omega L+\frac{1}{\omega C}\right),$$

reprezentând condiția cerută de problemă.

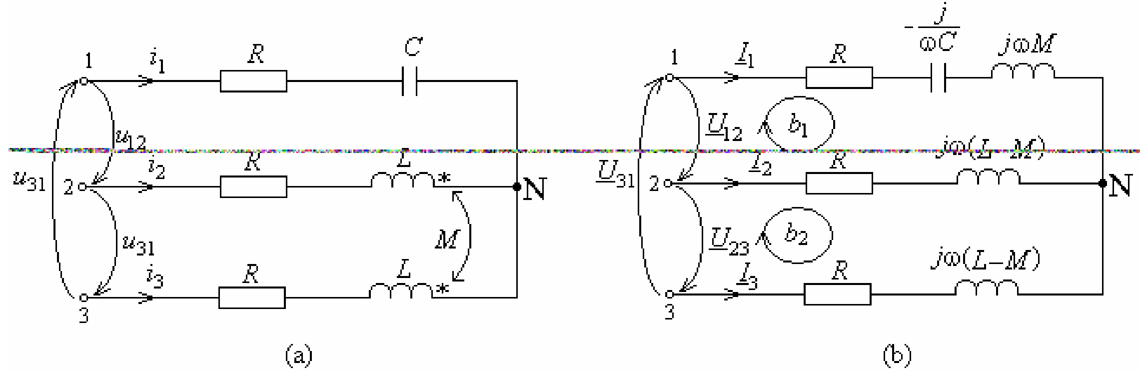


Fig. 4.12. Schema circuitului trifazat.

a) Cu valoarea reactanței mutuale astfel obținută, impedanțele din schema echivalentă fără cuplajul magnetic sunt:

$$\underline{Z}_1=\underline{Z}_2=\underline{Z}_3=R+j\frac{1}{2}\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right).$$

Curentul din prima fază este:

$$\underline{I}_1=\frac{\underline{U}_{1N}}{\underline{Z}_1}=\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1}=\frac{U_f}{R+j\frac{1}{2}\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)},$$

iar din celelalte două $\underline{I}_2=a^2\underline{I}_1$, $\underline{I}_3=a\underline{I}_1$.

4.5. ANALIZA CIRCUITELOR TRIFAZATE

4.5.1. Introducere

Circuitele (receptoarele) trifazate (indiferent de conexiune) pot avea impedanțele de fază egale în modul şi argument, adică

$$\underline{Z}_{f_1}=\underline{Z}_{f_2}=\underline{Z}_{f_3}=\underline{Z}=Ze^{j\varphi}, \qquad (4.41)$$

caz în care se numesc circuite (receptoare) *echilibrate*.

Dacă cel puțin una din ecuațiile care derivă din relația (4.41) nu este satisfăcută, circuitul (receptorul) se numeşte *dezechilibrat*.

Calculul acestor circuite (receptoare) presupune în general determinarea curenților de fază şi de linie atunci când se cunosc tensiunile lor de alimentare şi impedanțele fazelor.

Rețelele trifazate sunt concepute ca sisteme echilibrate funcționând în regim simetric de tensiuni şi curenți. Pentru aceasta generatoarele se construiesc astfel ca tensiunile lor

electromotoare să fie simetrice, liniile electrice aeriene sau în cablu au impedanțele egale pe faze, iar consumatorii se distribuie echilibrat pe cele trei faze.

În exploatarea sistemelor electroenergetice apar însă dezechilibrări şi nesimetrii datorate fie conectărilor şi deconectărilor în regim normal de funcționare a consumatorilor monofazați, conducând la încărcarea inegală a fazelor, fie regimurilor de avarie (scurtcircuite, întreruperi de faze etc.) ce se produc accidental în rețelele sistemului.

Calculul circuitelor trifazate (echilibrate sau dezechilibrate) funcționând în regim simetric sau nesimetric se poate efectua prin oricare din metodele de analiză prezentate în Capitolul 3. O astfel de abordare se numeşte *metoda directă de calcul* şi se bazează pe teoremele lui Kirchhoff şi pe legea lui Ohm, lucrând simultan cu cele trei faze.

În regim nesimetric, însă, în timp ce rezistoarele, bobinele şi condensatoarele, denumite elemente statice, nu sunt influențate de modul în care se succed tensiunile sau curenții, maşinile electrice, denumite elemente dinamice, se caracterizează prin faptul că impedanțele înfăşurărilor lor sunt diferite pentru succesiuni diferite ale tensiunilor şi curenților.

Totodată, analiza circuitelor (rețelelor) trifazate dezechilibrate funcționând în regim nesimetric, prin metoda directă, are dezavantajul că nu pune în evidență abaterea de la regimul simetric.

Pentru a elimina aceste inconveniente şi pentru a utiliza în sistemele trifazate dezechilibrate simetria, care conduce la efectuarea studiului acestora numai pe o singură fază, luată ca fază de referință, extinzându-se apoi rezultatele la celelalte faze, s-a dezvoltat teoria componentelor simetrice. Metoda componentelor simetrice se foloseşte pentru calculul circuitelor trifazate dezechilibrate, în regim normal sau de avarie.

4.5.2. Analiza unor receptoare trifazate simple alimentate cu tensiuni simetrice

4.5.2.1. Receptor dezechilibrat în conexiune stea

Pentru a cuprinde toate variantele de funcționare ale conexiunii stea vom folosi schema din figura 4.13.

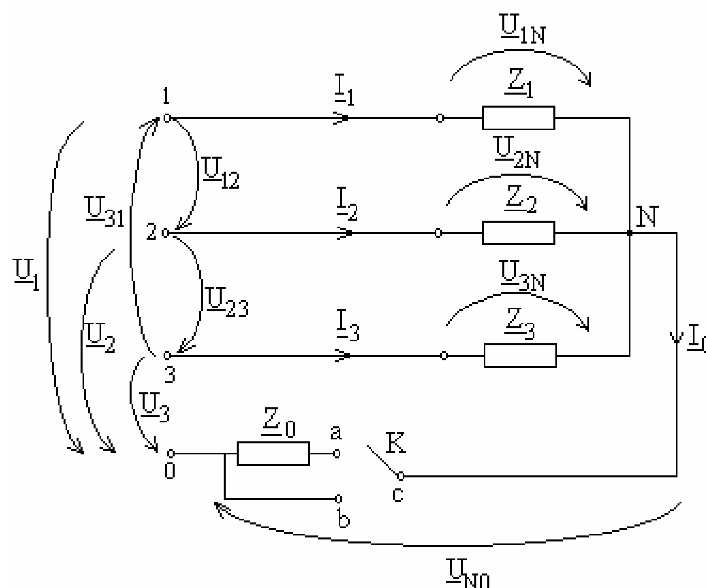


Fig. 4.13. Receptor trifazat dezechilibrat în conexiune stea.

Regimul fiind simetric, sistemul tensiunilor de alimentare poate fi pus sub forma

$$\underline{U}_1 = U_f e^{j\alpha}, \quad \underline{U}_2 = a^2 \underline{U}_1, \quad \underline{U}_3 = a\underline{U}_1. \qquad (4.42)$$

a) Când întrerupătorul K este închis pe poziția *a*, receptorul are conexiune *stea cu conductor neutru de impedanță* $\underline{Z}_0 \neq 0.$ Curenții de fază, aceeaşi cu cei de linie, se exprimă cu legea lui Ohm în complex, prelucrată cu ajutorul teoremei a doua a lui Kirchhoff, prin relațiile

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{1N}}{\underline{Z}_1} = \underline{Y}_1(\underline{U}_1 - \underline{U}_{N0}),\ \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{2N}}{\underline{Z}_2} = \underline{Y}_2(\underline{U}_2 - \underline{U}_{N0}),\ \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{3N}}{\underline{Z}_3} = \underline{Y}_3(\underline{U}_3 - \underline{U}_{N0}), \quad (4.43)$$

iar curentul din conductorul neutru, în mod similar

$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{U}_{N0}}{\underline{Z}_0} = \underline{Y}_0 \underline{U}_{N0}. \quad (4.44)$$

Aplicând prima teoremă a lui Kirchhoff în nodul N, rezultă:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \underline{I}_0, \quad (4.45)$$

şi ținând seama de relațiile (4.43) şi (4.44) se obține

$$\underline{Y}_1\underline{U}_1 + \underline{Y}_2\underline{U}_2 + \underline{Y}_3\underline{U}_3 - \underline{U}_{N0}(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_0) = 0. \quad (4.46)$$

Relația (4.46) permite calculul tensiunii $\underline{U}_{N0}$ numită *tensiunea de deplasare a neutrului*, sau simplu - *deplasarea neutrului*:

$$\underline{U}_{N0} = \underline{V}_N - \underline{V}_0 = \frac{\underline{Y}_1\underline{U}_1 + \underline{Y}_2\underline{U}_2 + \underline{Y}_3\underline{U}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_0}. \quad (4.47)$$

Odată calculată tensiunea $\underline{U}_{N0}$, curenții se determină cu relațiile (4.43) şi (4.44).

b) Dacă întrerupătorul K se închide pe poziția *b*, receptorul este conectat în *stea cu conductor neutru de impedanță* $\underline{Z}_0 = 0.$ În acest caz deplasarea neutrului este nulă, adică

$$\underline{U}_{N0} = \underline{V}_N - \underline{V}_0, \quad (4.48)$$

potențialele celor două neutre fiind egale $(\underline{V}_N = \underline{V}_0)$.

Curenții de fază (egali cu cei de linie) se calculează cu relațiile

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_1\underline{U}_1, \quad \underline{I}_2 = \underline{Y}_2\underline{U}_2, \quad \underline{I}_3 = \underline{Y}_3\underline{U}_3, \quad (4.49)$$

iar

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3. \quad (4.50)$$

Diagramele fazoriale ale tensiunilor şi curenților pentru conexiunile de la punctele a şi b sunt prezentate în figurile 4.14,a, respectiv 4.14,b

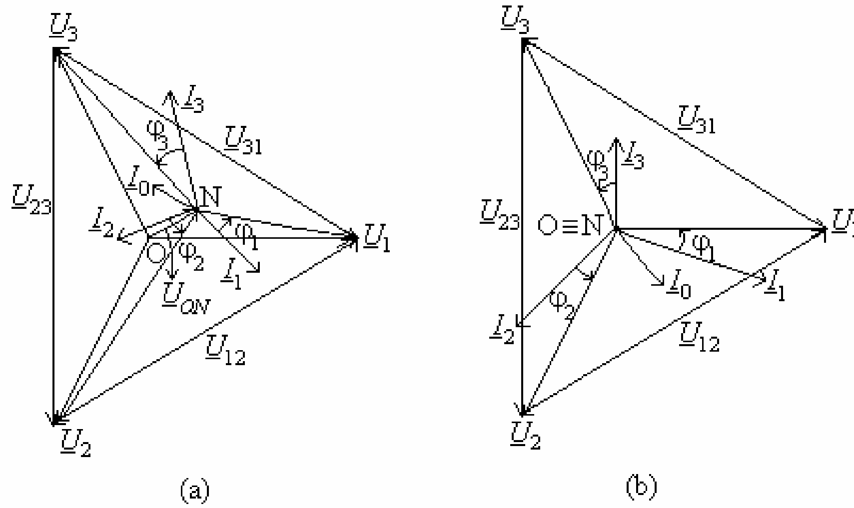


Fig. 4.14. Diagramele fazoriale ale tensiunilor şi curenţilor.

c) În cazul în care întrerupătorul K rămâne deschis, receptorul este conectat în *stea fără conductor neutru* (cu *neutrul izolat*), ceea ce echivalează cu relaţia $\underline{Z}_0 \to \infty$.

În această situaţie prima teoremă a lui Kirchhoff conduce la relaţia

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0, \tag{4.51}$$

din care, ţinând seama de ecuaţiile (4.43), obţinem

$$\underline{U}_{N0} = \underline{V}_N - \underline{V}_0 = \frac{\underline{Y}_1\underline{U}_1 + \underline{Y}_2\underline{U}_2 + \underline{Y}_3\underline{U}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}. \tag{4.52}$$

Acelaşi rezultat se obţine dacă în relaţia (4.47) se înlocuieşte $\underline{Y}_0 = 1/\underline{Z}_0 = 0$.

După calculul tensiunii $\underline{U}_{N0}$ cu relaţia (4.52), curenţii fazelor receptorului se determină cu relaţiile (4.43). Diagrama fazorială a tensiunilor este similară celei din figura 4.12.

Dacă nu se cunosc (sau nu se pot determina prin măsurare pentru că neutrul reţelei nu este accesibil) tensiunile de fază, dar se cunosc sau se pot măsura tensiunile de linie (între faze), curenţii se exprimă cu relaţiile

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_1\underline{U}_{1N} = \underline{Y}_1(\underline{U}_{12} + \underline{U}_{2N}),\ \underline{I}_2 = \underline{Y}_2\underline{U}_{2N},\ \underline{I}_3 = \underline{Y}_3\underline{U}_{3N} = \underline{Y}_3(-\underline{U}_{23} + \underline{U}_{2N}). \tag{4.53}$$

Substituind aceste relaţii în (4.51) se determină tensiunea pe faza a doua a receptorului

$$\underline{U}_{2N} = \frac{\underline{Y}_3\underline{U}_{23} - \underline{Y}_1\underline{U}_{12}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}. \tag{4.54}$$

Cum tensiunile de linie satisfac relaţia

$$\underline{U}_{12} + \underline{U}_{23} + \underline{U}_{31} = 0, \tag{4.55}$$

se obţin expresiile curenţilor sub forma

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_1\frac{\underline{Y}_2\underline{U}_{12} - \underline{Y}_3\underline{U}_{31}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3},\ \ \underline{I}_2 = \underline{Y}_2\frac{\underline{Y}_3\underline{U}_{23} - \underline{Y}_1\underline{U}_{12}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3},\ \ \underline{I}_3 = \underline{Y}_{33}\frac{\underline{Y}_1\underline{U}_{31} - \underline{Y}_2\underline{U}_{23}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}. \tag{4.56}$$

Diagrama fazorială a tensiunilor şi curenţilor este în acest caz cea din figura 4.15.

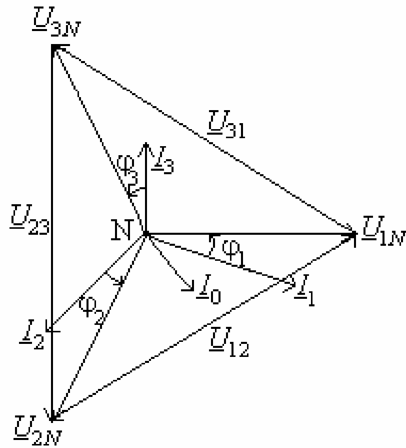


Fig. 4.15. Diagramele fazoriale ale tensiunilor şi curenţilor corespunzătoare relaţiilor (4.56).

*Exemplul 4.3: Re*ceptorul trifazat din figura 4.16,a este alimentat cu un sistem simetric de tensiuni cu tensiunea fazei 1 $\underline{U}_1 = 120$. Să se calculeze intensităţile curenţilor fazelor şi a curentului din firul de nul când se cunosc următoarele valori ale parametrilor:

$R_2 = R_3 = 10\,\Omega,\ X_{L0} = X_{C1} = 10/\sqrt{3}\,\Omega,\ X_{L2} = X_{C2} = 10\sqrt{3}\,\Omega.$

Se calculează impedanţele receptorului în conexiune stea cu conductor neutru:

$$\underline{Z}_1 = -jX_{C1} = -j\frac{10}{\sqrt{3}},\quad \underline{Z}_2 = R_2 + jX_{L2} - jX_{C2} = 10,$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 = 10,\quad \underline{Z}_0 = jX_{L0} = j\frac{10}{\sqrt{3}}.$$

Receptorul fiind dezechilibrat se calculează deplasarea neutrului:

$$\underline{U}_{N0} = \frac{\underline{U}_1\underline{Y}_1 + \underline{U}_2\underline{Y}_2 + \underline{U}_3\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_0} = \frac{120\left(\frac{\sqrt{3}}{10}j + e^{-j\frac{2\pi}{3}}\frac{1}{10} + e^{j\frac{2\pi}{3}}\frac{1}{10}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{10}j + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{\sqrt{3}}{10}j} = 120e^{j\frac{2\pi}{3}},$$

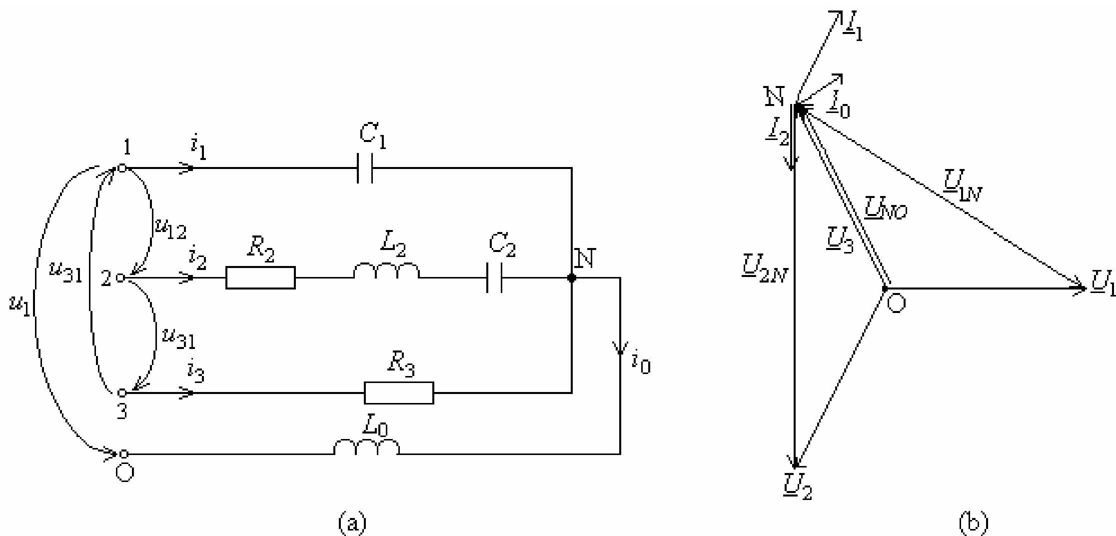


Fig. 4.16. a) Schema circuitului; b) Diagrama fazorială a tensiunilor şi curenţilor.

apoi tensiunile fazelor

$$\underline{U}_{1N} = \underline{U}_1 - \underline{U}_{N0} = 120 - 120e^{j\frac{2\pi}{3}} = 120\sqrt{3}e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

$$\underline{U}_{2N} = \underline{U}_2 - \underline{U}_{N0} = 120e^{-j\frac{2\pi}{3}} - 120e^{j\frac{2\pi}{3}} = 120\sqrt{3}e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$\underline{U}_{3N} = \underline{U}_3 - \underline{U}_{N0} = 120e^{j\frac{2\pi}{3}} - 120e^{j\frac{2\pi}{3}} = 0.$$

Curenții fazelor se calculează cu legea lui Ohm:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{1N}}{\underline{Z}_1} = \frac{120\sqrt{3}e^{-j\frac{\pi}{6}}}{-j\frac{10}{\sqrt{3}}} = 36e^{j\frac{\pi}{3}}, \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{2N}}{\underline{Z}_2} = \frac{120\sqrt{3}e^{-j\frac{\pi}{2}}}{10} = 12\sqrt{3}e^{-j\frac{\pi}{2}}, \quad \underline{I}_3 = 0,$$

iar curentul din firul de nul cu prima teoremă a lui Kirchhoff:

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 36e^{j\frac{\pi}{3}} + 12\sqrt{3}e^{-j\frac{\pi}{2}} = 12\sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{6}}.$$

În figura 4.16,b s-a reprezentat diagrama fazorială a curenților şi tensiunilor.

4.5.2.2. Receptor echilibrat în conexiune stea

Pentru acest tip de receptor este satisfăcută relația (2.43), ceea ce conduce la egalitatea admitanțelor

$$\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = \underline{Y}_3 = \underline{Y} = Ye^{-j\varphi}. \tag{4.57}$$

Tensiunile aplicate receptorului fiind definite de sistemul (4.42) şi ținând seama de relația (4.53), ecuația (4.46) devine

$$\underline{Y}(\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3) - \underline{U}_{N0}(3\underline{Y} + \underline{Y}_0) = 0. \tag{4.58}$$

Deoarece $\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = 0,$ rezultă

$$\underline{U}_{N0}(3\underline{Y} + \underline{Y}_0) = 0, \tag{4.59}$$

relație valabilă atât pentru conexiunea stea cu conductor neutru de impedanță $\underline{Z}_0 \neq 0,$ cât şi pentru conexiunea stea cu neutrul izolat $(\underline{Z}_0 \to \infty)$.

În ambele cazuri soluția ecuației (4.59) este

$$\underline{U}_{N0} = \underline{V}_N - \underline{V}_0 = 0, \tag{4.60}$$

deoarece în rețelele disipative părțile reale (rezistențe, respectiv conductanțe) ale impedanțelor şi admitanțelor sunt pozitive şi nenule.

Evident relația (4.60) este valabilă şi pentru conexiunea stea cu conductor neutru de impedanță $\underline{Z}_0 = 0$ $(\underline{V}_N = \underline{V}_0)$.

Rezultă deci că în cazul receptorului echilibrat în conexiune stea, indiferent de variantă, deplasarea neutrului este nulă. În această situație este evident că tensiunile de fază ale receptorului sunt egale cu tensiunile de fază ale rețelei, adică:

$$\underline{U}_{1N} = \underline{U}_1, \quad \underline{U}_{2N} = \underline{U}_2, \quad \underline{U}_{3N} = \underline{U}_3. \tag{4.61}$$

Aplicând legea lui Ohm în complex se obțin curenții de fază (egali cu cei de linie)

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}\underline{U}_1, \quad \underline{I}_2 = \underline{Y}\underline{U}_2 = a^2\underline{Y}\underline{U}_1 = a^2\underline{I}_1, \quad \underline{I}_3 = \underline{Y}\underline{U}_3 = a\underline{Y}\underline{U}_1 = a\underline{I}_1. \quad (4.62$$

)

Relațiile (4.62) arată că în cazul unui receptor echilibrat, în oricare din variantele conexiunii stea, alimentat cu un sistem simetric direct de tensiuni, curenții absorbiți formează un sistem simetric direct cu valorile efective

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{U_f}{Z}. \qquad (4.63)$$

Diagrama fazorială a tensiunilor şi curenților este prezentată în figura 4.17.

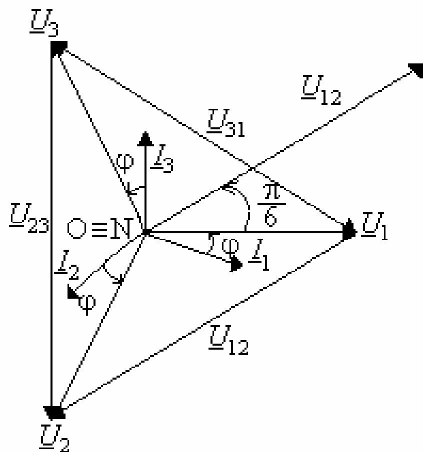


Fig. 4.17. Diagrama fazorială a tensiunilor şi curenților Pentru un receptor echilibrat conectat în stea.

Dacă în cazul conexiunii stea cu neutrul izolat se cunosc tensiunile de linie care conform teoremei 4.2.2 satisfac relațiile

$$\begin{aligned} \underline{U}_{12} &= \underline{U}_1 - \underline{U}_2 = \sqrt{3}\,\underline{U}_1 e^{j\frac{\pi}{6}} \\ \underline{U}_{23} &= \underline{U}_2 - \underline{U}_3 = a^2 \underline{U}_{12} \\ \underline{U}_{31} &= \underline{U}_3 - \underline{U}_1 = a \underline{U}_{12}, \end{aligned} \qquad (4.64)$$

din prima ecuație a sistemului (4.64), ținând seama de (4.61), se obține:

$$\underline{U}_{1N} = \underline{U}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \underline{U}_{12} e^{-j\frac{\pi}{6}}. \qquad (4.65)$$

Curenții se exprimă cu relațiile (4.64) prelucrate sub forma

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}\underline{U}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \underline{Y}\underline{U}_{12} e^{-j\frac{\pi}{6}}, \quad \underline{I}_2 = a^2 \underline{I}_1, \quad \underline{I}_3 = a \underline{I}_1. \qquad (4.66)$$

În acest caz valorile efective ale curenților sunt

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{U_l}{\sqrt{3}\,Z}. \qquad (4.67)$$

4.5.2.3. Receptor dezechilibrat în conexiune triunghi

Dacă receptorul are fazele conectate în triunghi, şi linia de alimentare este fără pierderi, tensiunile de linie ale rețelei de alimentare se aplică direct fazelor receptorului ca în figura 4.18,a. Aceste tensiuni formează sistemul trifazat simetric direct

$$\underline{U}_{12} = U_l e^{j\alpha}, \quad \underline{U}_{23} = a^2 \underline{U}_{12}, \quad \underline{U}_{31} = a \underline{U}_{12}. \qquad (4.68)$$

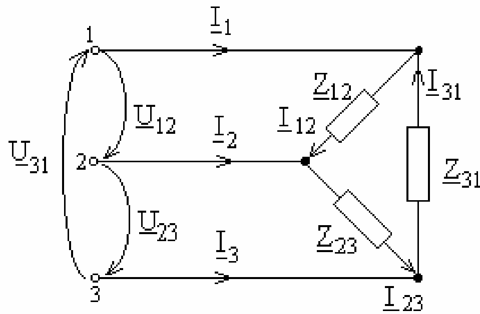


Fig. 4.18,a. Schema receptorului dezechilibrat conectat în triunghi.

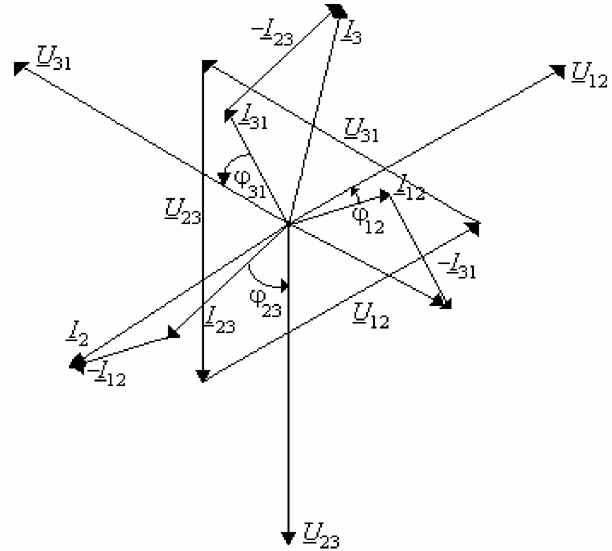


Fig. 4.18,b. Diagrama fazorială a tensiunilor şi curenţilor pentru un receptor dezechilibrat conectat în triunghi.

Exprimând curenţii fazelor cu legea lui Ohm, se obţin relaţiile

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}}, \quad \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}}, \quad \underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}} \tag{4.69}$$

şi aplicând prima teoremă a lui Kirchhoff în nodurile 1',2' şi 3', se obţin curenţii de linie

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31}, \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12}, \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23}. \tag{4.70}$$

Diagrama fazorială a tensiunilor şi curenţilor este prezentată în figura 4.18,b.

Exemplul 4.4: Se dă receptorul trifazat în conexiune triunghi din figura 4.19,a pentru care se cunosc valorile parametrilor $R_1 = 20\Omega$, $R_2 = R_3 = 10\Omega$, $X_L = X_C = 10\sqrt{3}\,\Omega$. Ştiind că sistemul tensiunilor de alimentare este simetric de secvenţă directă, să se calculeze curenţii de fază şi de linie şi să se reprezinte diagrama fazorială corespunzătoare.

Impedanţele fazelor receptorului au valorile:

$$\underline{Z}_{12} = R_1 = 20, \ \underline{Z}_{23} = R_2 - jX_C = 20e^{-j\frac{\pi}{3}}, \ \underline{Z}_{31} = R_3 + jX_L = 20e^{j\frac{\pi}{3}}.$$

Cu ajutorul legii lui Ohm se calculează curenţii de fază:

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}} = \frac{200}{20} = 10, \ \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}} = \frac{200e^{-j\frac{2\pi}{3}}}{20e^{-j\frac{\pi}{3}}} = 10e^{-j\frac{\pi}{3}}, \ \underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}} = \frac{200e^{j\frac{2\pi}{3}}}{20e^{j\frac{\pi}{3}}} = 10e^{j\frac{\pi}{3}},$$

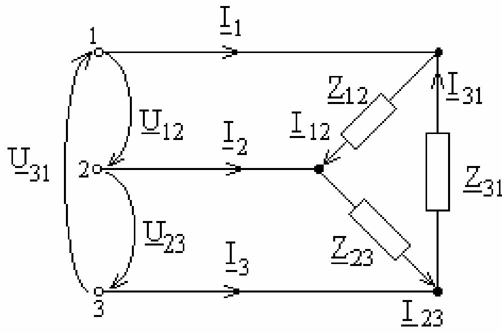


Fig. 4.19,a. Schema în complex a unui receptor dezechilibrat conectat în triunghi.

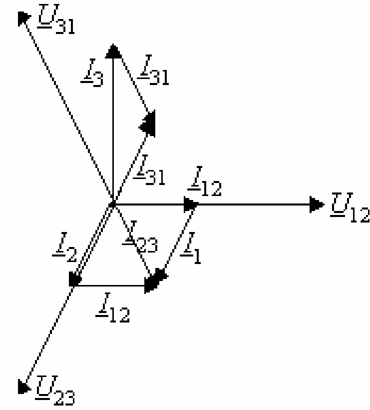


Fig. 4.19,b. Diagrama fazorială a tensiunilor şi curenților pentru receptor dezechilibrat conectat în triunghi dig figura 4.19,a.

iar cu prima teoremă a lui Kirchhoff se determină curenții de linie:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} = 10 - 10e^{j\frac{\pi}{3}} = 10e^{-j\frac{\pi}{3}}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} = 10e^{-j\frac{\pi}{3}} - 10 = 10e^{-j\frac{2\pi}{3}}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} = 10e^{j\frac{\pi}{3}} - 10e^{-j\frac{\pi}{3}} = 10\sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{2}}.$$

Diagrama fazorială este reprezentată în figura 4.19,b.

4.5.2.4. Receptor echilibrat în conexiune triunghi

În acest caz impedanțele fazelor receptorului satisfac relația

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{31} = \underline{Z} = Ze^{j\varphi}. \tag{4.71}$$

iar curenții de fază se exprimă cu relațiile (4.71) obținându-se

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}}, \quad \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}} = \frac{a^2\underline{U}_{12}}{\underline{Z}} = a^2\underline{I}_{12}, \quad \underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}} = \frac{a\underline{U}_{12}}{\underline{Z}} = a\underline{I}_{12}. \tag{4.72}$$

Relațiile (4.72) arată că la alimentarea receptorului echilibrat în conexiune triunghi cu tensiuni simetrice, ca şi la cel în stea, curenții absorbiți pe faze formează un sistem simetric cu valorile efective

$$I_{12} = I_{23} = I_{31} = \frac{U_l}{Z}. \tag{4.73}$$

Curenții de linie se determină cu relațiile (4.70) şi conform teoremei 4.2.2, vor forma la rândul lor un sistem simetric direct

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} = \underline{I}_{12}(1-a) = \sqrt{3}\underline{I}_{12}e^{-j\frac{\pi}{6}}, \quad \underline{I}_2 = a^2\underline{I}_1, \ \underline{I}_3 = a\underline{I}_1, \tag{4.74}$$

cu valorile efective

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{\sqrt{3}U_l}{Z}. \tag{4.75}$$

Diagrama fazorială a tensiunilor şi curenților este reprezentată în figura 4.20.

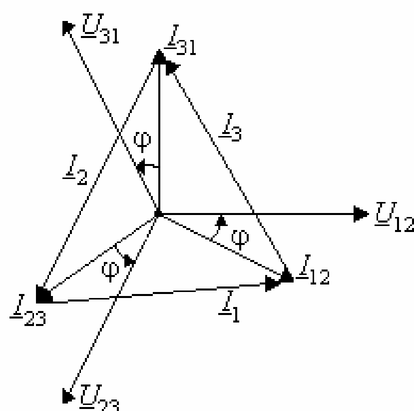


Fig. 4.20. Diagrama fazorială a tensiunilor şi curenţilor.

Observaţii

1. În cazul mai multor circuite (receptoare) conectate în serie sau în paralel şi în conexiuni diferite, se pot face transfigurări succesive, pentru a obţine un receptor echivalent în stea sau în triunghi.

2. În cazul mai multor circuite (receptoare) dezechilibrate în stea, cu neutrele izolate, potenţialele acestor neutre nu coincid şi stelele nu pot fi conectate cu laturile omoloage în paralel. În acest caz se impune transfigurarea stelelor în triunghiuri, laturile omoloage ale acestor triunghiuri fiind conectate în paralel, ceea ce permite obţinerea unui receptor echivalent în triunghi.

3. Dacă un circuit (receptor) în conexiune triunghi este alimentat printr-o linie având impedanţe nenule pe faze, pentru a determina tensiunile aplicate fazelor receptorului trebuie să se ţină seama de căderile de tensiune pe linie. Pentru aceasta circuitul (receptorul) în triunghi se transfigurează în stea şi apoi, prin înserierea impedanţelor de fază ale stelei obţinute cu impedanţele liniei, rezultă circuitul echivalent în stea. Rezolvarea acestuia furnizează curenţii prin linie care vor determina căderile de tensiune căutate.

4. Pentru circuitele (receptoarele) echilibrate, conform relaţiilor de transfigurare stea-triunghi prezentate în capitolul 1, sunt valabile relaţiile

$$\underline{Z}_{\Delta} = 3\underline{Z}_{Y}. \tag{4.76}$$

5. În regim simetric, curenţii de linie sunt defazaţi faţă de tensiunile stelate ale generatorului (tensiuni de fază când acesta este conectat în stea) sau ale receptorului cu argumentul $\varphi = arctg(X / R)$ al impedanţelor de sarcină $\underline{Z} = R + jX$ şi au valoarea efectivă

$$I_l = \frac{U_f}{Z_Y} = 3\frac{U_f}{Z_{\Delta}} = \frac{U_l}{\sqrt{3}Z_Y} = \frac{\sqrt{3}U_l}{Z_{\Delta}}. \tag{4.77}$$

6. În cazul circuitelor (reţelelor) trifazate echilibrate în stea, curenţii fazelor formează un sistem trifazat simetric şi prin conductorul neutru nu trece curent. Acest conductor ar putea fi deci suprimat. În practică însă, în reţelele de distribuţie la joasă tensiune, nu se renunţă la el datorită numărului mare de consumatori cu receptoare monofazate care fac imposibilă o echilibrare perfectă. Acest conductor neutru, cu secţiune mai mică decât a conductoarelor de fază, are rolul de a stabiliza potenţialul punctului neutru al receptorului, astfel încât fiecărei faze să i se aplice practic aceeaşi tensiune efectivă.

Exemplul 4.5: Să se determine condiția pe care trebuie să o satisfacă impedanțele inegale $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$ ale unui receptor în conexiune stea fără conductor neutru, pentru ca la alimentare cu tensiuni de linie simetrice, să absoarbă curenți simetrici.

Folosind relațiile (4.56) şi ținând seama că tensiunile de alimentare fiind simetrice, satisfac relațiile $\underline{U}_{23} = a^2 \underline{U}_{12}$ **şi** $\underline{U}_{31} = a\underline{U}_{12}$, rezultă:

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_1 \frac{\underline{U}_{12}(\underline{Y}_2 - a\underline{Y}_3)}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}; \quad \underline{I}_2 = \underline{Y}_2 \frac{a^2\underline{U}_{12}(\underline{Y}_3 - a\underline{Y}_1)}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}.$$

Cum $\underline{I}_3 = -\underline{I}_1 - \underline{I}_2$, condiția necesară şi suficientă pentru ca cei trei curenți să formeze un sistem trifazat simetric este ca $\underline{I}_2 = a^2 \underline{I}_1$. Ținând seama de relațiile de mai sus rezultă:

$$\underline{Y}_1(\underline{Y}_2 - a\underline{Y}_3) = \underline{Y}_2(\underline{Y}_3 - a\underline{Y}_1),$$

adică

$$a^2 \underline{Y}_1\underline{Y}_2 + a\underline{Y}_1\underline{Y}_3 + \underline{Y}_2\underline{Y}_3 = 0,$$

sau în impedanțe

$$a^2 \underline{Z}_3 + a\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 = 0.$$

Această condiție este evident satisfăcută dacă $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3$, deoarece $(1 + a + a^2) = 0$.

Rezultă că pentru a absorbi un sistem simetric de curenți sub tensiuni de alimentare simetrice, sarcina trebuie să fie echilibrată. Condiția poate fi însă satisfăcută şi pentru un set de impedanțe inegale si anume: $\underline{Z}_1 = R, \quad \underline{Z}_2 = j\omega L = j\frac{R}{\sqrt{3}}, \quad \underline{Z}_3 = \frac{1}{j\omega C} = -j\omega L = -j\frac{R}{\sqrt{3}}.$

În acest caz deplasarea neutrului este

$$\underline{U}_{N0} = \frac{\underline{U}_1 \frac{1}{R} + \underline{U}_2 \frac{1}{j\omega L} + \underline{U}_3 j\omega C}{\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C} = -2\underline{U}_1$$

şi curenții fazelor au valorile:

$$\underline{I}_1 = 3\underline{U}_1 / R, \quad \underline{I}_2 = 3a^2\underline{U}_1 / R = a^2\underline{I}_1, \quad \underline{I}_3 = 3a\underline{U}_1 / R = a\underline{I}_1.$$

Observație

Deşi curenții pe fazele receptorului sunt simetrici, tensiunile de fază ale acestuia nu sunt simetrice, având valorile

$$\begin{aligned}
\underline{U}_{1N} &= \underline{U}_1 - \underline{U}_{N0} = 3\underline{U}_1 \\
\underline{U}_{2N} &= \underline{U}_2 - \underline{U}_{N0} = \underline{U}_1(a^2 + 2) = j\sqrt{3}a^2\underline{U}_1 = j\sqrt{3}\underline{U}_2 \\
\underline{U}_{3N} &= \underline{U}_3 - \underline{U}_{N0} = \underline{U}_1(a + 2) = -j\sqrt{3}a\underline{U}_1 = -j\sqrt{3}\underline{U}_3.
\end{aligned}$$

Exemplul 4.6: Circuitul din figura 4.21,a, compus din două receptoare dezechilibrate în conexiune stea, este alimentat cu un sistem simetric de tensiuni. Să se exprime curenții din fazele liniei de alimentare.

Cele două receptoare fiind dezechilibrate, potențialele neutrelor lor N' şi N" sunt diferite, deci conexiunile stea nu se pot considera în paralel. În această situație se transfigurează conexiunile stea în triunghi şi se obțin impedanțele echivalente pe fază:

$$\underline{Z}'_{ij} = \frac{1}{\underline{Y}'_{ij}} = \frac{\sum_{k=1}^{3} \underline{Y}'_k}{\underline{Y}'_i \underline{Y}'_j}, \quad i, j = \overline{1,3}, \quad i \neq j,$$

respectiv

$$\underline{Z}''_{ij} = \frac{1}{\underline{Y}''_{ij}} = \frac{\sum_{k=1}^{3} \underline{Y}''_k}{\underline{Y}''_i \underline{Y}''_j}, \quad i, j = \overline{1,3}, \quad i \neq j.$$

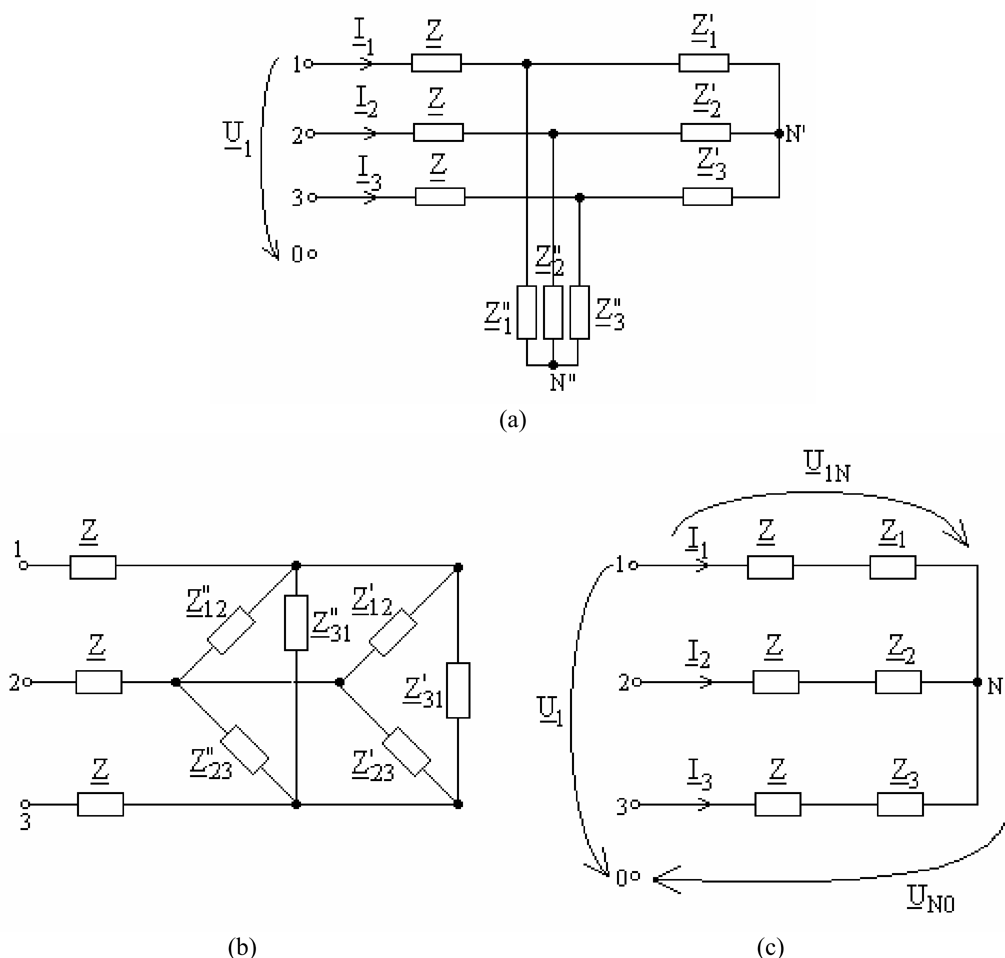


Fig. 4.21. Două receptore trifazate dezechilibrate.

Receptorul echivalent în triunghi are impedanțele (fig. 4.21,b)

$$\underline{Z}_{ij} = \frac{1}{\underline{Y}_{ij}} = \frac{1}{\underline{Y}'_{ij} + \underline{Y}''_{ij}}, \quad i, j = \overline{1,3}, \quad i \neq j.$$

Acest receptor se transfigurează apoi într-un receptor în conexiune stea, cu impedanțele pe fază

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}, \quad \underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{23}\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}, \quad \underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_{31}\underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}.$$

La acest pas, schema echivalentă a circuitului este cea reprezentată în figura 4.21,c.

Deplasarea neutrului se calculează cu relația

$$\underline{U}_{N0} = \frac{\underline{U}_1\underline{Y}_{e1} + \underline{U}_2\underline{Y}_{e2} + \underline{U}_3\underline{Y}_{e3}}{\underline{Y}_{e1} + \underline{Y}_{e2} + \underline{Y}_{e3}},$$

unde $\underline{Y}_{ek} = \dfrac{1}{\underline{Z} + \underline{Z}_k}, \quad k = \overline{1,3}.$

Tensiunile aplicate fazelor receptorului echivalent sunt:

$$\underline{U}_{kN} = \underline{U}_k - \underline{U}_{N0}, \quad k = \overline{1,3},$$

iar curenții fazelor, egali cu cei din linia de alimentare, sunt:

$$\underline{I}_k = \underline{U}_{kN}\underline{Y}_{ek}, \quad k = \overline{1,3}.$$

4.5.3. Metoda schemei monofazate

Într-o rețea trifazată echilibrată în regim simetric, tensiunile şi curenții sunt simetrici, iar conductoarele neutre nu sunt parcurse de curent şi căderile de tensiune pe neutre sunt nule. Ca urmare, punerea în scurtcircuit a tuturor punctelor neutre nu schimbă nici curenții, nici tensiunile rețelei, regimul de funcționare rămânând simetric. În consecință putem calcula mărimile fazei 1 utilizând o schemă monofazată constituită din elemente ale fazei 1 şi un conductor neutru de impedanță $\underline{Z}_0 = 0$. Pentru a obține schema monofazată de calcul se procedează astfel:

- se elimină cuplajele mutuale, dacă este cazul;
- se transfigurează toate conexiunile triunghi în conexiuni stea cu relația $\underline{Z}_Y = \underline{Z}_\Delta / 3$.

4.5.4. Analiza unor receptoare trifazate simple alimentate cu tensiuni nesimetrice, prin metoda directă

În cazul regimului nesimetric, dacă neutrul rețelei de alimentare e accesibil şi se dau tensiunile nesimetrice, acestea pot fi scrise sub forma

$$\underline{U}_1 = U_1 e^{j\alpha_1}, \quad \underline{U}_2 = U_2 e^{j\alpha_2}, \quad \underline{U}_3 = U_3 e^{j\alpha_3} \qquad (4.78)$$

cu proprietatea evidentă

$$\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 \neq 0. \qquad (4.79)$$

Tensiunile de linie

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_1 - \underline{U}_2, \quad \underline{U}_{23} = \underline{U}_2 - \underline{U}_3, \quad \underline{U}_{31} = \underline{U}_3 - \underline{U}_1, \qquad (4.80)$$

sunt de asemenea nesimetrice, dar satisfac relația (2.57).

Dacă neutrul rețelei de alimentare nu este accesibil, se dau tensiunile de linie

$$\underline{U}_{12} = U_{12} e^{j\alpha_{12}}, \quad \underline{U}_{23} = U_{23} e^{j\alpha_{23}}, \quad \underline{U}_{31} = U_{31} e^{j\alpha_{31}}, \qquad (4.81)$$

care satisfac de asemenea relația (4.55).

Calculul receptoarelor dezechilibrate în conexiune stea sau triunghi, alimentate cu tensiuni nesimetrice, se poate face similar ca în cazul tensiunilor simetrice, aplicând metoda directă, ținând seama de relațiile (4.78) și (4.81). În diagramele fazoriale steaua formată din tensiunile $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$, nu mai are brațe egale, iar triunghiul format de $\underline{U}_{12}, \underline{U}_{23}, \underline{U}_{31}$ nu mai este echilateral.

4.5.5. Metoda componentelor simetrice

4.5.5.1. Componentele simetrice ale sistemelor de mărimi trifazate nesimetrice

Un sistem trifazat nesimetric ordonat poate fi descompus în trei sisteme simetrice: un sistem direct, un sistem invers şi un sistem homopolar (figura 4.22). Descompunerea este unică şi mereu posibilă (teorema lui Fortescue), fiind exprimată cu relațiile:

$$\underline{V}_1 = \underline{V}_h + \underline{V}_d + \underline{V}_i, \quad \underline{V}_2 = \underline{V}_h + a^2\underline{V}_d + a\underline{V}_i, \quad \underline{V}_3 = \underline{V}_h + a\underline{V}_d + a^2\underline{V}_i \qquad (4.82)$$

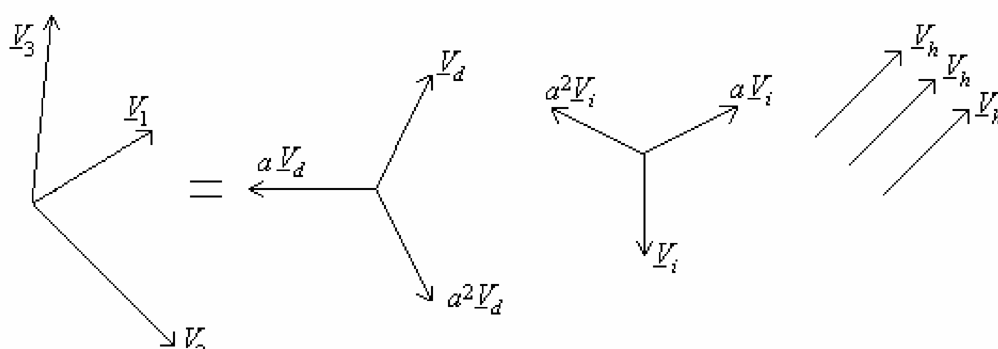


Fig. 4.22. Descompunerea unui sistem trifazat de mărimi nesimetrice în trei sisteme trifazate simetrice.

unde *a* este operatorul complex de rotație.

Rezolvând sistemul (2.86) în raport cu componentele simetrice, se obține

$$\underline{V}_h = \frac{1}{3}(\underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3), \quad \underline{V}_d = \frac{1}{3}(\underline{V}_1 + a\underline{V}_2 + a^2\underline{V}_3), \quad \underline{V}_i = \frac{1}{3}(\underline{V}_1 + a^2\underline{V}_2 + a\underline{V}_3). \qquad (4.83$$

Aceste componente formează sistemele de succesiune homopolară $(\underline{V}_h, \underline{V}_h, \underline{V}_h)$, directă $(\underline{V}_d, a^2\underline{V}_d, a\underline{V}_d)$ şi inversă $(\underline{V}_i, a\underline{V}_i, a^2\underline{V}_i)$.

Se poate demonstra simplu că valorile efective ale componentelor simetrice de tensiune şi de curent satisfac următoarele relații:

$$U_{ld} = \sqrt{3}U_{fd}, \quad U_{li} = \sqrt{3}U_{fi}, \qquad (4.84$$

rspectiv

$$I_{ld} = \sqrt{3}I_{fd}, \quad I_{li} = \sqrt{3}I_{fi}. \qquad (4.85$$

Prima ecuație din sistemul (4.83) şi relațiile (4.84) şi (4.85) au următoarele consecințe:

1. Într-un circuit trifazat fără conductor neutru (în conexiune stea sau triunghi), deoarece suma curenților de linie este totdeauna nulă $(\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0)$, componenta lor homopolară este nulă pentru orice nesimetrie.

2. Dacă curenții de fază ai receptorului conectat în triunghi au o componentă homopolară, aceasta se închide în interiorul triunghiului (consecință a punctului anterior).

3. Dacă există un conductor neutru şi este parcurs de curent, acest curent este egal cu triplul componentei homopolare a curenților de linie ($\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 3\underline{I}_h$).

4. Suma tensiunilor de linie a unui sistem trifazat este nulă ($\underline{U}_{12} + \underline{U}_{23} + \underline{U}_{31} = 0$) în orice regim, drept urmare componenta homopolară a tensiunilor de linie este nulă.

5. Tensiunile de fază ale unui receptor echilibrat în conexiune stea fără conductor neutru nu au componentă homopolară (conform punctului 1, curenții fazelor receptorului nu au componentă homopolară).

6. Tensiunile de fază ale diferiților consumatori în conexiune stea, conectați în paralel la o aceeaşi linie trifazată (la aceleaşi tensiuni de linie), pot diferi numai prin componentele homopolare (conform relației (4.84) componentele directă şi inversă sunt aceleaşi, oricare ar fi punctul neutru la care se raportează).

Cunoscând valorile componentelor simetrice de curent şi de tensiune se poate aprecia abaterea regimului nesimetric studiat față de regimul simetric prin definirea a două mărimi caracteristice - gradul de disimetrie şi gradul de asimetrie.

Gradul de disimetrie se defineşte ca raportul dintre valoarea efectivă a componentei inverse şi valoarea efectivă a componentei directe

$$\varepsilon_d = \frac{V_i}{V_d}. \tag{4.86}$$

Gradul de asimetrie este definit ca raportul dintre valoarea efectivă a componentei homopolare şi valoarea efectivă a componentei directe

$$\varepsilon_a = \frac{V_h}{V_d}. \tag{4.87}$$

În practică, un sistem de tensiuni sau de curenți se consideră simetric dacă atât ε_d cât şi ε_a sunt mai mici ca 0,05.

4.5.5.2. Analiza circuitelor trifazate dezechilibrate

În cazul unui circuit trifazat dezechilibrat, relațiile dintre componentele simetrice de succesiuni diferite ale căderilor de tensiune pe faze sunt mai complicate decât în cazul circuitelor echilibrate şi nu se mai pot construi schemele monofazate directă, inversă şi homopolară ca în cazul circuitelor echilibrate. În general, însă, dezechilibrul rețelelor nu este total, fiind posibilă separarea părților echilibrate şi dezechilibrate.

Calculul regimurilor nesimetrice se face pe baza teoremei compensației, prin înlocuirea impedanțelor elementelor dezechilibrate (care produc nesimetria) prin tensiuni echivalente nesimetrice, care se descompun în componente simetrice; aceste componente împreună cu cele ale curenților alcătuiesc necunoscutele auxiliare ale problemei.

a) **Rețea echilibrată care alimentează un receptor trifazat static dezechilibrat**

Înlocuind pe baza teoremei compensației impedanțele de fază (necuplate magnetic) ale receptorului dezechilibrat - $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$, prin surse ideale cu tensiunile la borne

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1\underline{I}_1, \quad \underline{U}_2 = \underline{Z}_2\underline{I}_2, \quad \underline{U}_3 = \underline{Z}_3\underline{I}_3, \tag{4.88}$$

se obține circuitul din figura 4.23. Acesta este un circuit trifazat echilibrat alimentat cu t.e.m. nesimetrice care reprezintă necunoscutele auxiliare.

Înlocuind în relațiile (4.88) tensiunile şi curenții în funcție de componentele lor simetrice (rel.2.87) se obțin relațiile între componentele simetrice ale tensiunilor şi curenților la bornele fazelor receptorului dezechilibrat

$$\underline{E}_d = \underline{U}_d = \underline{\xi}_h \underline{I}_d + \underline{\xi}_i \underline{I}_i + \underline{\xi}_d \underline{I}_h, \quad \underline{E}_i = \underline{U}_i = \underline{\xi}_d \underline{I}_d + \underline{\xi}_h \underline{I}_i + \underline{\xi}_i \underline{I}_h,$$
$$\underline{E}_h = \underline{U}_h = \underline{\xi}_i \underline{I}_d + \underline{\xi}_d \underline{I}_i + \underline{\xi}_h \underline{I}_h. \tag{4.89}$$

Se remarcă faptul că spre deosebire de receptorul echilibrat, la care fiecare componentă simetrică a tensiunii depinde numai de componenta simetrică corespunzătoare a curentului, la receptorul dezechilibrat fiecare componentă simetrică a tensiunii depinde de toate componentele simetrice ale curentului. În consecință, pentru receptoarele dezechilibrate, efortul de calcul antrenat de metoda componentelor simetrice este mult mai mare decât în cazul receptoarelor echilibrate.

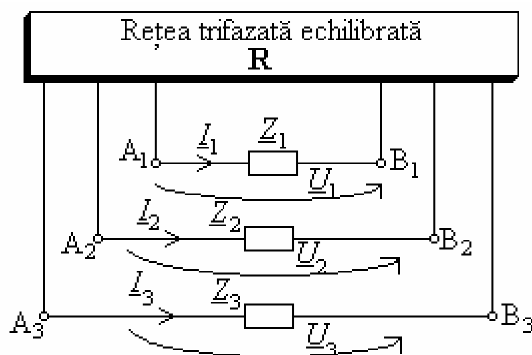


Fig. 2.23. Receptor trifazat dezechilibrat.

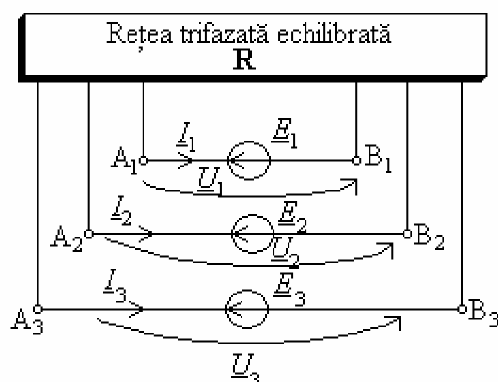


Fig. 4.24. Substituirea impedanțelor de fază cu surse ideale independente de tensiune.

În relațiile (2.100) s-au făcut următoarele notații:

$$\underline{\xi}_h = \frac{1}{3}\left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3\right)$$
$$\underline{\xi}_d = \frac{1}{3}\left(\underline{Z}_1 + a\underline{Z}_2 + a^2 \underline{Z}_3\right) \tag{4.90}$$
$$\underline{\xi}_i = \frac{1}{3}\left(\underline{Z}_1 + a^2 \underline{Z}_2 + a\underline{Z}_3\right).$$

Aceste mărimi, de natura unor impedanțe complexe, se numesc impedanțe de calcul.

Studiul rețelei din figura 4.24 se poate face acum cu ajutorul schemelor de succesiune directă, inversă şi homopolară R_d, R_i, R_h, reprezentate în figura 4.25.

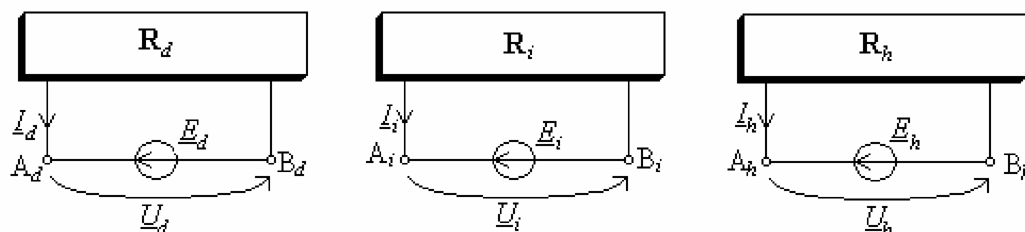


Fig. 4.25. Schemele de succesiune directă, inversă şi homopolară: R_d, R_i şi R_h.

Aceste scheme se rezolvă cu oricare din metodele cunoscute din analiza circuitelor electrice de curent alternativ. Echivalând rețelele R_d, R_i, R_h prin dipoli Thévenin sau Norton se obțin schemele din figurile 4.26, respectiv 4.27, care permit scrierea următoarelor relații:

$$\underline{I}_d = \frac{\underline{E}_{d0} - \underline{U}_d}{\underline{Z}_d}, \quad \underline{I}_i = \frac{\underline{E}_{i0} - \underline{U}_i}{\underline{Z}_i}, \quad \underline{I}_h = \frac{\underline{E}_{h0} - \underline{U}_h}{\underline{Z}_h}, \qquad (4.91)$$

respectiv

$$\underline{U}_d = \frac{\underline{I}_{dg} - \underline{I}_d}{\underline{Y}_d}, \quad \underline{U}_i = \frac{\underline{I}_{ig} - \underline{I}_i}{\underline{Y}_i}, \quad \underline{U}_h = \frac{\underline{I}_{hg} - \underline{I}_h}{\underline{Y}_h}. \qquad (4.92)$$

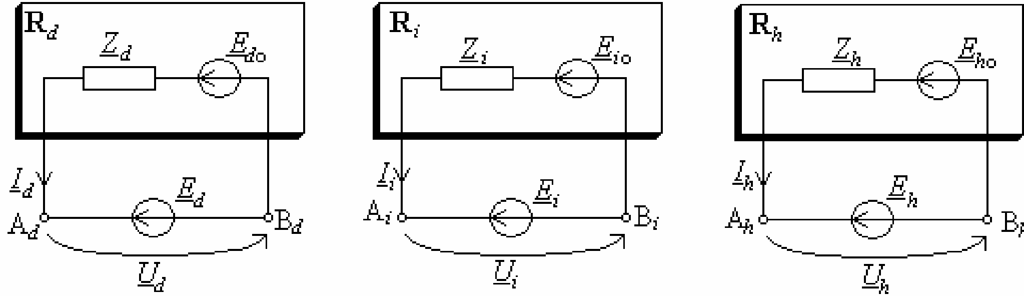


Fig. 4.26. Echivarea rețelele R_d, R_i, R_h prin dipoli Thévenin.

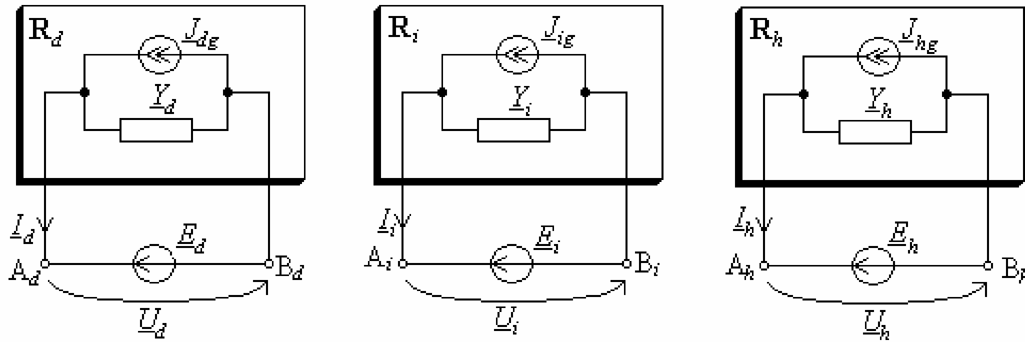


Fig. 4.27. Echivarea rețelele R_d, R_i, R_h prin dipoli Norton.

Mărimile $\underline{E}_{do}, \underline{E}_{io}, \underline{E}_{ho}, \underline{Z}_d, \underline{Z}_i, \underline{Z}_h$, respectiv $\underline{I}_{dg}, \underline{I}_{ig}, \underline{I}_{hg}$, se calculează evident în funcție de parametrii din partea echilibrată a circuitului. Sistemul de ecuații obținut cu relațiile (4.89) şi (4.91) sau (4.92) permite calculul componentelor simetrice ale tensiunilor şi curenților, cu ajutorul cărora, utilizând relațiile (4.83), se calculează apoi curenții şi tensiunile la bornele receptorului dezechilibrat din figura 4.23.

De asemenea, cunoscând componentele simetrice ale tensiunilor la bornele schemelor R_d, R_i, R_h, se pot determina componentele simetrice ale curenților şi tensiunilor din laturile rețelei echilibrate R prin rezolvarea separată a acestor scheme (paragraful anterior).

b) **Regimuri de avarie în rețelele trifazate**

În rețelele trifazate pot apare regimuri de funcționare nesimetrică determinate de întreruperea uneia sau a două dintre faze, sau de diferite tipuri de scurtcircuite. Calculul unor astfel de regimuri prezintă importanță deosebită pentru dimensionarea şi protecția acestor rețele. Nesimetria generată de întreruperi şi scurtcircuite este echivalentă cu situația prezentată la punctul anterior, dar particularizată pentru receptoare simple, ceea ce permite scrierea unor ecuații mult mai simple pentru curenții şi tensiunile de fază, respectiv pentru componentele simetrice ale acestora.

1. *Scurtcircuit pe faza 1, cu întreruperea fazelor 2 şi 3*

Situația prezentată în figura 4.28 este echivalentă cu o rețea trifazată echilibrată alimentând un receptor trifazat dezechilibrat ale cărui impedanțe de fază satisfac relațiile

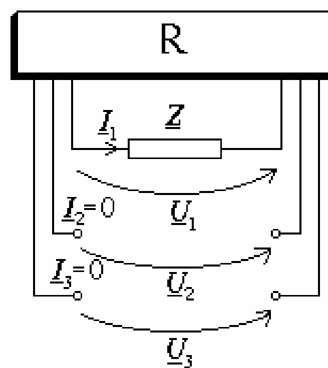


Fig. 4.28. Scurtcircuit pe faza 1 şi întreruperea fazelor 2 şi 3.

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}, \quad \underline{Z}_2 \to \infty, \quad \underline{Z}_3 \to \infty. \qquad (4.93)$$

Ca urmare

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}\underline{I}_1, \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_3 = 0. \qquad (4.94)$$

Din relațiile (4.82) şi (4.83) rezultă

$$\underline{U}_h + \underline{U}_d + \underline{U}_i = \underline{U}_1 = 3\underline{Z}\underline{I}_d, \qquad (4.95)$$

$$\underline{I}_h = \underline{I}_d = \underline{I}_i = \frac{1}{3}\underline{I}_1. \qquad (4.96)$$

Relația (4.96) arată că cele trei scheme de succesiune directă, inversă şi homopolară se înseriază ca în figura 4.29, care asigură de asemenea şi satisfacerea relației (4.95).

Rezolvând această schemă se obțin componentele simetrice ale curenților şi tensiunilor. Dacă scurtcircuitul este net (direct), $\underline{Z}_1 = 0$, iar dacă este prin arc electric, $\underline{Z}_1$ este impedanța arcului.

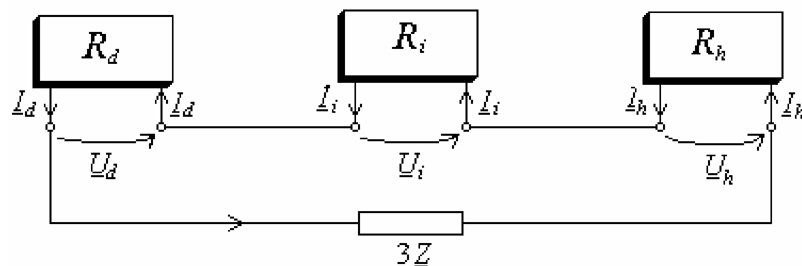


Fig. 4.29. Schemele de succesiune directă, inversă şi homopolară conectate în serie.

2. *Scurtcircuit pe fazele 2 şi 3 şi întreruperea fazei 1*

Ecuaţiile satisfăcute de acest receptor dezechilibrat sunt:

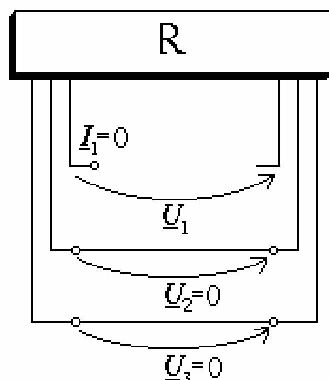


Fig. 4.30. Întreruperea fazaei 1 şi scurtcircuit pe fazele 2 şi 3.

$$\underline{I}_1 = 0, \quad \underline{U}_2 = \underline{U}_3 = 0. \qquad (4.97)$$

Pe baza relaţiilor (4.82) şi (4.83) se obţin următoarele relaţii între componentele simetrice ale curenţilor şi tensiunilor:

$$\underline{I}_h + \underline{I}_d + \underline{I}_i = 0, \qquad (4.98)$$

$$\underline{U}_h = \underline{U}_d = \underline{U}_i. \qquad (4.99)$$

Satisfacerea acestor relaţii impune conectarea celor trei reţele R_d, R_i, R_h în paralel, ca în figura 4.31. Prin rezolvarea schemei interconectate se obţin componentele simetrice ale regimului nesimetric studiat.

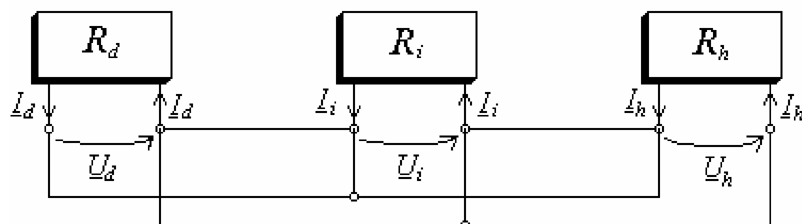


Fig. 4.31. Schemele de succesiune directă, inversă şi homopolară conectate în paralel.

Exemplul 4.7: Fie reţeaua trifazată simetrică din figura 4.32,a. Să se determine expresia curentului de scurtcircuit şi expresiile tensiunilor la o punere la pământ a primei faze prin arc electric de impedanţă $\underline{Z}_A$.

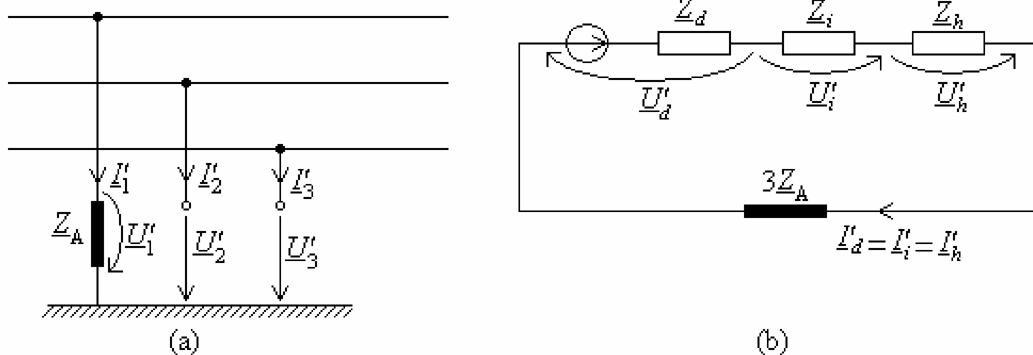


Fig. 4.32. Punerea la pământ a primei faze prin arc electric de impedanţă $\underline{Z}_A$.

Ecuaţiile la locul defectului sunt

$$\underline{I}_2^{'} = \underline{I}_3^{'} = 0, \quad \underline{U}_1^{'} = \underline{Z}_A \underline{I}_1^{'},$$

care exprimate în funcţie de componentele simetrice devin:

$$\underline{I}_h'+a^2\underline{I}_d^{'}+a\underline{I}_i^{'}=\underline{I}_h'+a\underline{I}_d^{'}+a^2\underline{I}_i^{'}=0$$
$$\underline{U}_h'+\underline{U}_d^{'}+\underline{U}_i^{'}=\underline{Z}_A(\underline{I}_h'+\underline{I}_d^{'}+\underline{I}_i^{'}).$$

Prelucrând acest sistem obținem:

$$\underline{I}_d^{'}=\underline{I}_i^{'}=\underline{I}_h^{'}$$
$$\underline{U}_h^{'}+\underline{U}_d^{'}+\underline{U}_i^{'}=3\underline{Z}_A\underline{I}_d^{'}.$$

Ecuația de curenți impune înserierea celor trei rețele monofazate de secvență directă, inversă şi homopolară. Ținând seama că $\underline{E}_d=\underline{E}_1,\ \underline{E}_i=\underline{E}_h=0,$ schema echivalentă a defectului este cea din figura 4.31,b , în care $\underline{Z}_d,\underline{Z}_i,\underline{Z}_h$ reprezintă impedanțele echivalente directă, inversă şi homopolară ale circuitului, calculate în raport cu locul defectului.

Rezolvând schema defectului se obține

$$\underline{I}_d^{'}=\underline{I}_i^{'}=\underline{I}_h^{'}=\frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_d+\underline{Z}_i+\underline{Z}_h+3\underline{Z}_A}$$
$$\underline{U}_d^{'}=\underline{E}_1-\underline{Z}_d\underline{I}_d^{'},\ \ \underline{U}_i^{'}=-\underline{Z}_i\underline{I}_i^{'},\ \ \underline{U}_h^{'}=-\underline{Z}_h\underline{I}_h^{'}.$$

Cu valorile astfel calculate ale componentelor simetrice determinăm curenții şi tensiunile pe faze la locul defectului:

$$\underline{I}_1^{'}=\underline{I}_h^{'}+\underline{I}_d^{'}+\underline{I}_i^{'}=\frac{3\underline{E}_1}{\underline{Z}_d+\underline{Z}_i+\underline{Z}_h+3\underline{Z}_A},\quad \underline{I}_2^{'}=\underline{I}_3^{'}=0,$$
$$\underline{U}_1^{'}=\underline{U}_h^{'}+\underline{U}_d^{'}+\underline{U}_i^{'}=\underline{Z}_A\underline{I}_1=\frac{3\underline{Z}_A\underline{E}_1}{\underline{Z}_d+\underline{Z}_i+\underline{Z}_h+3\underline{Z}_A},$$
$$\underline{U}_2^{'}=\underline{U}_h^{'}+a^2\underline{U}_d^{'}+a\underline{U}_i^{'},\quad \underline{U}_3^{'}=\underline{U}_h^{'}+a\underline{U}_d^{'}+a^2\underline{U}_i^{'}.$$

Observație:

Dacă punerea la pământ este directă (fără arc electric) $\underline{Z}_A=0,$ iar ecuațiile la locul defectului devin $\underline{I}_2^{'}=\underline{I}_3^{'}=0,\ \underline{U}_1^{'}=0,$ respectiv $\underline{I}_d^{'}=\underline{I}_i^{'}=\underline{I}_h^{'},\ \underline{U}_h^{'}+\underline{U}_d^{'}+\underline{U}_i^{'}=0,$ iar în schema echivalentă a defectului dispare impedanța $3\underline{Z}_A$.

Exemplul 4.8: Să se studieze scurtcircuitul bifazat cu arc electric produs într-o rețea trifazată simetrică.

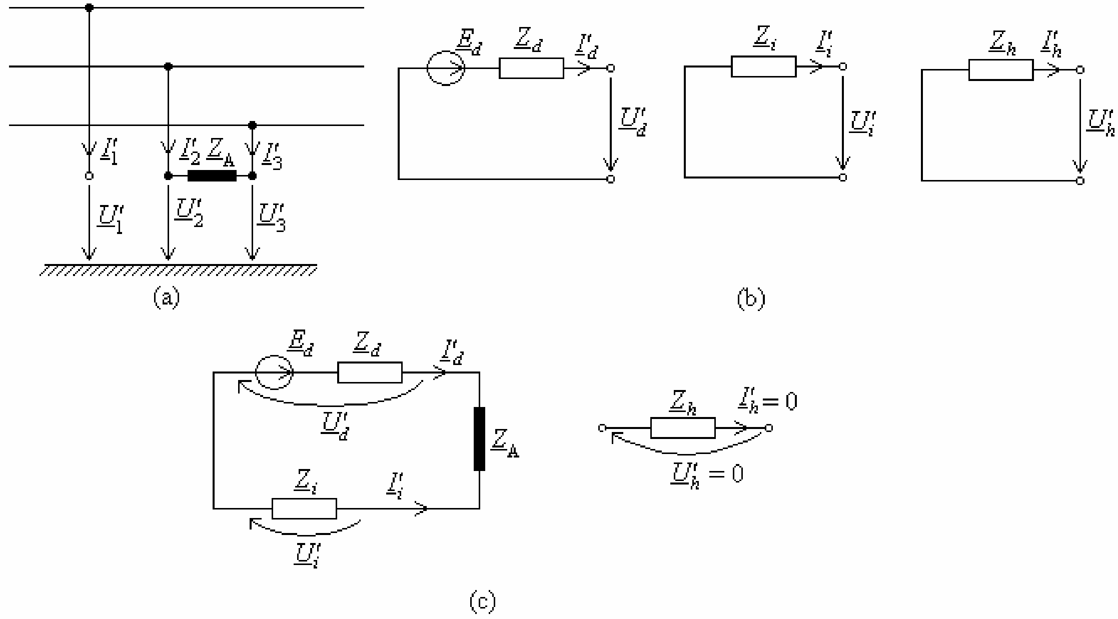


Fig. 4.33. Scurtcircuit bifazat cu arc electric.

Ecuațiile la locul defectului sunt:

$$\underline{I}'_1 = 0, \quad \underline{I}'_2 + \underline{I}'_3 = 0, \quad \underline{U}'_2 - \underline{U}'_3 = \underline{Z}_A \underline{I}'_2$$

şi exprimând în funcție de componentele simetrice rezultă:

$$\underline{I}'_h + \underline{I}'_d + \underline{I}'_i = 0$$
$$(\underline{I}'_h + a^2 \underline{I}'_d + a\underline{I}'_i) + (\underline{I}'_h + a\underline{I}'_d + a^2 \underline{I}'_i) = 0$$
$$(\underline{U}'_h + a^2 \underline{U}'_d + a\underline{U}'_i) - (\underline{U}'_h + a\underline{U}'_d + a^2 \underline{U}'_i) = \underline{Z}_A (\underline{I}'_h + a^2 \underline{I}'_d + a\underline{I}'_i).$$

Prelucrând acest sistem se obține

$$\underline{I}'_h = 0, \quad \underline{I}'_d + \underline{I}'_i = 0, \quad \underline{U}'_d - \underline{U}'_i = \underline{Z}_A \underline{I}'_d.$$

Folosind schemele monofazate pe cele trei secvențe (fig. 4.33,b) scriem următoarele ecuații:

$$\underline{U}'_d = \underline{E}_1 - \underline{Z}_d \underline{I}'_d, \quad \underline{U}'_i = -\underline{Z}_i \underline{I}'_i, \quad \underline{U}'_h = -\underline{Z}_h \underline{I}'_h = 0.$$

Pe baza ecuațiilor de mai sus se poate reprezenta schema echivalentă a defectului ca în figura 4.33,c.

Rezolvând sistemul de ecuații de mai sus se obțin componentele simetrice de curent şi tensiune

$$\underline{I}_d^{'} = -\underline{I}_i^{'} = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_d + \underline{Z}_i + \underline{Z}_A}, \quad \underline{I}_h^{'} = 0$$

$$\underline{U}_d^{'} = \frac{\underline{E}_1(\underline{Z}_i + \underline{Z}_A)}{\underline{Z}_d + \underline{Z}_i + \underline{Z}_A}, \quad \underline{U}_i^{'} = \frac{\underline{E}_1\underline{Z}_i}{\underline{Z}_d + \underline{Z}_i + \underline{Z}_A}, \quad \underline{U}_h^{'} = 0,$$

cu ajutorul cărora apoi se determină mărimile care interesează:

$$\underline{I}_1^{'} = \underline{I}_h^{'} + \underline{I}_d^{'} + \underline{I}_i^{'} = 0, \quad \underline{I}_2^{'} = -\underline{I}_3^{'} = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_d + \underline{Z}_i + \underline{Z}_A}(a^2 - a).$$

Observație:

Dacă scurtcircuitul este fără arc electric $\underline{Z}_A = 0,$ iar ecuațiile defectului se obțin înlocuind această valoare în ecuațiile de mai sus. Rezultă deci

$$\underline{I}_1^{'} = 0, \quad \underline{I}_2^{'} + \underline{I}_3^{'} = 0, \quad \underline{U}_2^{'} = \underline{U}_3^{'},$$

sau în componente simetrice

$$\underline{I}_h^{'} = 0, \quad \underline{I}_d^{'} + \underline{I}_i^{'} = 0, \quad \underline{U}_d^{'} = \underline{U}_i^{'}.$$

Exemplul 4.9: Să se studieze scurtcircuitul bifazat cu punere la pământ prin arc (fig. 4.34,a).

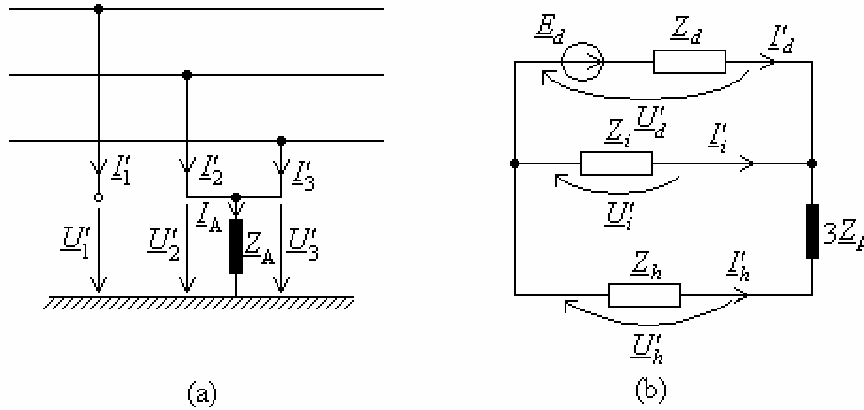


Fig. 4.34. Scurtcircuit bifazat cu punere la pământ prin arc.

Scriind ecuațiile la locul defectului se obține sistemul:

$$\underline{I}_1^{'} = 0, \quad \underline{U}_2^{'} = \underline{U}_3^{'} = \underline{Z}_A \underline{I}_A, \quad \underline{I}_A^{'} = \underline{I}_2^{'} + \underline{I}_3^{'},$$

sau în componente simetrice

$$\underline{I}_h^{'} + \underline{I}_d^{'} + \underline{I}_i^{'} = 0, \quad \underline{U}_d^{'} = \underline{U}_i^{'}, \quad \underline{U}_h^{'} - \underline{U}_d^{'}, = 3\underline{Z}_A \underline{I}_h^{'}.$$

Cu ajutorul schemelor monofazate pe cele trei secvențe se calculează curenții de scurtcircuit şi respectiv tensiunile de fază. Schema echivalentă a defectului obținută pe baza ecuațiilor în componente simetrice este cea din figura 4.34,b.

Observație:

Dacă scurtcircuitul bifazat este cu punere la pământ netă, $\underline{Z}_A = 0,$ şi ecuaţiile de mai sus se modifică în mod corespunzător. De asemenea şi schema echivalentă a defectului.

Exemplul 4.10: Într-o reţea trifazată simetrică are loc un scurtcircuit trifazat direct la pământ (fig. 4. 35,a). Să se determine curenţii la locul defectului.

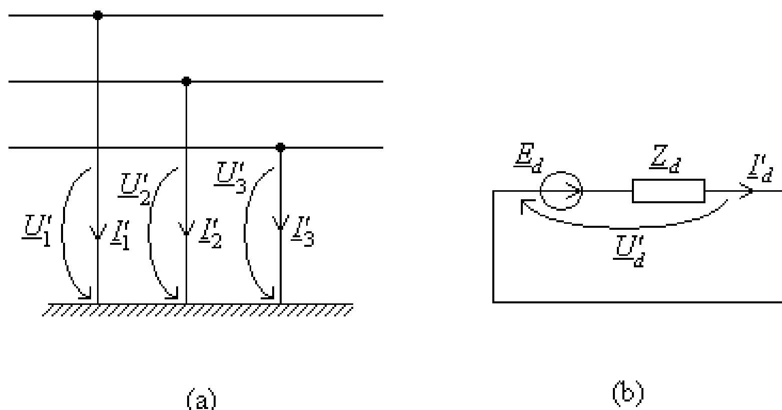


Fig. 4.35. Scurtcircuit trifazat direct la pământ.

Din ecuaţiile la locul defectului $\underline{U}_1^{'} = \underline{U}_2^{'} = \underline{U}_3^{'} = 0,$ respectiv $\underline{U}_h^{'} = \underline{U}_d^{'} = \underline{U}_i^{'} = 0,$ rezultă schema echivalentă a defectului (fig. 4.35,b). Scriind ecuaţiile în schemele echivalente pe secvenţe şi ţinând seama de ultima relaţie de mai sus, se obţine:

$$\underline{E}_1 = \underline{Z}_d \underline{I}_d^{'} + \underline{U}_d^{'} = \underline{Z}_d \underline{I}_d^{'}$$
$$0 = \underline{Z}_i \underline{I}_i^{'} + \underline{U}_i^{'} = \underline{Z}_i \underline{I}_i^{'}$$
$$0 = \underline{Z}_h \underline{I}_h^{'} + \underline{U}_h^{'} = \underline{Z}_h \underline{I}_h^{'},$$

din care rezultă componentele simetrice ale curenţilor

$$\underline{I}_d^{'} = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_d}, \quad \underline{I}_i^{'} = 0, \quad \underline{I}_h^{'} = 0.$$

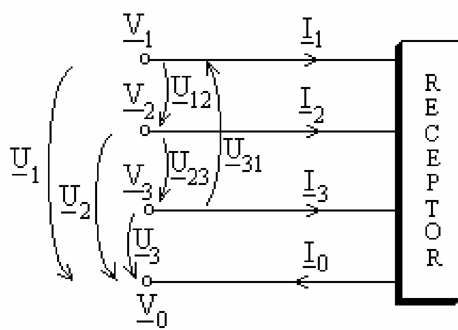
Cu ajutorul acestora se calculează apoi curenţii de scurtcircuit:

$$\underline{I}_1^{'} = \underline{I}_d^{'}, \quad \underline{I}_2^{'} = a^2 \underline{I}_d^{'}, \quad \underline{I}_3^{'} = a\underline{I}_d^{'}.$$

4.6. PUTERI ÎN SISTEMELE TRIFAZATE

4.6.1. Puteri în sistemele trifazate funcţionând în regim nesimetric

Un circuit (receptor) trifazat poate fi considerat ca un multipol cu 4 sau 3 borne de acces, după cum este sau nu prevăzut cu conductor neutru (fig. 4.36). Dacă neutrul 0 al reţelei de alimentare este accesibil şi se consideră că sistemul tensiunilor de fază ale generatorului (reţelei) este nesimetric, sunt valabile relaţiile (4.78). Dacă neutrul nu este accesibil, se dau tensiunile de linie sub forma (4.81).



Puterea complexă trifazată transmisă pe la borne receptorului reprezentat în figura 4.36, se poate exprima în funcție de potențialele şi curenții asociați bornelor, cu relația

$\underline{S}_g = \underline{V}_1\underline{I}_1^* + \underline{V}_2\underline{I}_2^* + \underline{V}_3\underline{I}_3^* + \underline{V}_0(-\underline{I}_0^*)$. (4.100)

Cum $\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$, substituind această relație în (4.100) se obține

Fig. 4.36. Un receptor trifazat.

$$\underline{S}_g = (\underline{V}_1 - \underline{V}_0)\underline{I}_1^* + (\underline{V}_2 - \underline{V}_0)\underline{I}_2^* + (\underline{V}_3 - \underline{V}_0)\underline{I}_3^* = \underline{U}_1\underline{I}_1^* + \underline{U}_2\underline{I}_2^* + \underline{U}_3\underline{I}_3^*. \quad (4.101)$$

Circuitul fiind dezechilibrat, rezultă că sistemul curenților este oarecare, deci

$$\underline{I}_1 = I_1 e^{j\beta_1},\ \ \underline{I}_2 = I_2 e^{j\beta_2},\ \ \underline{I}_3 = I_3 e^{j\beta_3}. \quad (4.102)$$

Prelucrând relația (4.101) în funcție de relațiile (4.78) şi (4.102) se obține

$$\underline{S}_g = U_1 I_1 e^{j\varphi_1} + U_2 I_2 e^{j\varphi_2} + U_3 I_3 e^{j\varphi_3}, \quad (4.103)$$

unde $\varphi_j,\ j = \overline{1,3}$ se defineşte cu relația

$$\varphi_j = \alpha_j - \beta_j. \quad (4.104)$$

Partea reală a puterii complexe reprezintă puterea activă trifazată furnizată receptorului

$$P_g = \mathrm{Re}\{\underline{S}_g\} = U_1 I_1 \cos(\underline{U}_1, \underline{I}_1) + U_2 I_2 \cos(\underline{U}_2, \underline{I}_2) + U_3 I_3 \cos(\underline{U}_3, \underline{I}_3). \quad (4.105)$$

Puterea reactivă trifazată furnizată la borne este partea imaginară a puterii complexe

$$Q_g = \mathrm{Im}\{\underline{S}_g\} = U_1 I_1 \sin(\underline{U}_1, \underline{I}_1) + U_2 I_2 \sin(\underline{U}_2, \underline{I}_2) + U_3 I_3 \sin(\underline{U}_3, \underline{I}_3). \quad (4.106)$$

Dacă neutrul rețelei nu este accesibil (rețea fără conductor neutru), este satisfăcută relația $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$ şi dacă se ia ca referință pentru potențiale borna (faza) 3, relația (4.101) devine

$$\underline{S}_g = (\underline{U}_1 - \underline{U}_3)\underline{I}_1^* + (\underline{U}_2 - \underline{U}_3)\underline{I}_2^* = \underline{U}_{13}\underline{I}_1^* + \underline{U}_{23}\underline{I}_2^*. \quad (4.107)$$

În consecință, puterea activă este

$$P_g = \mathrm{Re}\{\underline{S}_g\} = U_{13} I_1 \cos(\underline{U}_{13}, \underline{I}_1) + U_{23} I_2 \cos(\underline{U}_{23}, \underline{I}_2), \quad (4.108)$$

iar puterea reactivă

$$Q_g = \mathrm{Im}\{\underline{S}_g\} = U_{13} I_1 \sin(\underline{U}_{13}, \underline{I}_1) + U_{23} I_2 \sin(\underline{U}_{23}, \underline{I}_2). \quad (4.109)$$

În afara acestor puteri definite la bornele receptorului, se mai pot exprima puterile consumate în elementele rezistive şi reactive ale circuitului. Astfel puterea complexă consumată de receptorul trifazat în conexiune stea se calculează cu relația

$$\underline{S}_c = \underline{Z}_1 I_1^2 + \underline{Z}_2 I_2^2 + \underline{Z}_3 I_3^2 + \underline{Z}_0 I_0^2 = \sum_{k=0}^{3} R_k I_k^2 + j\sum_{k=0}^{3} X_k I_k^2, \quad (4.110)$$

din care rezultă puterile activă şi reactivă consumate de receptor

$$P_c = \mathrm{Re}\{\underline{S}_c\} = \sum_{k=0}^{3} R_k I_k^2, \tag{4.111}$$

respectiv

$$Q_c = \mathrm{Im}\{\underline{S}_c\} = \sum_{k=0}^{3} X_k I_k^2 = \sum_{k=0}^{3} (X_{L_k} - X_{C_k}) I_k^2. \tag{4.112}$$

Evident, conform teoremei de conservare a puterilor în curent alternativ, puterile calculate cu relațiile (4.105) sau (4.108) şi (4.111), respectiv (4.106) sau (4.109) şi (4.112) trebuie să fie identice, ceea ce constituie verificarea rezolvării circuitului cu metoda bilanțului de puteri.

4.6.2. Puteri în sistemele trifazate funcționând în regim simetric

Dacă sistemul tensiunilor de alimentare ale unui receptor echilibrat în conexiune stea cu conductor neutru este simetric de succesiune directă, adică, în valori instantanee

$$u_1 = \sqrt{2}U_f \sin(\omega t + \alpha), u_2 = \sqrt{2}U_f \sin\left(\omega t + \alpha - \frac{2\pi}{3}\right), u_3 = \sqrt{2}U_f \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{2\pi}{3}\right), \tag{4.113}$$

sistemul curenților va fi de asemenea simetric direct

$$i_1 = \sqrt{2}I_f \sin(\omega t + \beta), i_2 = \sqrt{2}I_f \sin\left(\omega t + \beta - \frac{2\pi}{3}\right), i_3 = \sqrt{2}I_f \sin\left(\omega t + \beta + \frac{2\pi}{3}\right). \tag{4.114}$$

Reprezentarea în complex a celor două sisteme conduce la relațiile

$$\underline{U}_1 = U_f e^{j\alpha}, \quad \underline{U}_2 = a^2 \underline{U}_1, \quad \underline{U}_3 = a\underline{U}_1, \tag{4.115}$$

respectiv

$$\underline{I}_1 = I_f e^{j\beta}, \quad \underline{I}_2 = a^2 \underline{I}_1, \quad \underline{I}_3 = a\underline{I}_1. \tag{4.116}$$

Puterea instantanee totală furnizată unei sarcini trifazate în regim simetric este

$$p = u_1 i_1 + u_2 i_2 + u_3 i_3. \tag{4.117}$$

Substituind relațiile (4.113) şi (4.114) în (4.117) se obține

$$p = 3U_f I_f \cos\varphi, \tag{4.118}$$

unde

$$\varphi = \alpha - \beta, \tag{4.119}$$

este defazajul între tensiunea şi curentul de fază.

Din relația (4.118) rezultă că în regim simetric puterea instantanee trifazată este constantă, adică energia se transmite uniform. Această proprietate este deosebit de importantă în cazul când sarcina este un motor electric trifazat al cărui cuplu mecanic va fi constant (nepulsatoriu), eliminând vibrațiile.

Puterea complexă trifazată transmisă receptorului în cazul rețelelor cu conductor neutru se exprimă cu relația (4.101) care se prelucrează în funcție de relațiile (4.115) şi (4.116), obținând

$$\underline{S}_g = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 \underline{I}_2^* + \underline{U}_3 \underline{I}_3^* = 3\underline{U}_1 \underline{I}_1^* = 3U_f I_f e^{j\varphi}. \tag{4.120}$$

Dacă receptorul este conectat în stea, $U_l = \sqrt{3}U_f$ şi $I_l = I_f$, iar dacă este conectat în triunghi $U_l = U_f$ şi $I_l = \sqrt{3}I_f$. În oricare dintre situaţii puterea complexă poate fi exprimată în funcţie de mărimile de linie cu relaţia

$$\underline{S}_g = \sqrt{3}U_l I_l e^{j\varphi}. \tag{4.121}$$

Din ultimele două relaţii se exprimă *puterea activă* sub formele

$$P_g = \mathrm{Re}\{\underline{S}_g\} = 3U_f I_f \cos\varphi \tag{4.122}$$

şi

$$P_g = \mathrm{Re}\{\underline{S}_g\} = \sqrt{3}U_l I_l \cos\varphi, \tag{4.123}$$

respectiv *puterea reactivă*

$$Q_g = \mathrm{Im}\{\underline{S}_g\} = 3U_f I_f \sin\varphi \tag{4.124}$$

şi

$$Q_g = \mathrm{Im}\{\underline{S}_g\} = \sqrt{3}U_l I_l \sin\varphi. \tag{4.125}$$

Puterea aparentă totală se exprimă în funcţie de mărimile de fază sau de linie cu relaţiile

$$S_g = 3U_f I_f = \sqrt{3}U_l I_l. \tag{4.126}$$

Circuitul fiind echilibrat, impedanţele pe faze sunt egale $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z}$, iar sistemul curenţilor fiind simetric, $\underline{I}_0 = 0$. În acest caz puterea complexă consumată de receptor obţinută din prelucrarea relaţiei (4.110) este

$$\underline{S}_c = 3\underline{Z}I_1^2 = 3RI_1^2 + j(3XI_1^2). \tag{4.127}$$

Puterile activă şi reactivă consumate sunt

$$P_c = \mathrm{Re}\{\underline{S}_c\} = 3RI_1^2, \tag{4.128}$$

respectiv

$$Q_c = \mathrm{Im}\{\underline{S}_c\} = 3XI_1^2 = 3(X_L - X_C)I_1^2. \tag{4.129}$$

Bilanţul puterilor se verifică între relaţiile (4.122) sau (4.123) şi (4.128), pe de o parte, şi între (4.124) sau (4.125) şi (4.129).

Factorul de putere într-un circuit trifazat în regim simetric se defineşte cu relaţia

$$k_P = \cos\varphi = \frac{P_g}{S_g}. \tag{4.130}$$

4.6.3. Calculul puterilor cu ajutorul componentelor simetrice

a) *Puterea instantanee a unui sistem trifazat în regim nesimetric*

Fie o reţea trifazată alimentată cu sistemul trifazat nesimetric de tensiuni de fază

$$u_1(t)=\sqrt{2}U_1\sin(\omega t+\alpha_1),\, u_2(t)=\sqrt{2}U_2\sin(\omega t+\alpha_2),\, u_3(t)=\sqrt{2}U_3\sin(\omega t+\alpha_3), \quad (4.131)$$

care se pot descompune conform teoremei Fortescue în funcție de componentele simetrice astfel:

$$u_1(t)=u_{1d}(t)+u_{1i}(t)+u_{1h}(t),\, u_2(t)=u_{2d}(t)+u_{2i}(t)+u_{2h}(t),$$
$$u_3(t)=u_{3d}(t)+u_{3i}(t)+u_{3h}(t). \quad (4.132)$$

Cele trei sisteme trifazate simetrice se exprimă cu următoarele relații:

- sistemul de succesiune directă

$$u_{1d}(t)=\sqrt{2}U_d\sin(\omega t+\alpha_d);\, u_{2d}(t)=\sqrt{2}U_d\sin(\omega t+\alpha_d-\frac{2\pi}{3});$$
$$u_{3d}(t)=\sqrt{2}U_d\sin(\omega t+\alpha_d+\frac{2\pi}{3}), \quad (4.133)$$

- sistemul de succesiune inversă

$$u_{1i}(t)=\sqrt{2}U_i\sin(\omega t+\alpha_i);\quad u_{2i}(t)=\sqrt{2}U_i\sin(\omega t+\alpha_i+\frac{2\pi}{3})$$
$$u_{3i}(t)=\sqrt{2}U_i\sin(\omega t+\alpha_i-\frac{2\pi}{3}), \quad (4.134)$$

- sistemul de succesiune homopolară

$$u_{1h}(t)=u_{2h}(t)=u_{3h}(t)=\sqrt{2}U_h\sin(\omega t+\alpha_h). \quad (4.135)$$

Curenții absorbiți de rețea formează de asemenea un sistem trifazat nesimetric

$$i_1(t)=\sqrt{2}I_1\sin(\omega t+\beta_1);\, i_2(t)=\sqrt{2}I_2\sin(\omega t+\beta_2);\, i_3(t)=\sqrt{2}I_3\sin(\omega t+\beta_3), \quad (4.136)$$

iar descompunerea lor în componente simetrice se face după relații similare cu cele de mai sus pentru tensiuni.

Exprimând puterea instantanee trifazată în regim nesimetric

$$p(t)=u_1(t)i_1(t)+u_2(t)i_2(t)+u_3(t)i_3(t) \quad (4.137)$$

şi înlocuind curenții şi tensiunile cu expresiile în funcție de componentele lor simetrice, se obține o expresie de forma:

$$p(t)=p_d(t)+p_i(t)+p_h(t)+p_{d,i}(t)+p_{i,d}(t)+p_{d,h}(t)+p_{h,d}(t)+p_{i,h}(t)+p_{h,i}(t). \quad (4.138)$$

Primii trei termeni din această relație reprezintă componentele instantanee de succesiune directă, inversă şi homopolară, iar următorii termeni reprezintă puteri instantanee încrucişate corespunzătoare produselor diferitelor secvențe de tensiune şi de curent (tab. 4.1)

Tabel 4.1

	i_d	i_i	i_h
u_d	p_d	$p_{d,i}$	$p_{d,h}$
u_i	$p_{i,d}$	p_i	$p_{i,h}$
u_h	$p_{h,d}$	$p_{h,i}$	p_h

Componenta instantanee de succesiune directă se exprimă ca suma puterilor de succesiune directă corespunzătoare celor trei faze

$$p_d(t) = p_{1d}(t) + p_{2d}(t) + p_{3d}(t), \tag{4.139}$$

expresiile dezvoltate ale acestor componente de fază fiind

$$\begin{aligned} p_{1d}(t) &= U_d I_d \cos\varphi_d \left(1 - \cos(2\omega t + 2\alpha_d)\right) - U_d I_d \sin\varphi_d \sin(2\omega t + 2\alpha_d) \\ p_{2d}(t) &= U_d I_d \cos\varphi_d \left(1 - \cos\left(2\omega t + 2\alpha_d + \frac{2\pi}{3}\right)\right) - U_d I_d \sin\varphi_d \sin\left(2\omega t + 2\alpha_d + \frac{2\pi}{3}\right) \\ p_{3d}(t) &= U_d I_d \cos\varphi_d \left(1 - \cos\left(2\omega t + 2\alpha_d - \frac{2\pi}{3}\right)\right) - U_d I_d \sin\varphi_d \sin\left(2\omega t + 2\alpha_d - \frac{2\pi}{3}\right). \end{aligned} \tag{4.140}$$

Substituind aceste relații în relația (4.139), se obține:

$$p_d(t) = 3U_d I_d \cos\varphi_d = P_d. \tag{4.141}$$

Componenta instantanee de putere de succesiune inversă se exprimă cu relația

$$p_i(t) = p_{1i}(t) + p_{2i}(t) + p_{3i}(t), \tag{4.142}$$

în care

$$\begin{aligned} p_{1i}(t) &= U_i I_i \cos\varphi_i \left(1 - \cos(2\omega t + 2\alpha_i)\right) - U_i I_i \sin\varphi_i \sin(2\omega t + 2\alpha_i) \\ p_{2i}(t) &= U_i I_i \cos\varphi_i \left(1 - \cos\left(2\omega t + 2\alpha_i - \frac{2\pi}{3}\right)\right) - U_i I_i \sin\varphi_i \sin\left(2\omega t + 2\alpha_i - \frac{2\pi}{3}\right) \\ p_{3i}(t) &= U_i I_i \cos\varphi_i \left(1 - \cos\left(2\omega t + 2\alpha_i + \frac{2\pi}{3}\right)\right) - U_i I_i \sin\varphi_i \sin\left(2\omega t + 2\alpha_i + \frac{2\pi}{3}\right). \end{aligned} \tag{4.143}$$

Substituind aceste relații în relația (4.142) se obține

$$p_i(t) = 3U_i I_i \cos\varphi_i = P_i. \tag{4.144}$$

În mod similar se determină componenta instantanee de putere de succesiune homopolară

$$p_h(t) = p_{1h}(t) + p_{2h}(t) + p_{3h}(t), \tag{4.145}$$

iar componentele ei pe faze sunt

$$p_{1h}(t) = p_{2h}(t) = p_{3h}(t) = U_h I_h \cos\varphi_h \left(1 - \cos(2\omega t + 2\alpha_h)\right) - U_h I_h \sin\varphi_h \sin(2\omega t + 2\alpha_h). \tag{4.146}$$

Înlocuind ultima relație în cea anterioară rezultă:

$$p_h(t) = 3U_h I_h \cos\varphi_h \left(1 - \cos(2\omega t + 2\alpha_h)\right) - 3U_h I_h \sin\varphi_h \sin(2\omega t + 2\alpha_h) \tag{4.147}$$

adică

$$p_h(t) = P_h \left(1 - \cos(2\omega t + 2\alpha_h)\right) - Q_h \sin(2\omega t + 2\alpha_h), \tag{4.148}$$

cu

$$P_h = 3U_h I_h \cos\varphi_h \tag{4.149}$$

şi

$$Q_h = 3U_h I_h \sin\varphi_h. \qquad (4.150)$$

După cum se observă din relațiile (4.140) şi (4.143), puterile instantanee de secvență directă şi inversă ale celor trei faze conțin câte o componentă activă constantă şi una oscilatorie de frecvență dublă şi câte o componentă reactivă oscilatorie de frecvență dublă. În expresia puterilor instantanee totale $p_d(t)$ şi $p_i(t)$, însă, componentele oscilatorii dispar, rămânând numai componentele corespunzătoare puterilor active pe secvența respectivă (rel. (4.141), (4.144)).

Puterea instantanee totală de secvență homopolară $p_h(t)$, spre deosebire de celelalte două secvențe, conține pe lângă componenta constantă corespunzătoare puterii active, două componente oscilatorii - una de putere activă şi una de putere reactivă - de frecvență dublă.

Calculând celelalte componente ale puterii instantanee, se obțin expresiile:

$$\begin{aligned} p_{d,i}(t) &= u_{1d}i_{1i} + u_{2d}i_{2i} + u_{3d}i_{3i} = -3U_d I_i \cos(2\omega t + \alpha_d + \beta_i), \\ p_{i,d}(t) &= u_{1i}i_{1d} + u_{2i}i_{2d} + u_{3i}i_{3d} = -3U_i I_d \cos(2\omega t + \alpha_i + \beta_d), \\ p_{d,h}(t) = p_{h,d}(t) &= u_{1d}i_{1h} + u_{2d}i_{2h} + u_{3d}i_{3h} = u_{1h}i_{1d} + u_{2h}i_{2d} + u_{3h}i_{3d} = 0, \\ p_{i,h}(t) = p_{h,i}(t) &= u_{1i}i_{1h} + u_{2i}i_{2h} + u_{3i}i_{3h} = u_{1h}i_{1i} + u_{2h}i_{2i} + u_{3h}i_{3i} = 0 \end{aligned} \qquad (4.151)$$

b) *Puterea complexă a unui sistem trifazat în regim nesimetric*

În cazul unei rețele trifazate alimentate cu tensiuni nesimetrice, puterea complexă se exprimă cu relația

$$\underline{S} = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 \underline{I}_2^* + \underline{U}_3 \underline{I}_3^*. \qquad (4.152)$$

Prelucrând această expresie în funcție de relațiile (4.82) şi ținând seama că a* = a^2, iar a^{2*} = a, rezultă

$$\underline{S} = 3\underline{U}_h \underline{I}_h^* + 3\underline{U}_d \underline{I}_d^* + 3\underline{U}_i \underline{I}_i^*, \qquad (4.153)$$

ceilalți termeni dispărând ca fiind factori comuni pe lângă suma ($1+a+a^2$).

S-a obținut astfel o expresie a puterii complexe în funcție de componentele simetrice ale tensiunilor şi curenților de fază.

Dacă se notează cu $\varphi_h, \varphi_d, \varphi_i$ defazajele dintre componentele simetrice de acelaşi nume ale tensiunilor şi curenților, din relația (4.153) se obțin expresiile pentru *puterea activă*, respectiv pentru *puterea reactivă*:

$$P = \mathrm{Re}\{\underline{S}\} = 3U_h I_h \cos\varphi_h + 3U_d I_d \cos\varphi_d + 3U_i I_i \cos\varphi_i, \qquad (4.154)$$

$$Q = \mathrm{Im}\{\underline{S}\} = 3U_h I_h \sin\varphi_h + 3U_d I_d \sin\varphi_d + 3U_i I_i \sin\varphi_i, \qquad (4.155)$$

sau exprimând sub forma unor componente de succesiune directă, inversă şi homopolară corespunzătoare celor trei faze

$$P = P_h + P_d + P_i \qquad (4.156)$$

respectiv

$$Q = Q_h + Q_d + Q_i. \qquad (4.157)$$

Observații

Componentele oscilatorii corespunzătoare puterii reactive ce apar pe faze în expresiile $p_d(t)$ şi $p_i(t)$, nu contribuie la transferul energiei electromagnetice de la sursă la receptor. Ele reprezintă oscilații de energie electromagnetică între fazele sistemului trifazat şi se reflectă în pierderile pe liniile de transmisie a puterii. De asemenea toate componentele oscilatorii care se regăsesc în expresiile puterii instantanee homopolară $p_h(t)$, respectiv în puterile instantanee încrucişate $p_{d,i}(t)$ şi $p_{i,d}(t)$ [11] contribuie la creşterea pierderilor pe liniile de transport.

Dezvoltând expresiile componentelor constante ale secvențelor inverse şi homopolare, se constată că acestea sunt negative, ceea ce corespunde unui defazaj mai mare de 90^0 între secvențele inverse de tensiune şi curent, respectiv homopolare de tensiune şi curent.

Acestă observație permite anumite interpretări [9] legate de circulația puterilor în rețele în regim nesimetric.

4.6.4. Efectele energetice ale regimului nesimetric

Impactul regimului nesimetric determinat de un receptor trifazat dezechilibrat asupra rețelei de alimentare poate fi studiat pe cazul simplu al unui receptor pur rezistiv [9], alimentat printr-o linie echilibrată pur rezistivă (fig. 4.37). Se consideră sistemul de alimentare de putere infinită – modelat printr-un generator trifazat ideal cu impedanțe nule – menținând tensiunea constantă la borne.

Generatorul fiind perfect simetric, tensiunile la bornele sale sunt egale cu $\underline{E}, a^2\underline{E}, a\underline{E}$ şi au componentele simetrice $\underline{E}_d = \underline{E},\ \underline{E}_i = 0,\ \underline{E}_h = 0.$ Aplicând metoda directă de analiză se obțin curenții din fazele receptorului

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{R_1 + r} = \underline{E}\,\underline{Y}_1, \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{R_2 + r} = a^2\underline{E}\,\underline{Y}_2, \quad \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3}{R_3 + r} = a\underline{E}\,\underline{Y}_3. \qquad (4.158)$$

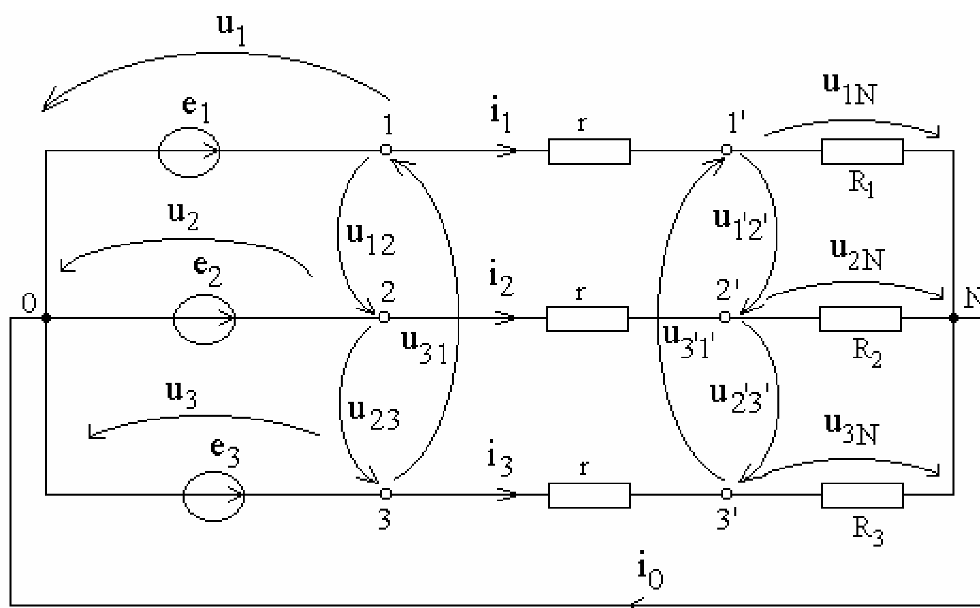


Fig. 4. 37. Receptor trifazat pur rezistiv.

Componentele simetrice ale curenților se determină cu relațiile (4.82), obținând

$$\underline{I}_d = \frac{\underline{E}}{3}(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3), \quad \underline{I}_i = \frac{\underline{E}}{3}\left(\underline{Y}_1 - \frac{\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}{2} + j\frac{\sqrt{3}(\underline{Y}_2 - \underline{Y}_3)}{2}\right), \quad \underline{I}_h = \underline{I}_i^*. \tag{4.159}$$

Tensiunile la bornele receptorului sunt date de relațiile:

$$\begin{aligned} &\underline{U}_{1N} = \underline{E} - r\underline{I}_1 = \underline{E}(1 - r\underline{Y}_1); \underline{U}_{2N} = a^2\underline{E} - r\underline{I}_2 = a^2\underline{E}(1 - r\underline{Y}_2); \\ &\underline{U}_{3N} = a\underline{E} - r\underline{I}_3 = a\underline{E}(1 - r\underline{Y}_3), \end{aligned} \tag{4.160}$$

iar componentele lor simetrice, determinate cu relațiile (2.86) au expresiile

$$\underline{U}_d = \underline{E}\left(1 - \frac{r}{3}(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3)\right); \; \underline{U}_i = \frac{\underline{E}r}{3}\left(-\underline{Y}_1 + \frac{\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}(\underline{Y}_2 - \underline{Y}_3)\right); \; \underline{U}_h = \underline{U}_i^*. \tag{4.161}$$

Calculând puterile active pe cele trei componente se obțin următoarele relații:

$$\begin{aligned} &P_d = \mathrm{Re}\left\{3\underline{U}_d\underline{I}_d^*\right\} = E^2\left((Y_1 + Y_2 + Y_3) - \frac{r}{3}(Y_1 + Y_2 + Y_3)^2\right) \\ &P_i = \mathrm{Re}\left\{3\underline{U}_i\underline{I}_i^*\right\} = -\frac{r}{3}E^2\left((Y_1 + Y_2 + Y_3)^2 - 3(Y_1Y_2 + Y_2Y_3 + Y_1Y_3)\right) \\ &P_h = \mathrm{Re}\left\{3\underline{U}_h\underline{I}_h^*\right\} = \mathrm{Re}\left\{3\underline{U}_i^*\underline{I}_i\right\} = P_i. \end{aligned} \tag{4.162}$$

Puterea activă totală la bornele receptorului este egală cu suma puterilor pe componentele simetrice

$$P_t = P_d + P_i + P_h = E^2\left[Y_1 + Y_2 + Y_3 - r\left(Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2\right)\right] \tag{4.163}$$

Pe de altă parte, puterea consumată în fazele receptorului, egală cu puterea primită la borne, este

$$\begin{aligned} P_c &= R_1I_1^2 + R_2I_2^2 + R_3I_3^2 = \underline{U}_{1N}\underline{I}_1^* + \underline{U}_{2N}\underline{I}_2^* + \underline{U}_{3N}\underline{I}_3^* = \\ &= E^2\left(Y_1 + Y_2 + Y_3 - r(Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2)\right). \end{aligned} \tag{4.164}$$

Se observă că această valoare este egală cu valoarea P_t.

Să mai evidențiem faptul că generatorul debitează putere numai pe componenta directă:

$$P_g = P_{gd} = \mathrm{Re}\left\{3\underline{E}_d\underline{I}_d^*\right\} = E^2\left(Y_1 + Y_2 + Y_3\right) \tag{4.165}$$

şi pierderile în rețeaua echivalentă directă sunt

$$P_l = 3rI_d^2 = \frac{rE^2}{3}\left(Y_1 + Y_2 + Y_3\right)^2. \tag{4.166}$$

Bilanțul de putere activă al sistemului poate fi descris după cum urmează.

Generatorul debitează putere activă pe componenta directă P_{gd} din care o parte este livrată la bornele receptorului pe componenta directă P_d, iar restul acoperă pierderile în rețeaua echivalentă directă, adică:

$$P_d = P_{gd} = P_d + P_l. \tag{4.167}$$

Receptorul reține din puterea P_d pentru consumul propriu P_t egală cu P_c, iar restul de putere $P_d - P_t = -\left(P_i + P_h\right)$, reprezentând o parte din puterea activă primită de receptor pe

componenta directă este disimetrizată şi returnată în rețea, unde se regăseşte sub formă de pierderi Joule suplimentare P_{ls}. Ecuația de bilanț al puterilor este deci:

$$P_g + P_i + P_h = P_t + P_l, \qquad (4.168)$$

sau

$$P_g = P_t + P_l + P_{ls}. \qquad (4.169)$$

Prin urmare, receptorul dezechilibrat alimentat de un sistem simetric direct printr-o rețea echilibrată este cauza apariției regimului nesimetric. Acesta se caracterizează prin apariția în rețea, pe lângă componenta directă a puterii active, furnizată de generator, a componentelor inversă şi homopolară "generate" de receptorul dezechilibrat.

Puterea de nesimetrie returnată în rețea se regăseşte sub formă de pierderi suplimentare în liniile de alimentare, dar nu numai.

În cazul receptoarelor trifazate dinamice (motoarele şi generatoarele electrice), componentele inverse de curent datorate nesimetriei produc cupluri de frânare şi pierderi suplimentare în înfăşurări, reducând randamentul maşinii.

Observații

1. Descompunerea regimului nesimetric real al unei rețele trifazate în regimuri simetrice componente are un rol pur metodologic, pentru a pune în evidență efectele energetice defavorabile ale regimului nesimetric în comparație cu regimul simetric.

2. În general, puterile absorbite de receptoarele unui sistem nu sunt independente între ele, interdependența fiind generată de obligativitatea ca tensiunile şi curenții să satisfacă sistemul ecuațiilor lui Kirchhoff pentru schema respectivă.

3. Puterea de nesimetrie debitată de un receptor dezechilibrat este dependentă de puterile de nesimetrie debitate de celelalte receptoare dezechilibrate.

4. Un receptor dezechilibrat alimentat cu tensiuni nesimetrice alese astfel încât receptorul să absoarbă un sistem simetric de curenți, nu produce puteri de nesimetrie.

4.6.5. Factorul de putere în sistemele trifazate dezechilibrate

Gradul de dezechilibru al unui receptor dezechilibrat trebuie apreciat prin gradul de nesimetrie pe care-l produce în sistem. Deoarece în cazul unui receptor dezechilibrat alimentat cu un sistem nesimetric de tensiuni nesimetria curenților absorbiți se datorează atât dezechilibrului receptorului, cât şi nesimetriei tensiunilor, pentru a putea caracteriza dezechilibrul unui receptor îl vom considera alimentat cu tensiuni simetrice de succesiune directă (situația normală).

Problema poate fi abordată [10] plecând de la cazul unui receptor trifazat echilibrat alimentat printr-o linie trifazată echilibrată, de rezistență r pe fază. Dacă receptorul absoarbe curentul de valoare efectivă I sub un factor de putere $\cos\varphi$ cunoscut, atunci pierderile de putere activă în linie sunt:

$$P_l = 3rI^2 = 3rI_d^2, \qquad (4.170)$$

ținând seama că puterea se transmite numai pe componenta directă.

În cazul unei compensări totale a puterii reactive, receptorul ar absorbi aceeaşi putere activă, sub aceleaşi tensiuni la borne, dar curentul pe linie ar fi mai mic, şi anume $I' = I\cos\varphi$, respectiv $I_d' = I_d \cos\varphi_d$. În această situație pierderile pe linie ar fi:

$$P_l^{'} = 3r\left(I_d \cos\varphi_d\right)^2 = P_l \cos^2\varphi_d, \tag{4.171}$$

de unde rezultă:

$$\cos\varphi_d = \sqrt{\frac{P_l^{'}}{P_l}}. \tag{4.172}$$

Dacă receptorul echilibrat se înlocuieşte cu unul dezechilibrat echivalent (care absoarbe aceeaşi putere activă şi reactivă sub aceleaşi tensiuni la borne), acesta va absorbi un sistem nesimetric de curenți de componente simetrice I_d, I_i şi I_h. În această situație, pierderile totale de putere pe linie vor fi

$$P_l^{''} = 3r\left(I_d^2 + I_i^2 + I_h^2\right). \tag{4.173}$$

Ținând seama de relațiile de mai sus, se poate defini *un factor de putere de nesimetrie* cu relația:

$$k_{pn} = \sqrt{\frac{P_l}{P_l^{''}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{I_i}{I_d}\right)^2 + \left(\frac{I_h}{I_d}\right)^2}}, \tag{4.174}$$

în care intervin coeficienții de nesimetrie şi anume de disimetrie, respectiv de asimetrie. Acest factor de putere permite aprecierea cantitativă a gradului de dezechilibru al unui receptor.

Pentru *P*, *Q* şi *U* date, pierderile pe linie vor fi minime când factorul de putere de nesimetrie este unitar ($k_d = k_a = 0$), în condițiile compensării lui *Q*. Plecând de la această constatare se poate defini un factor de putere global în funcție de raportul dintre pierderile minime absorbite pe linie, care se obțin când receptorul este echilibrat şi compensat, şi pierderile corespunzătoare receptorului dezechilibrat echivalent şi necompensat, adică

$$k_p = \sqrt{\frac{P_l^{'}}{P_l^{''}}} = \sqrt{\frac{P_l}{P_l^{''}}} \cdot \sqrt{\frac{P_l^{'}}{P_l}} = k_{pn}\cos\varphi_d = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon_d^2 + \varepsilon_a^2}}\cos\varphi_d. \tag{4.175}$$

Relația (4.175) arată că ameliorarea factorului de putere global presupune atât echilibrarea receptorului, cât şi compensarea puterii reactive absorbită de acesta în regim simetric. Dacă se raportează pierderile suplimentare datorate nesimetriei la pierderile minime, se obține:

$$k_s = \frac{P_l^{''} - P_l^{'}}{P_l^{'}} = \frac{P_l^{''} - P_l^{'}}{P_l^{''}} \cdot \frac{P_l^{''}}{P_l^{'}} = \frac{1 - k_p^2}{k_p^2}, \tag{4.176}$$

care ne arată că, de exemplu pentru un $k_p = 0{,}5$, pierderile suplimentare reprezintă 300% din pierderile minime, dar chiar pentru $k_p = 0{,}9$ ele reprezintă încă 25,5% din acestea.

BIBLIOGRAFIE

1. **L.O. Chua, P.M. Lin,** *Computer-aided analysis of electronic circuit'*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
2. **L.O. Chua, C.A. Desoer, E.S. Kuh**, *Linear and nonlinear circuits*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1987.
3**. A.F. Schwarz**, *Computer-aided design of microelectronic circuits and systems. Fundamentals, Methods and Tools*, Academic Press, New York, 1987.

4. **C.I. Mocanu,** *Teoria circuitelor electrice*, Editură Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.
5. **M. Preda, P. Cristea,** *Bazele electrotehnicii*, vol. II. Circuite electrice, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980.
6**. M. Hasler, J. Neirynck,** *Circuits nonlinéaires*, Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, 1985.
7. **N. Balabanian, T. Bickart, S. Seshu**, *Teoria modernă a circuitelor*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1974.
8. **W. J. McCalla**, *Fundamentals of Computer-Aided Circuit Simulation*, Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordecht/Lancaster, 1988.
9. **S. Franco**, *Electric Circuits Fundamentals*, Saunders College Publishing, New York, 1995.
10**. A. Timotin**, Viorica Hortopan, A. Ifrim, M. Preda, *Lecţii de Bazele Electrotehnicii*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1970.
11**. A. Moraru**, *Bazele electrotehnicii*', vol. II. Teoria circuitelor, Tipografia Universităţii Politehnica Bucureşti, 1993.
12. **D. Topan**, *Circuits électriques*, Editura Universitaria, Craiova, 1996.
13. **M. Iordache, M. Perpelea**, *Analiza asistata de calculator a circuitelor electrice si electronice neliniare complexe de mari dimensiuni*, Editura Didactica si Pedagogica, Bucureşti, 1995.
14. **Lucia Dumitriu, M., Iordache**, *Teoria modernă a circuitelor electrice* - Vol. I - *Fundamentare teoretică, Aplicaţii, Algoritmi şi Programe de calcul*, Editura All Educational S.A., Bucureşti 1998.
15. **M.Iordache, Lucia Dumitriu**, *Teoria modernă a circuitelor electrice* - Vol. II - *Fundamentare teoretică, Aplicaţii, Algoritmi şi Programe de calcul*, Editura All Educational S.A., Bucureşti 2000.
16. **M. Iordache, Lucia Dumitriu,** *Simularea asistată de calculator a circuitelor analogice*, Editura POLITEHNICA Press, Bucureşti 2002 (450).
17. **M. Iordache**, **L. Mandache,** *Analiza asistată de calculator a circuitelor analogice neliniare*, Editura POLITEHNICA Press, Bucureşti 2004.
18. **Lucia Dumitriu, M. Iordache**, *Simularea numerică a circuitelor analogice cu programul PSPICE*, Editura MATRIX ROM, Bucureşti, 2006.
19. **M. Iordache, L. Mandache, M. Perpelea**, *Analyse numérique circuits analogiques non linéaires*, Groupe Genoyer, Marseille, 2006.
20. **L. O. Chua, C. A. Desoer, E. S. Kuh** *Linear and nonlinear circuits*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1987.
21. A. Moraru, *Bazele electrotehnicii, vol. II. Teoria circuitelor*. Tipografia Universităţii „Politehnica" Bucureşti, 1993.
22. **M. Iordache, Lucia Dumitriu** *„PGFC - Program de Generare a Funcţiilor de Circuit", Manual de utilizare.* Biblioteca de programe a Catedrei de Electrotehnică a Universităţii „Politehnica" Bucureşti, 1998.
23.**T. Marian** ,*SPICE,* . Editura Teora, Bucureşti, 1996.
24**. M. Badea**, *Analiza asistată de calculator a circuitelor electrice*, Editura InfoMed, Craiova, 1997.
25. **H. Gavrilă,** *Electrotehnică şi echipamente electrice*, Vol. I, Editura Didactică şi Pedagogică, R.A., Bucureşti, 1993.
26. **A. Ţugulea**, „Consideraţii privind efectele energetice în regimurile armonice nesimetrice ale sistemelor trifazate", Energetica, nr. 3, 1986, pp. 121-130.
27. **A. Ţugulea**, „Consideraţii referitoare la definirea factorului de putere pentru sistemele trifazate dezechilibrate", Energetica, nr. 4, 1986, pp. 164-167.
28. **A. E. Emanuel,** „On the Definition of Power Factor and Apparent Power in Unbalanced Polyphase Circuits with Sinusoidal Voltage and Currents", IEEE Transaction on Power Delivery, Vol. 8, no. 3, 1993, pp. 841-852.

CAPITOLUL 5

CIRCUITE ELECTRICE LINIARE ÎN REGIM PERIODIC NESINUSOIDAL

5.1. REGIMUL PERIODIC NESINUSOIDAL

Analiza regimurilor de funcţionare a circuitelor electrice în care curenţii şi tensiunile sunt funcţii periodice oarecare prezintă o importanţă practică şi teoretică deosebită. În numeroase instalaţii de telecomunicaţii şi automatizări astfel de regimuri sunt realizate intenţionat. În circuitele electrice destinate producerii, transportului şi distribuţiei energiei electrice, forma de variaţie în timp a tensiunilor şi curenţilor nu este riguros sinusoidală, iar abaterea se numeşte **distorsiune** sau **deformare**. Distorsiunea provine de la imperfecţiunile constructive ale generatoarelor (nu se poate realiza o înfăşurare căreia să-i corespundă o repartiţie sinusoidală a inducţiei magnetice în întrefier) şi de la caracterul neliniar al unor elemente de circuit (bobine cu miez de fier, cuptoare electrice, amplificatoare magnetice, diode redresoare, tiristoare etc.). Aceste elemente neliniare sub tensiune sinusoidală distorsionează curentul, care la rândul său produce căderi de tensiune nesinusoidale în alte elemente de circuit, fie liniare, fie neliniare. După clasificarea făcută de C. Budeanu, aceste elemente se numesc **elemente deformante de prima categorie**.

Elementele de circuit reactive şi liniare produc distorsiuni mai pronunţate a unora dintre mărimi în raport cu celelalte. Condensatorul liniar sub tensiune sinusoidală stabileşte un curent sinusoidal, însă sub tensiune nesinusoidală curentul rezultă nesinusoidal, cu un grad de deformare mai pronunţat. Bobina liniară străbătută de curent sinusoidal stabileşte la borne o tensiune sinusoidală, însă la curent nesinusidal tensiunea este nesinusoidală cu un grad de deformare mai accentuat. Conform clasificării lui C. Budeanu, elementele reactive liniare se numesc **elemente deformante de categoria a doua**.

Studiul regimului periodic nesinusoidal este important atât din punctul de vedere al efectelor supărătoare produse în reţelele de transmisie şi distribuţie a energiei electrice, cât şi din cel al utilizării în construcţia unor aparate electrice. În reţelele electrice care funcţionează în regim periodic nesinusoidal - numit şi **regim deformant**, factorul de putere scade, compensarea puterii reactive cu condensatoare nu este în general posibilă, apar pierderi suplimentare de energie, au loc rezonanţe (care produc supratensiuni sau supracurenţi) etc. Neliniaritatea unor elemente de circuit - bobine cu miez de fier saturat, condensatoare neliniare - este utilizată la realizarea unor aparate electrice cum sunt: amplificatoarele magnetice, stabilizatoarele feromagnetice de tensiune, multiplicatoarele de frecvenţă etc.

Calculul circuitelor electrice liniare sau aproximate prin elemente liniare se efectuează de obicei pe baza descompunerii în serie *Fourier* a t.e.m. ale surselor independente de tensiune, intensităţilor curenţilor surselor independente de curent, tensiunilor aplicate periodice şi a aplicării teoremei superpoziţiei. Curenţii şi tensiunile periodice nesinusoidale se calculează ca sume ale intensităţilor curenţilor şi tensiunilor produse separat de fiecare (componentă) armonică a t.e.m. şi curenţilor surselor independente.

Pentru funcţiile periodice utilizate în tehnică, de regulă dezvoltarea în serie *Fourier* se poate aproxima prin primii (3 - 5 - 10) termeni ai seriei.

O altă metodă, aplicabilă şi circuitelor neliniare, constă în găsirea unei soluţii de regim tranzitoriu, prin rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale ale circuitului care în interval de o perioadă să corespundă regimului periodic studiat.

5.2. MĂRIMI PERIODICE

Orice mărime variabilă în timp ale cărei valori se repetă periodic, adică satisfac relația

$$y(t) = y(t+T) \tag{5.1}$$

pentru T constant şi orice valoare a timpului t, se numeşte **mărime periodică în timp**. Valoarea cea mai mică (pozitivă) a lui T, care satisface relația (5.1), se numeşte **perioada mărimii** (**perioada principală a mărimii**).

Valoarea medie pe un interval (t_1, t_2), a unei mărimi oarecare y variabilă în timp, periodică sau neperiodică, se notează cu $\langle y \rangle$ sau Y_{med} şi se defineşte prin relația

$$Y_{med} = \langle y \rangle \overset{\mathrm{d}}{=} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} y(t)\, \mathrm{d}t\,. \tag{5.2}$$

Pentru o funcție periodică y, valoarea medie pe o perioadă (egală cu valoarea medie pe un număr întreg oarecare de perioade) se defineşte prin relația

$$\langle y \rangle \overset{\mathrm{d}}{=} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} y(t)\, \mathrm{d}t\,. \tag{5.3}$$

valabilă pentru orice t_0. Se poate arăta uşor că valoarea integralei (5.3) nu depinde de t_0 şi deci se poate considera

$$\langle y \rangle \overset{\mathrm{d}}{=} \frac{1}{T} \int_{0}^{T} y(t) \mathrm{d}t\,. \tag{5.4}$$

Două mărimi periodice cu aceeaşi perioadă, y_1 şi y_2 se pot compara prin coeficientul de corelație, notat c_{12}, şi definit astfel:

$$c_{12} \overset{\mathrm{d}}{=} \frac{\langle y_1 y_2 \rangle}{\langle y_2^2 \rangle}\,, \tag{5.5}$$

care se mai notează:

$$c_{12} \overset{\mathrm{d}}{=} c_{\langle y_1 y_2 \rangle}\,. \tag{5.6}$$

Coeficientul de corelație este constanta cu care trebuie înmulțită mărimea y_2 pentru ca media (pe o perioadă) a pătratului diferenței $(y_1 - c_{12} y_2)$ să fie minimă. Anulând derivata acestei medii, în raport cu c_{12}, se obține

$$-\frac{\partial}{\partial c_{12}}\left[\frac{1}{T}\int_0^T (y_1 - c_{12} y_2)^2\, \mathrm{d}t\right] = \frac{1}{T}\int_0^T 2(y_1 - c_{12} y_2) y_2\, \mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_0^T y_1 y_2\, \mathrm{d}t - \frac{2c_{12}}{T}\int_0^T y_2^2\, \mathrm{d}t = 0, \tag{5.7}$$

de unde rezultă valoarea lui c_{12} dată de relația (5.5).

5.3. DEZVOLTAREA ÎN SERIE FOURIER

Orice funcție periodică $y(t)$ care satisface *condițiile lui Dirichlet* (perioada ei poate fi împărțită într-un număr finit de intervale, astfel încât în fiecare din ele funcția să fie continuă şi monotonă) se poate dezvolta (descompune) în serie *Fourier*, sub forma:

$$y(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_{km} \sin k\omega t + B_{km} \cos k\omega t \right), \tag{5.8}$$

unde ω este *pulsația fundamentală* corespunzătoare perioadei T a funcției y

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f, \tag{5.9}$$

iar f este *frecvența fundamentală*.

Celelalte mărimi care intervin în relația (5.8) sunt:

– *componenta continuă* egală cu valoarea medie a funcției y, pe o perioadă

$$A_0 = \langle y \rangle, \tag{5.10}$$

– amplitudinile armonicilor de ordinul k, în sinus şi, respectiv, în cosinus, egale cu coeficienții de corelație între funcția y şi $\sin k\omega t$, respectiv $\cos k\omega t$

$$A_{km} = c_{\langle y \sin k\omega t \rangle}; \quad B_{km} = c_{\langle y \cos k\omega t \rangle}. \tag{5.11}$$

Relația (5.10) este consecință a faptului că funcțiile $\sin k\omega t$ şi $\cos k\omega t$ au o valoare medie nulă pe o perioadă T. Relațiile (5.11) rezultă din (5.8) pe baza faptului că

$$c_{\langle \sin k\omega t \sin j\omega t \rangle} = c_{\langle \cos k\omega t \cos j\omega t \rangle} = \begin{cases} 0 \text{ pentru } k \neq j \\ 1 \text{ pentru } k = j \end{cases}; \quad c_{\langle \sin k\omega t \cos j\omega t \rangle} = c_{\langle \cos k\omega t \sin j\omega t \rangle} = 0. \tag{5.12}$$

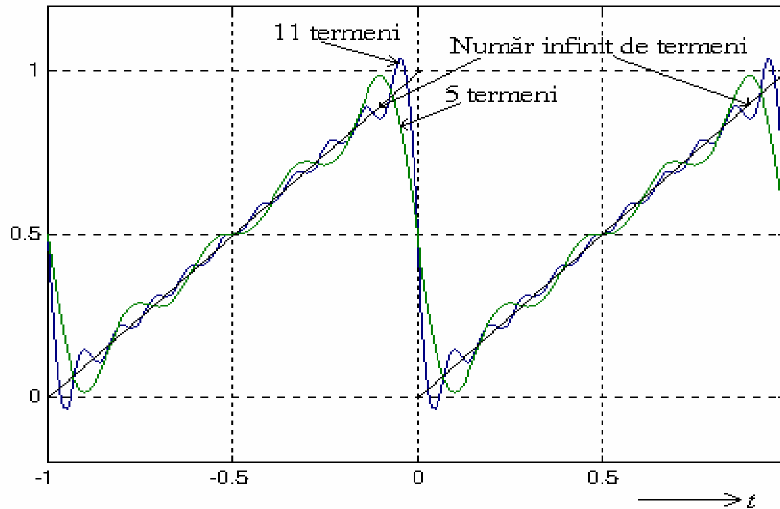
Conform relației de definiție a coeficientului de corelație (5.6) şi ținând seama de egalitățile

$$\left\langle \sin^2 k\omega t \right\rangle = \left\langle \cos^2 k\omega t \right\rangle = \frac{1}{2} \tag{5.13}$$

se obține forma uzuală a coeficienților amplitudinilor seriei Fourier:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T y(t)\,\mathrm{d}t, \quad B_{km} = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \cos k\omega t\,\mathrm{d}t, \; A_{km} = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \sin k\omega t\,\mathrm{d}t, \tag{5.14}$$

folosită practic la calculul acestor coeficienți.



$$y(t) = t / T, 0 \leq t \leq T$$

Fig.5.1. Efectul Gibbs.

În punctele de discontinuitate $t = t_0$ suma seriei *Fourier* este egală cu media aritmetică a celor două limite laterale ale funcției, [4]

$$\frac{1}{2}\left[y(t_0+0)+y(t_0-0)\right]. \tag{5.15}$$

În cazul în care seria *Fourier* se aproximează prin primii ei *n* termeni (toți termenii până la cei de pulsație $n\omega$) este util de ştiut că cele mai mari erori apar în vecinătatea punctelor de discontinuitate (fig. 5.1).

Aceasta constituie aşa numitul *efect Gibbs* care se explică prin faptul că variațiile rapide din vecinătatea discontinuității sunt date de termenii cu pulsație foarte mare care au fost neglijați. În tehnică este practic suficient să se considere primii trei până la şapte termeni.

5.3.1. Forme ale dezvoltării în serie Fourier utilizate în ingineria electrică

Termenii de aceeaşi frecvență (pulsație) din dezvoltarea (5.8) a seriei Fourier pot fi strânşi într-un singur termen obținându-se astfel *forma restrânsă a seriei Fourier*

$$y(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_{km}\cos(k\omega t+\alpha_k), \tag{5.16}$$

unde C_{km} se numeşte amplitudinea armonicei de ordinul *k* şi are expresia:

$$C_{km} = \sqrt{A_{km}^2 + B_{km}^2}\,, \tag{5.17}$$

iar:

$$\sin\alpha_k = -\frac{A_{km}}{\sqrt{A_{km}^2 + B_{km}^2}},\ \cos\alpha_k = \frac{B_{km}}{\sqrt{A_{km}^2 + B_{km}^2}}. \tag{5.18}$$

Evident, pe lângă această formă restrânsă în cosinus se poate realiza şi o formă restrânsă în sinus.

Fiecare armonică de ordin *k* din dezvoltarea (5.16) poate fi scrisă sub forma:

$$C_{km}\cos(k\omega t+\alpha_k) = \frac{C_{km}}{2}\cos(k\omega t+\alpha_k) + \frac{C_{km}}{2}\cos(-k\omega t-\alpha_k). \tag{5.19}$$

Dacă notăm:

$$\frac{C_{km}}{2} = D_{km} = D_{-km}\ \text{şi}\ -\alpha_k = \alpha_{-k} \tag{5.20}$$

atunci, din relația (5.16) se obține *forma restrânsă cu pulsații* (*frecvențe*) *negative a seriei Fourier*

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_{km}\cos(k\omega t+\alpha_k) \tag{5.21}$$

în care s-a considerat $D_{0m} = A_0$ şi $\alpha_0 = 0$.

Mărimile D_{km} se numesc *amplitudini spectrale* ale armonicilor de ordinul *k*.

Acest procedeu formal de introducere a pulsațiilor negative $(k\omega)$, cu $k < 0$, este util la stabilirea formelor complexe ale seriilor care se vor prezenta în cele ce urmează.

Ținând seama de reprezentarea în complex definită prin

$$\underline{C}_{km} \stackrel{\mathrm{d}}{=} C_{km}e^{j\alpha_k} \tag{5.22}$$

se obține *forma complexă restrânsă a seriei Fourier*

$$y(t) = \mathrm{Re}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \underline{C}_{km} e^{jk\omega t}\right\} \tag{5.23}$$

în care s-a notat $\underline{C}_{0m} = A_0$.

Dacă definim amplitudinea complexă a armonicilor din forma (5.21) a seriei, prin

$$\underline{D}_{km} \overset{\mathrm{d}}{=} D_{km} e^{j\alpha_k}, \tag{5.24}$$

atunci se obține:

$$y(t) = \mathrm{Re}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{D}_{km} e^{jk\omega t}\right\}. \tag{5.25}$$

Ca urmare a introducerii formale a pulsațiilor negative, prin definițiile (5.20), forma complexă a seriei Fourier cu pulsații negative se exprimă mai simplu decât (5.25) prin relația

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{D}_{km} e^{jk\omega t}. \tag{5.26}$$

deoarece această sumă este reală. Într-adevăr, din relația (5.24) rezultă:

$$\underline{D}_{-km} = D_{-km} e^{-j\alpha_k} = \left(D_{km} e^{j\alpha_k}\right)^* = \underline{D}_{km}^*. \tag{5.27}$$

În consecință suma (5.26) se poate pune sub forma:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{D}_{km} e^{jk\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{-1} \underline{D}_{km} e^{jk\omega t} + A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \underline{D}_{km} e^{jk\omega t} = A_0 + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \underline{D}_{km} e^{jk\omega t}\right)^* + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \underline{D}_{km} e^{jk\omega t}\right) \tag{5.28}$$

unde suma a două mărimi complexe conjugate este reală.

Avantajul formei complexe cu pulsații negative constă în faptul că unifică şi simplifică formula de determinare a coeficienților seriei. Utilizând relațiile (5.20) şi (5.17) şi (5.18) amplitudinea spectrală complexă se exprimă astfel:

$$\underline{D}_{km} = D_{km} \cos\alpha_k + jD_{km} \sin\alpha_k = \frac{1}{2}\left(B_{km} - jA_{km}\right). \tag{5.29}$$

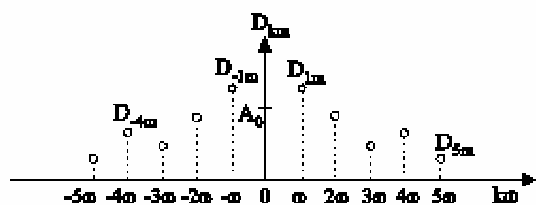
Substituind conform (5.14) rezultă *formula amplitudinii spectrale complexe*:

$$\underline{D}_{km} = \frac{1}{T}\int_0^T y(t) e^{-jk\omega t} \mathrm{d}t \tag{5.30}$$

valabilă pentru $k = 0, 1, 2, \ldots, \infty$. Într-o serie de aplicații este mai simplu de calculat amplitudinea complexă decât amplitudinea armonicilor în sinus sau cosinus.

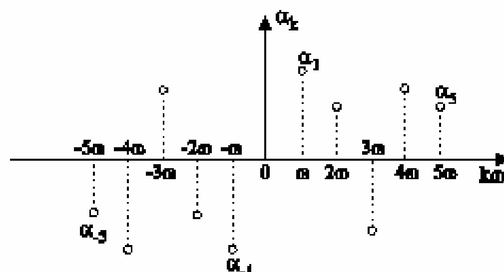
Variațiile amplitudinii şi fazei armonicilor seriei *Fourier*, în formă restrânsă cu pulsații negative corespunzătoare unei funcții $y(t)$, în funcție de pulsația acestor armonice se reprezintă grafic prin caracteristica *amplitudine spectrală-frecvență* (fig.5.2,a) şi, respectiv, prin caracteristica *fază-frecvență* (fig.5.2,b). Seria Fourier conține un spectru discret de frecvențe (pulsații), alcătuit numai din multiplii întregi ai frecvenței (pulsației) fundamentale.

În figurile 5.3,a şi, respectiv 5.3,b sunt reprezentate grafic, pentru comparaţie, caracteristicile amplitudine-frecvenţă, respectiv fază-frecvenţă ale formei restrânse a seriei Fourier corespunzătoare aceleiaşi funcţii periodice $y(t)$.



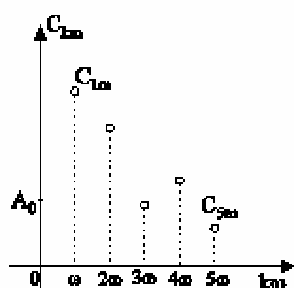
(a)

Fig. 5.2,a. Caracteristica amplitudine - pulsaţie.



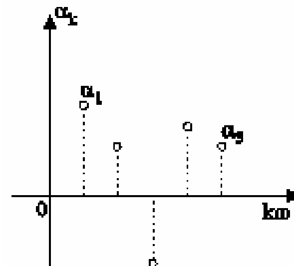
(b)

Fig. 5.2,b. Caracteristica fază - pulsaţie.



(a)

Fig. 5.3,a. Caracteristica amplitudine – pulsaţie a formei restrânse a serie Fourier.



(b)

Fig. 5.3,b. Caracteristica fază – pulsaţie a formei restrânse a serie Fourier.

5.3.1.1. Funcţii periodice particulare. Dacă în raport cu punctul situat la mijlocul perioadei (fig. 5.4), funcţia este simetrică

$$y(t) = y\left(t + \frac{T}{2}\right), \text{pentru } \forall \text{ t}, \tag{5.31}$$

introducând în relaţia (5.31) expresiile (5.8) şi (5.16) ale dezvoltării în serie Fourier, se obţin următoarele valori pentru o parte din coeficienţii seriei:

$$A_{m,2k+1} = 0; \quad B_{m,2k+1} = 0; \quad C_{m,2k+1} = 0; \quad k = 0,1,2,... \tag{5.32}$$

Prin urmare, funcţia simetrică (5.31) are următoarea dezvoltare în serie:

$$y(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_{m,2k} \sin 2k\omega t + B_{m,2k} \cos 2k\omega t\right) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_{m,2k} \cos\left(2k\omega t + \alpha_{2k}\right). \tag{5.33}$$

Deoarece seria (5.33) conţine numai armonici de ordin par, se numeşte *funcţie pară*.

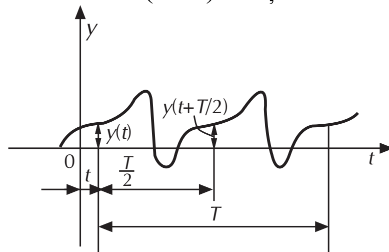


Fig. 5.4. Funcţie periodică simetrică în raport cu punctul situat la mijlocul perioadei.

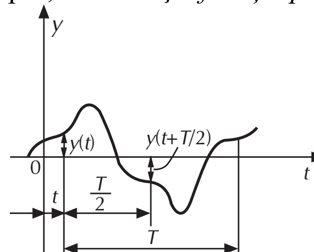


Fig. 5.5. Funcţie periodică antisimetrică (alternativ simetrică) în raport cu punctul situat la mijlocul perioadei.

În cazul în care în raport cu punctul situat la mijlocul perioadei (fig.5.5), funcția este antisimetrică (sau alternativ simetrică)

$$y(t) = -y\left(t + \frac{T}{2}\right), \text{pentru } \forall \text{ t}, \tag{5.34}$$

introducând în relația (5.34) expresiile (5.8) şi (5.16), se obține pentru o parte din coeficienți valorile

$$A_0 = 0; \quad A_{m,2k} = B_{m,2k} = C_{m,2k} = 0; \quad k = 1,2,... \tag{5.35}$$

În consecință, funcția antisimetrică (5.34) are următoarea dezvoltare în serie Fourier:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[A_{m,2k+1}\, sin(2k+1)\omega t + B_{m,2k+1}(2k+1)\omega t\right] = \sum_{k=1}^{\infty} C_{m,2k+1}\, cos\left[(2k+1)\omega t + \alpha_{2k+1}\right], \tag{5.36}$$

care are numai armonici de ordin impar şi se numeşte *funcție impar*ă. Tensiunile electromotoare ale generatoarelor sunt funcții antisimetrice în raport cu mijlocul perioadei, datorită polilor nord şi sud care se succed alternativ.

Dacă funcția periodică $y(t)$ satisface relația

$$y(t) = y(T - t), \text{pentru } \forall t, \tag{5.37}$$

un calcul analog arată că funcția conține numai armonici în cosinus (fig.5.6)

$$y(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_{km} \cos k\omega t = Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} Y_k \sin\left(k\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \tag{5.38}$$

unde: $Y_0 = A_0$ şi $Y_k = \dfrac{B_{km}}{\sqrt{2}}$.

În cazul în care funcția periodică satisface relația

$$y(t) = -y(T - t), \text{pentru } \forall t, \tag{5.39}$$

seria Fourier a acestei funcții are expresia

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \sin k\omega t = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} Y_k \sin k\omega t, \tag{5.40}$$

conținând numai armonici în sinus (fig.5.7).

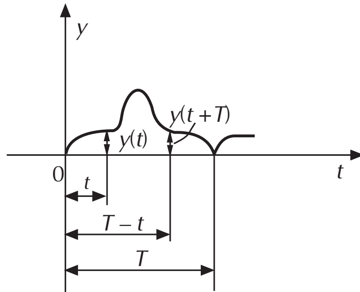


Fig. 5.6. Funcția periodică satisface relația $y(t) = y(T - t)$, pentru $\forall t$.

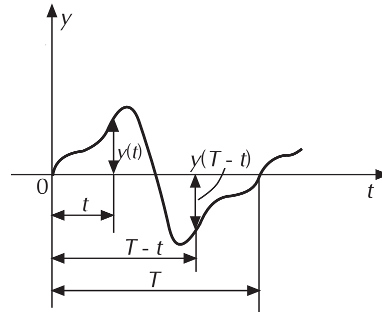


Fig. 5.7. Funcția periodică satisface relația $y(t) = -y(T - t)$, pentru $\forall t$.

Dacă funcția periodică $y(t)$ satisface condițiile impuse în origine pentru a putea fi dezvoltată în serie Fourier, atunci dezvoltarea integralei este egală cu integrala dezvoltării. Dezvoltarea în serie Fourier a derivatei unei funcții periodice $y(t)$ nu este totdeauna egală cu derivata dezvoltării, chiar dacă funcția este derivabilă şi seria derivatelor este uniform convergentă.

Funcția periodică crenel, $y_c(t)$, (fig. 5.8) are următoarea expresie analitică:

$$y_c(t)=\begin{cases} Y_0, & 0 \le t < T/2; \\ -Y_0, & T/2 \le t < T. \end{cases} \tag{5.41}$$

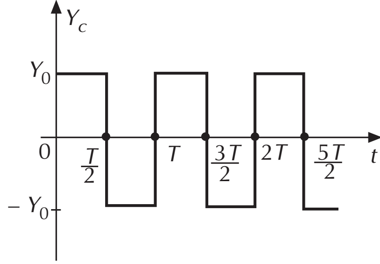


Fig. 5.8. Funcția periodică crenel.

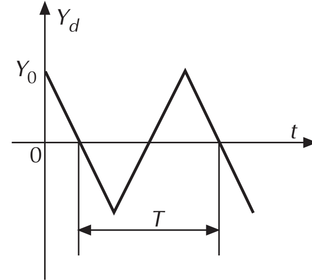


Fig. 5.9. Funcția periodică dinte de ferăstrău..

Examinând graficul (fig. 5.8), rezultă că funcția $y(t)$ verifică relațiile (5.39) şi (5.40)

$$y_c(t)=-y_c(t+T/2)=-y_c(T-t), \tag{5.42}$$

prin urmare este impară şi conține numai armonici în sinus. Deci:

$$A_0=0;\;\; B_{km}=0;\;\; A_{2km}=0;\;\; Y_{2k}=0;\;\; k=1,2,... \tag{5.43}$$

Coeficienții $A_{2k+1,m}$ se calculează cu relația (5.15) astfel:

$$A_{2k+1,m}=\frac{2}{T}\int_0^T y_c(t)\sin(2k+1)\omega t\,\mathrm{d}t=\frac{4Y_0}{(2k+1)\pi}, \tag{5.44}$$

şi, în consecință dezvoltarea în serie Fourier a funcției este

$$y_c(t)=\frac{4Y_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\omega t}{2k+1}=\frac{4Y_0}{\pi}\left[\frac{\sin\omega t}{1}+\frac{\sin 3\omega t}{3}+...+\frac{\sin(2k+1)\omega t}{2k+1}+...\right]. \tag{5.45}$$

Funcția dinte de ferăstrău, $y_d(t)$, se defineşte (fig.5.9) analitic astfel:

$$y_d(t)=\begin{cases} -\dfrac{4D_0}{T}\left(t-\dfrac{T}{4}\right), & 0 \le \mathrm{t} < \dfrac{\mathrm{T}}{2}, \\ \dfrac{4D_0}{T}\left(t-\dfrac{3T}{4}\right), & \dfrac{\mathrm{T}}{2} \le \mathrm{t} < T. \end{cases} \tag{5.46}$$

Examinând graficul (fig.5.9) rezultă că funcția $y_d(t)$ satisface relațiile (5.34) şi (5.37)

$$y_d(t)=-y_d\left(t+\frac{T}{2}\right)=y_d(T-t), \tag{5.47}$$

ceea ce arată că este impară şi conține numai armonici în cosinus, adică

$$A_0=Y_0=0;\;\; A_{km}=0;\;\; B_{2km}=0;\;\; Y_{2k}=0;\;\; k=1,2,... \tag{5.48}$$

Coeficienții $B_{2k+1,m}$ au expresiile

$$A_{2k+1,m}=\frac{2}{T}\int_0^T y_d(t)\cos(2k+1)\omega t\mathrm{d}t=-\frac{8D_0}{(2k+1)^2\pi^2} \tag{5.49}$$

şi dezvoltarea în serie Fourier a funcţiei $y_d(t)$ este

$$y_d(t)=-\frac{8D_0}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\omega t}{(2k+1)^2}=-\frac{8D_0}{\pi^2}\left[\frac{\cos\omega t}{1^2}+\frac{\cos 3\omega t}{3^2}+\ldots\frac{\cos(2k+1)\omega t}{(2k+1)^2}+\ldots\right]. \tag{5.50}$$

Integrând dezvoltarea în serie Fourier a funcţiei $y_c(t)$ (5.45) şi eliminând constanta de integrare, rezultă:

$$\int y_c(t)\mathrm{d}t=-\frac{4Y_0}{\omega\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\omega t}{(2k+1)^2}, \tag{5.51}$$

identicã cu dezvoltarea în serie Fourier a funcţiei $y_d(t)$ în care se considerã

$$D_0=\frac{\pi Y_0}{2\omega}=\frac{Y_0T}{4}. \tag{5.52}$$

5.3.2. Calculul armonicilor unei funcţii periodice *y*(*t*) prin metoda derivărilor succesive

Dacă funcţia periodică $y(t)$ are o derivată $y'(t)$ mărginită şi integrabilă, atunci seria Fourier a acesteia se obţine derivând termen cu termen seria Fourier a lui $y(t)$.

Dacă se notează seria Fourier a derivatei de ordinul j a lui $y(t)$ prin:

$$\frac{\mathrm{d}^j y}{\mathrm{d}t^j}\overset{\mathrm{d}}{=}A_0^{(j)}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_{km}^{(j)}\sin k\omega t+B_{km}^{(j)}\cos k\omega t\right) \tag{5.53}$$

rezultă:

$$\begin{cases}A_{km}^{(2j+1)}=(k\omega)^{2j+1}(-1)^{j+1}B_{km}\\ B_{km}^{(2j+1)}=(k\omega)^{2j+1}(-1)^{j}A_{km}\end{cases} \tag{5.54}$$

şi

$$\begin{cases}A_{km}^{(2j)}=(k\omega)^{2j}(-1)^{j}A_{km}\\ B_{km}^{(2j)}=(k\omega)^{2j}(-1)^{j}B_{km}\ .\\ A_0^{(j)}=0\end{cases} \tag{5.55}$$

Aceste relaţii simplifică calculul coeficienţilor A_{km} şi B_{km} dacă se pot calcula mai uşor coeficienţii seriei Fourier a derivatei funcţiei. Metoda devine expeditivă în cazul în care funcţia are derivatele de ordin până la $h-2$ continue, derivata de ordinul $h-1$ cu discontinuităţi finite, iar derivata de ordinul h este o sumă de impulsuri Dirac. Astfel, dacă în interval de o perioadă derivata are un număr de m impulsuri Dirac de valoare D_p

$$\frac{\mathrm{d}^h y}{\mathrm{d}t^h}=\sum_{p=1}^{m}D_p\delta(t-t_p), \tag{5.56}$$

din relaţiile (5.14) rezultă:

$$\begin{cases} A_{km}^{(h)} = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T \sum_{p=1}^{m} D_p \delta\left(t - t_p\right) \sin k\omega t \, \mathrm{d}t = \dfrac{2}{T}\sum_{p=1}^{m} D_p \sin k\omega t_p \\ B_{km}^{(h)} = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T \sum_{p=1}^{m} D_p \delta\left(t - t_p\right) \cos k\omega t \, \mathrm{d}t = \dfrac{2}{T}\sum_{p=1}^{m} D_p \cos k\omega t_p \end{cases} \tag{5.57}$$

deoarece se ştie că integrala fiecărui impuls Dirac satisface, prin definiţie, relaţiile:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta\left(t - t_p\right) f(t) \, \mathrm{d}t = \begin{cases} f\left(t_p\right), \text{dacă } t_p \in \left[t_1, t_2\right] \\ 0, \quad \text{dacă } t_p \notin \left[t_1, t_2\right] \end{cases}. \tag{5.58}$$

În cazul în care h este par, $h = 2g$, rezultă:

$$A_{km} = \frac{(-1)^g}{(k\omega)^{2g}} A_{km}^{(2g)}; \quad B_{km} = \frac{(-1)^g}{(k\omega)^{2g}} B_{km}^{(2g)}. \tag{5.59}$$

Exemplul 5.1: Dezvoltarea în serie Fourier a unei funcţii periodice $y(t)$ corespunzătoare unui contur poligonal periodic cu v vârfuri (unghiuri de frângere) într-o perioadă (fig. 5.8). Prima derivată $y'(t)$ are pentru fiecare abscisă t_{v_j}, a unui vârf v_j o discontinuitate

$$\left(tg\,\alpha_{v_j+1} - tg\,\alpha_{v_j}\right)\gamma\left(t - t_{v_j}\right). \tag{5.60}$$

Derivata de ordinul doi $y''(t)$ are în fiecare punct t_{v_j} câte un impuls:

$$\left(tg\,\alpha_{v_j+1} - tg\,\alpha_{v_j}\right)\delta\left(t - t_{v_j}\right). \tag{5.61}$$

Se observă că valoarea fiecărui impuls este egală cu creşterea pantei în vârful respectiv:

$$D_{v_j} = tg\alpha_{v_j+1} - tg\alpha_{v_j}. \tag{5.62}$$

Coeficienţii dezvoltării în serie Fourier sunt daţi de relaţia (5.57) astfel:

$$A_{km} = -\frac{1}{(k\omega)^2} A_{km}^{(2)}; \; B_{km} = -\frac{1}{(k\omega)^2} B_{km}^{(2)}. \tag{5.63}$$

Este de remarcat faptul că alegerea originii trebuie să se facă în aşa fel încât în origine funcţia şi derivatele ei să fie continue.

Exemplul 5.2: Se consideră curba trapezoidală periodică $y(t)$ reprezentată în figura 5.9,a. Se observă că această curbă este o curbă alternativă simetrică impară şi că originea se poate alege astfel încât curba să devină simetrică şi faţă de origine. Prima derivată şi a doua sunt reprezentate grafic în figura 5.9,b, respectiv figura 5.9,c. Se constată că simetria faţă de axa absciselor se menţine şi pentru derivate.

Deci:

$$A_{km}^{(2)} = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} y''(t) \sin k\omega t \, \mathrm{d}t = \frac{8}{T}\left(-tg\,\alpha_1\right) \sin k\omega t_1 \tag{5.64}$$

Împărţind prin $(k\omega)^2$ şi schimbând semnul, relaţia (5.59) devine:

$$A_{km} = \frac{1}{(\omega k)^2}\frac{8}{T}\frac{Y_0}{t_1} \sin k\beta = \frac{4Y_0}{\pi\beta}\frac{\sin k\beta}{k^2} \tag{5.65}$$

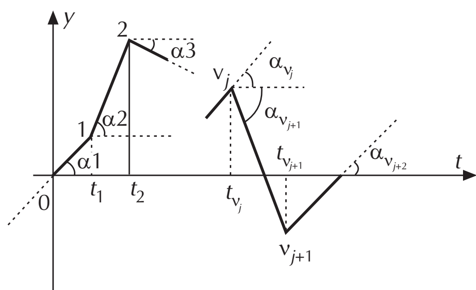


Fig. 5.8. Funcția periodică cu contur poligonal.

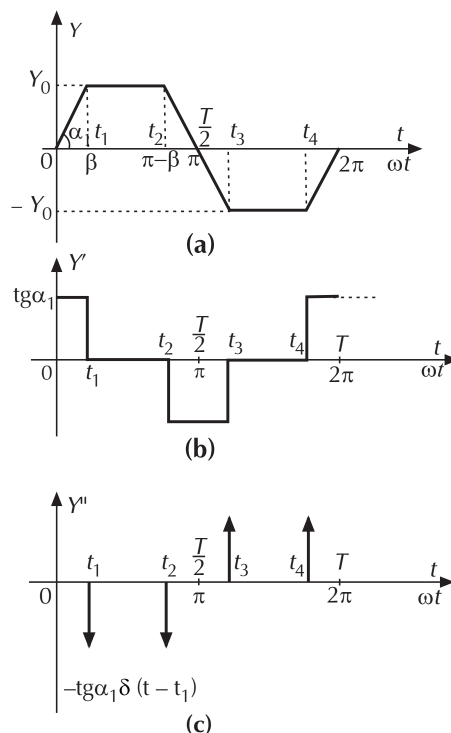


Fig. 5.9. Descrierea procesului de calcul pentru o funcție periodică trapezoidală.

cu $\omega t_1 = \beta$ şi $\text{tg}\alpha_1 = \dfrac{Y_0}{t_1}$.

$$y(t) = \frac{4Y_0}{\pi\beta}\left(sin\beta\, sin\,\omega t + \frac{sin\,3\beta}{9} sin\,3\omega t + \right.$$
$$\left. + \ldots + \frac{sin\,k\beta}{k^2} sin\,k\omega t + \ldots \right).$$

Dacă $\beta = \dfrac{\pi}{2}$ se obține curba $y_1(t)$ în formă de triunghiuri periodice cu următoarea dezvoltare în serie Fourier:

$$y_1(t) = \frac{8Y_0}{\pi^2}\left(\sin\omega t - \frac{1}{9}\sin 3\omega t + \frac{1}{25}\sin 5\omega t + \ldots \right). \tag{5.67}$$

Când se trece la limită $\beta = 0$, din relația (5.66) se obține curba $y_2(t)$ alcătuită din impulsuri dreptunghiulare care au dezvoltarea în serie Fourier

$$y_2(t) = \frac{4Y_0}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \ldots + \frac{1}{k}\sin k\omega t + \ldots \right). \tag{5.68}$$

Relațiilor (5.54) şi (5.55) le corespund o relație mai simplă referitoare la amplitudinile spectrale

$$\underline{D}_{km}^{(h)} = (jk\omega)^h \underline{D}_{km}, \tag{5.69}$$

iar relației (5.57) îi corespunde:

$$\underline{D}_{km}^{(h)} = \frac{1}{T}\sum_{p=1}^{m} D_p e^{-jk\omega t_p}\ . \tag{5.70}$$

Aceste relații arată că la o funcție periodică care trebuie derivată de h ori pentru a obține o discontinuitate sub formă de impuls, amplitudinea armonicei de ordinul k este invers proporțională cu k^h.

După un anumit exercițiu şi după înțelegerea corectă a metodei se pot scrie direct, pe baza relațiilor (5.64), coeficienții seriei Fourier pentru curbe periodice poligonale simetrice ori chiar curbe formate din arce de parabolă (at^p). Curbele sub formă complicată se pot

aproxima, cu o precizie practic suficientă, prin contururi poligonale convenabil alese, după care dezvoltarea în serie Fourier se face conform metodei expuse în acest paragraf.

5.4. PROPRIETĂȚI ALE MĂRIMILOR PERIODICE

a. Valoarea medie a produsului a două funcții periodice. Se consideră două funcții periodice nesinusoidale $u(t)$ şi $i(t)$ cu o aceeaşi perioadă. Dezvoltarea în serie Fourier, forma restrânsă, a acestor funcții este

$$u(t)=U_0+\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}U_k\sin(k\omega t+\alpha_k)=U_0+\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t) \tag{5.71}$$

şi

$$i(t)=I_0+\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}I_k\sin(k\omega t+\beta_k)=I_0+\sum_{k=1}^{\infty}i_k(t). \tag{5.72}$$

Produsul celor două funcții periodice este

$$u(t)i(t)=U_0I_0+\sum_{k=1}^{\infty}u_ki_k+U_0\sum_{k=1}^{\infty}i_k+I_0\sum_{k=1}^{\infty}u_k+\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_ki_n\ . \tag{5.73}$$

Valoarea medie pe o perioadă a produsului armonicilor $u_m(t)$ şi $i_n(t)$ este

$$\begin{aligned}\langle u_m(t)i_n(t)\rangle&=\frac{1}{T}\int_0^T u_mi_n\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T U_mI_n\sin(m\omega t+\alpha_m)\sin(n\omega t+\beta_m)\mathrm{d}t=\\&=\frac{U_mI_n}{T}\int_0^T\left[\cos((m-n)\omega t+\alpha_m-\beta_n)-\cos((m+n)\omega t+\alpha_m+\beta_n)\right]\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{5.74}$$

Dacă armonicele sunt de acelaşi ordin, $m = n$, valoarea medie a produsului lor este

$$\langle u_n(t)i_n(t)\rangle=U_nI_n\cos(\alpha_n-\beta_n) \tag{5.75}$$

şi este nulă pentru $m\neq n$.

Prin urmare, valoarea medie pe o perioadă a produsului celor două funcții periodice nesinusoidale are expresia:

$$\langle u(t)i(t)\rangle=U_0I_0+\sum_{k=1}^{\infty}U_kI_k\cos(\alpha_k-\beta_k). \tag{5.76}$$

Relația (5.76) exprimă faptul că: *valoarea medie pe o perioadă a produsului a două mărimi periodice nesinusoidale de o aceeaşi perioadă este egală cu produsul componentelor lor continue plus suma produselor valorilor efective ale armonicelor de acelaşi ordin prin cosinusul defazajului lor*.

b. Valoarea efectivă a unei mărimi periodice se defineşte prin relația

$$Y\overset{\mathrm{d}}{=}\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{\mathrm{T}}y^2(t)\mathrm{d}t}\ . \tag{5.77}$$

Înlocuind funcția $y(t)$ cu dezvoltarea sa în serie Fourier, rezultă:

$$Y^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \left[Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t)\right]\left[Y_0 + \sum_{j=1}^{\infty} y_j(t)\right]\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T Y_0^2\ \mathrm{d}t + Y_0\int_0^T\left(\sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) + \sum_{j=1}^{\infty} y_j(t)\right)\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} y_k(t) y_j(t)\mathrm{d}t = \tag{5.78}$$

$$= Y_0^2 + 2Y_0\sum_{k=1}^{\infty}\langle y_k\rangle + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\langle y_k y_j\rangle .$$

Ținând seamă că:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\langle y_k\rangle = 0;\quad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\langle y_k y_j\rangle = \sum_{k=1}^{\infty}\langle y_k^2\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k^2 \tag{5.79}$$

rezultă:

$$Y = \sqrt{Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 + ... + Y_k^2 + ...} = \sqrt{Y_0^2 + Y_1^2 + Y_d^2}\ , \tag{5.80}$$

unde s-a notat cu Y_d^2 reziduul deformant, egal cu valoarea efectivă a armonicilor superioare

$$Y_d \overset{\mathrm{d}}{=} \sqrt{Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2 + \ldots + Y_k^2 + \ldots}\ . \tag{5.81}$$

Valorile efective U şi I ale tensiunii $u(t)$ şi curentului $i(t)$ exprimate sub forma:

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}U_k \sin(k\omega t + \alpha_k);\quad i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}I_k \sin(k\omega t + \beta_k) \tag{5.82}$$

sunt

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_d^2};\ I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_d^2}\ , \tag{5.83}$$

în care s-au notat cu U_d şi I_d reziduurile deformante ale tensiunii, şi, respectiv curentului

$$U_d = \sqrt{U_2^2 + U_3^2 + ... + U_k^2 + ...};\ I_d = \sqrt{I_2^2 + I_3^2 + ... + I_k^2 + ...}\ . \tag{5.84}$$

Caracterizarea formei mărimilor variabile în timp periodic se face prin coeficienți (factori) definiți după cum urmează.

a. *Coeficientul* (*factorul*) *de vârf* (denumit şi coeficient de *amplitudine*)

$$k_v \overset{d}{=} \frac{Y_{max}}{Y}, \tag{5.85}$$

unde Y_{max} este valoarea absolută maximă (amplitudinea), iar Y este valoarea efectivă a funcției $y(t)$. Pentru o funcție sinusoidală $k_v = \sqrt{2}$.

b. C*oeficientul* (*factorul*) *de formă*

$$k_f \overset{\mathrm{d}}{=} \frac{Y}{Y_{med,r}}, \tag{5.86}$$

în care $Y_{med,r}$ este *valoarea medie redresată* a funcției $y(t)$ (valoarea medie pe o perioadă a modulului funcției)

$$Y_{med,r} \overset{\mathrm{d}}{=} \langle |y(t)| \rangle . \tag{5.87}$$

Pentru o funcție sinusoidală $k_f = 1,11$.

c. *Coeficientul de distorsiune*

$$k_d \overset{d}{=} \frac{\sqrt{Y^2 - Y_0^2 - Y_1^2}}{\sqrt{Y^2 - Y_0^2}}. \tag{5.88}$$

unde Y_0 şi Y_1 sunt valorile efective ale armonicilor de ordinul 0 şi 1. În electroenergetică o mărime se consideră sinusoidală dacă are un coeficient de distorsiune $k_d \leq 5\%$.

PE143/94 în conformitate cu normele CEI 1000-2-2, defineşte coeficientul de distorsiune al unei curbe nesinusoidale ca raportul, exprimat în procente, dintre reziduul deformant Y_d (valoarea efectivă corespunzătoare armonicilor superioare) şi valoarea efectivă a curbei fundamentale Y_1. Rezultă deci:

$$k_d = \frac{Y_d}{Y_1} \cdot 100 = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{N} Y_n^2}}{Y_1} \cdot 100 \ [\%] \tag{5.89}$$

Literatura de specialitate europeană de limbă engleză denumeşte coeficientul de distorsiune al tensiunii drept "*Total distortion factor*" şi îl notează cu *D*; în S.U.A. el se numeşte "*Total harmonic distortion*" şi se notează cu *THD* (literatura franceză notează coeficientul de distorsiune cu τ). Ca sinonime pentru *THD* apar "*harmonic factor - HF*" sau "*distortion factor - DF*". Tot standardele americane introduc noțiunea de "*total demand distortion*" sau *TDD* pentru coeficientul de distorsiune al curentului; în acest caz, la numitorul relației apare valoarea curentului absorbit în regimul cel mai solicitant I_{1max}.

Normele CEI introduc *coeficientul de distorsiune ponderat* al undei de tensiune care ia în considerare ponderea armonicilor individuale introduse de aplicația specifică. În cazul alimentării condensatoarelor cu o tensiune nesinusoidală (cazul cel mai defavorabil), expresia acestui coeficient este:

$$D_w = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{N} n^2 \cdot U_n^2}}{U_1} \tag{5.90}$$

unde:
- *n e*ste rangul armonicii;- U_n - valoarea maximă a armonicii n;- $N = 40$;
- U_1 - valoarea maximă a fundamentalei.

Mărimea D_w este proporțională cu valoarea efectivă a curentului prin condensatorul cuplat la o tensiune nesinusoidală; se poate arăta că pentru o suprasarcină de 30% (I_c = 1,3I_{nom}) coeficientul de distorsiune ponderat poate avea valoarea D_w = 0,83 în cazul alimentării la tensiune nominală sau D_w= 0,63 în cazul alimentării la 110% din tensiunea nominală a condensatorului.

d. *Factorul (coeficientul) armonic FA*

Factorul armonic al unei unde nesinusoidale se calculează cu relația:

$$FA = \sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{Y_n}{Y_1} \right)^2 \cdot \frac{1}{n}} \tag{5.91}$$

semnificația mărimilor fiind aceeaşi ca şi în relația (5.89).

Coeficienții definiți mai sus caracterizează anumite proprietăți ale mărimilor periodice, fără a caracteriza sub toate aspectele forma acestor mărimi. Faptul că în ei nu intervin defazajele dintre armonice poate conduce, printre altele, ca unor mărimi cu forme diferite să le corespundă aceleaşi valori ale coeficienților definiți mai sus.

Pentru caracterizarea mărimii şi formei unei funcții periodice $y(t)$ se folosesc şi următoarele mărimii:

$$\text{cantitatea} \overset{\text{d}}{=} \langle |y(t)| \rangle,\ \text{variatia} \overset{\text{d}}{=} \left\langle \left| \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \right| \right\rangle,\ \text{variabilitatea} \overset{\text{d}}{=} \left\langle \left| \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \right| \right\rangle. \tag{5.92}$$

Exemplul 5.3: Presupunem că valoarea instantanee a unei tensiuni are expresia

$$u(t) = 100 + 80 \sin \omega t + 50 \sin 2\omega t \text{ V}.$$

Valoarea efectivă a acestei tensiuni este:

$$U = \sqrt{100^2 + \left(\frac{80}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{50}{\sqrt{2}}\right)^2} = 120{,}208 \text{ V}.$$

Coeficientul de distorsiune k_d are valoarea

$$k_d = \frac{\sqrt{\left(\frac{50}{\sqrt{2}}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{80}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{50}{\sqrt{2}}\right)^2}} = 0{,}5299.$$

5.5. PUTERI ÎN REGIM PERIODIC NESINUSOIDAL

Fie dipolul liniar din figura 5.10 alimentat la o tensiune periodică nesinusoidală de forma

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{2} U_k \sin(k\omega t + \alpha_k). \tag{5.93}$$

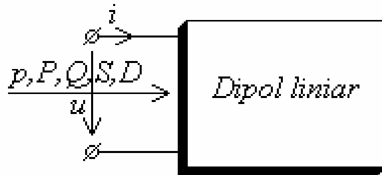


Fig. 5.10. Dipol liniar în regim periodic nesinusoidal.

Datorită liniarității dipolului intensitatea curentului are expresia

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{2} I_k \sin(k\omega t + \beta_k). \tag{5.94}$$

Puterea instantanee p la bornele dipolului (fig.5.10) se exprimă prin:

$$p \overset{\text{d}}{=} ui. \tag{5.95}$$

Puterea activă P la bornele acestui dipol liniar este definită, pentru regimul periodic nesinusoidal, prin relația:

$$P \overset{\text{d}}{=} \langle p \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \mathrm{d}t \tag{5.96}$$

şi ținând seama de variațiile (5.93) şi (5.94) ale tensiunii la borne şi, respectiv, curentului şi de relația (5.76), se obține:

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k, \tag{5.97}$$

în care U_0, I_0 sunt componentele continue, U_k, I_k valorile efective ale armonicilor de ordinul k ale tensiunii şi curentului, iar φ_k reprezintă defazajul dintre aceste armonici.

Deci, *puterea activă în regim periodic nesinusoidal este egală cu suma puterilor active corespunzătoare fiecărei armonici* (*inclusiv armonicii de ordinul zero*). Trebuie remarcat faptul că puterea diferită de zero corespunde numai armonicilor care apar atât în curba de variaţie a curentului, cât şi în cea a tensiunii.

Puterea reactivă Q în regim periodic nesinusoidal se defineşte prin analogie cu expresia puterii active şi este egală cu suma puterilor reactive corespunzătoare armonicilor:

$$Q \overset{d}{=} \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin \varphi_k \,. \tag{5.98}$$

Puterea aparentă S are aceeaşi definiţie ca şi în regim sinusoidal

$$S \overset{d}{=} UI \,, \tag{5.99}$$

unde U şi I sunt valorile efective ale tensiunii şi curentului la bornele dipolului liniar considerat (calculate cu relaţia (5.80)).

Puterea instantanee p şi puterea aparentă S se măsoară în volt-amperi (cu simbolul VA), puterea activă P în waţi (cu simbolul W) şi puterea reactivă Q în volt-amper-reactivi (cu simbolul var).

În analiza regimurilor periodice nesinusoidale se foloseşte şi o altă mărime numită *putere deformantă*

$$D \overset{d}{=} \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} \,. \tag{5.100}$$

Această mărime a fost introdusă de profesorului român *Constantin Budeanu*. Unitatea de măsură a puterii deformante este volt-amper-deformant şi se notează vad. Înlocuind în relaţia de definiţie (5.100) a puterii deformante expresiile S, P şi Q din (5.99), (5.98) şi (5.97), după câteva calcule simple, se obţine:

$$D = \sqrt{\sum_{\substack{1 \\ j<k}}^{\infty} \left[\left(U_j I_k - U_k I_j \right)^2 + 4 U_j U_k I_j I_k \sin^2 \frac{\varphi_j - \varphi_k}{2} \right]} \,. \tag{5.101}$$

Puterea deformantă se anulează dacă sunt satisfăcute condiţiile:

$$\frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2}{I_2} = \ldots = \frac{U_k}{I_k} = \ldots = const. \text{ şi } \varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_k = \ldots = const. \tag{5.102}$$

Factorul de putere k_P în regim periodic nesinusoidal se defineşte la fel ca în regim sinusoidal prin raportul dintre puterea activă P şi puterea aparentă S

$$k_P \overset{d}{=} \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + S^2}} \,, \tag{5.103}$$

şi poate fi subunitar chiar când puterea reactivă este nulă. Deci, anularea puterii reactive nu îmbunătăţeşte factorul de putere la valoarea unu ca în regim sinusoidal. Se poate întâmpla chiar, ca prin reducerea puterii reactive să crească şi mai mult puterea deformantă şi în consecinţă factorul de putere k_P rezultă înrăutăţit. Prin urmare, *în regim periodic nesinusoidal introducerea de condensatoare poate înrăutăţi factorul de putere*.

Puterea complementară P_c se defineşte prin relaţia

$$P_c \overset{d}{=} \sqrt{Q^2 + D^2} \,. \tag{5.104}$$

Factorul de putere k_P se poate exprima şi în funcţie de puterea complementară P_c cu relaţia:

$$k_P = \frac{P}{\sqrt{P^2 + P_c^2}}. \tag{5.104}$$

Se observă că pentru îmbunătăţirea factorului de putere este necesară reducerea puterii complementare. În regim sinusoidal puterea complementară este identică cu puterea reactivă.

5.6. ANALIZA CIRCUITELOR ELECTRICE LINIARE PE BAZA DEZVOLTĂRII ÎN SERIE FOURIER

La circuitele electrice liniare fiind valabilă teorema superpoziţiei, descompunerea în serie Fourier rezolvă problema analizei circuitelor respective în regim periodic nesinusoidal. Algoritmul de analiză a circuitelor electrice liniare în regim periodic nesinusoidal comportă următorii paşii.

1. Se descompun în serie Fourier mărimile de excitaţie (intrare) ale circuitului, t.e.m. ale surselor independente de tensiune, curenţii surselor independente de curent şi eventualele tensiuni cunoscute aplicate la borne, reţinându-se primele N armonice ($N \leq 10$). Evident, aceste mărimi satisfac condiţiile Dirichlet.

2. Se consideră numai componentele continue ale mărimilor de excitaţie obţinându-se astfel un circuit de curent continuu în care bobinele ideale sunt scurtcircuitate, iar condensatoarele sunt întrerupte (lăsate în gol). Utilizând, în funcţie de structura circuitului de c.c. obţinut, o metodă adecvată de analiză a circuitelor electrice de c.c. (vezi cap. 2) se obţin componentele continue ale curenţilor şi tensiunilor laturilor I_{p0} şi U_{p0}, $p = \overline{1, l}$.

3. Pentru fiecare armonică de ordin k, $k = \overline{1, N}$, a mărimilor de excitaţie se analizează, cu cea mai eficientă metodă de analiză a circuitelor electrice liniare în regim sinusoidal (vezi cap. 3), circuitele de c.a. astfel obţinute (în care reactanţele bobinelor şi condensatoarelor au valorile $X_{L_p,k} = k\omega L_p$ şi, respectiv, $X_{C_p,k} = \dfrac{1}{k\omega C_p}$). În acest mod se obţin, pentru fiecare armonică de ordin k, valorile complexe ale curenţilor şi tensiunilor laturilor $\underline{I}_{p,k}$ şi $\underline{U}_{p,k}$, $p = \overline{1, l}$ şi apoi valorile lor instantanee $i_{p,k} = \sqrt{2} I_{p,k} \sin\left(k\omega t + \alpha_{i_{p,k}}\right)$.şş $u_{p,k} = \sqrt{2} U_{p,k} \sin\left(k\omega t + \alpha_{u_{p,k}}\right)$, $p = \overline{1, l}$.

4. Utilizând teorema superpoziţiei se determină valorile instantanee ale curenţilor şi tensiunilor laturilor circuitului

$$\begin{aligned} i_p(t) &= I_{p0} + \sum_{k=0}^{N} \sqrt{2} I_{p.k}\, sin\left(k\omega t + \alpha_{i_{p.k}}\right); \\ u_p(t) &= U_{p0} + + \sum_{k=0}^{N} \sqrt{2} U_{p,k}\, sin\left(k\omega t + \alpha_{u_{p,k}}\right), \ p = \overline{1, l}. \end{aligned} \tag{5.106}$$

5. Se verifică bilanțul puterilor active şi reactive. Puterea activă dată de surse se calculează cu relația:

$$P_g = \sum_{p=1}^{n_e}\left(E_{p0}I_{po} + \sum_{k=1}^{N}E_{p,k}I_{p,k}\cos\varphi_{p,k}\right) + \sum_{p=1}^{n_j}\left(-U_{j_{p0}}J_{po} - \sum_{k=1}^{N}U_{j_{p.k}}J_{p,k}\cos\varphi_{j_{p,k}}\right) +$$
$$+ \sum_{p=1}^{n_{e_c}}\left(E_{cp0}I_{cpo} + \sum_{k=1}^{N}E_{cp,k}I_{cp,k}\cos\varphi_{cp,k}\right) + \sum_{p=1}^{n_{j_c}}\left(-U_{j_{cp0}}J_{cpo} - \sum_{k=1}^{N}U_{j_{cp.k}}J_{cp,k}\cos\varphi_{j_{cp,k}}\right), \quad (5.107)$$

unde, de exemplu, $\varphi_{p.k}\left(\varphi_{cp,k}\right)$ este defazajul curentului sursei de tensiune independente (comandate) din latura l_p față de t.e.m. a aceleaşi laturii corespunzătoare armonicii de ordinul k.

Puterea activă consumată în rezistoarele circuitului se determină cu următoarea relație:

$$P_R = \sum_{p=1}^{l}R_p I_p^2 = \sum_{p=1}^{l}R_p\left(I_{p0}^2 + I_{p,1}^2 + ... + I_{p,N}^2\right). \quad (5.108)$$

Puterea reactivă cedată de sursele circuitului se determină cu relația:

$$Q_g = \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{p=1}^{n_e}E_{p,k}I_{p,k}\sin\varphi_{p,k} - \sum_{p=1}^{n_j}U_{j_{p.k}}J_{p,k}\sin\varphi_{j_{p,k}} + \right.$$
$$\left. + \sum_{p=1}^{n_{e_c}}E_{cp,k}I_{cp,k}\sin\varphi_{cp,k} - \sum_{p=1}^{n_{j_c}}U_{j_{cp.k}}J_{cp,k}\sin\varphi_{j_{cp,k}}\right), \quad (5.109)$$

iar puterea reactivă consumată în elementele reactive de circuit are expresia:

$$Q_X = \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{p=1}^{l}\left(k\omega L_p - \frac{1}{k\omega C_p}\right)I_{p,k}^2 + \sum_{P<}\sum_{q}2k\omega L_{pq}I_{p,k}I_{q,k}\cos\left(\alpha_{i_{p,k}} - \alpha_{i_{q,k}}\right)\right). \quad (5.110)$$

Bilanțul puterilor cere să fie satisfăcute identitățile

$$P_g \equiv P_R \text{ şi } Q_g \equiv Q_X. \quad (5.111)$$

Exemplul 5.4: Fie circuitul electric reprezentat în figura 5.11,a, care are următoarele valori ale parametrilor:

$R_1 = 3\,\text{k}\Omega, L_2 = 4\,\text{mH}, C_2 = 250\,\text{pF}, L_3 = 3\,\text{mH}, L_4 = 2\,\text{mH}, C_4 = 125\,\text{pF}, R_5 = 3\,\text{k}\Omega.$

T.e.m. e_1 are expresia

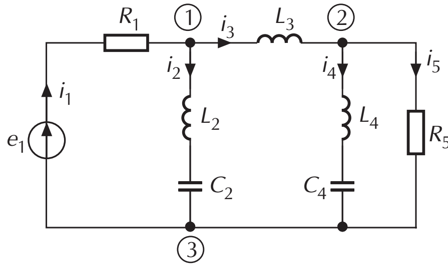
$$e_1(t) = 12 + \sqrt{2}12\sin\left(10^6 t + \frac{\pi}{4}\right) + 12\sin\left(2\cdot 10^6 t + \frac{\pi}{2}\right)\ \text{V}$$

Se cer: a) să se calculeze valorile instantanee ale curenților laturilor circuitului; b) să se verifice bilanțul puterilor active şi reactive; c) să se determine puterile activă, reactivă, aparentă şi deformantă de la bornele sursei ideale independente de tensiune.

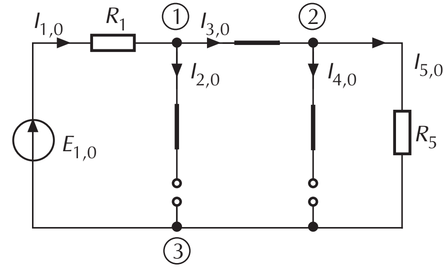
a) În figura 5.11,b este reprezentată schema echivalentă în curent continuu a circuitului.

Valorile componentelor continue ale curenților sunt:

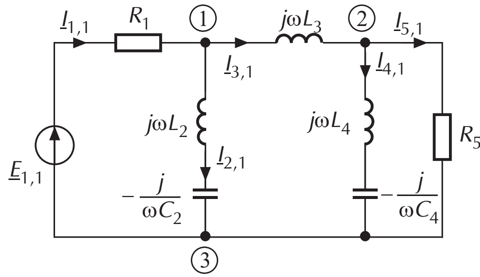
$$I_{1,0}=I_{3,0}=I_{5,0}=\frac{E_{1,0}}{R_1+R_5}=\frac{12}{3+3}=2\,\text{mA};\; I_{2,0}=I_{4,0}=0\,\text{mA}.$$



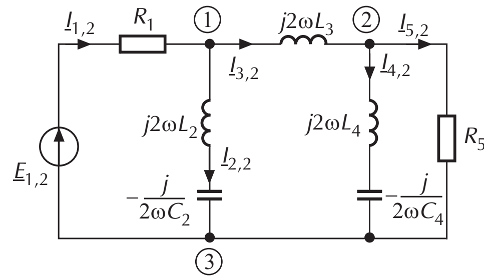
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 5.11. Schemele circuitului analizat.

Pentru armonica de ordinul 1, k = 1, schema echivalentă în complex a circuitului este desenată în figura 5.11,c. Impedanța complexă echivalentă $\underline{Z}_{45e,1}$ a laturilor l_4 şi l_5 conectate în paralel are expresia

$$\underline{Z}_{45e,1}=\frac{R_5\cdot j\left(\omega L_4-\dfrac{1}{\omega C_4}\right)}{R_5+j\left(\omega L_4-\dfrac{1}{\omega C_4}\right)}=\frac{3\cdot j(2-8)}{3+j(2-8)}=-\frac{6j}{1-2j}\,\text{k}\Omega\,,$$

iar impedanța complexă echivalentă în raport cu bornele sursei ideale independente de tensiune e_1, corespunzătoare armonicii fundamentale, are expresia

$$\underline{Z}_{e,1}=R_1+\frac{\left(j\omega L_3+\underline{Z}_{45e,1}\right)\left(j\omega L_2-\dfrac{j}{\omega L_2}\right)}{j\omega L_3+\underline{Z}_{45e,1}+j\omega L_2-\dfrac{j}{\omega L_2}}=3+\frac{\left(3j-\dfrac{6j}{1-2j}\right)(4j-4j)}{3j-\dfrac{6j}{1-2j}+4j-4j}=3\,\text{k}\Omega\,.$$

Acelaşi rezultat se obținea direct, dacă se observă că latura l_2 este la rezonanță pe armonica fundamentală.

Prin urmarea, valoarea complexă a intensității curentului din latura 1, corespunzătoare fundamentalei este

$$\underline{I}_{1,1}=\frac{\underline{E}_{1,1}}{\underline{Z}_{e,1}}=\frac{12e^{j\pi/4}}{3}=4e^{j\pi/4} \quad \Rightarrow \quad i_{1,1}(t)=\sqrt{2}4\sin\left(10^6 t+\frac{\pi}{4}\right)\text{mA} .$$

Ceilalți curenți au expresiile

$$\underline{I}_{2,1}=\underline{I}_{1,1}=4e^{j\pi/4} \quad \Rightarrow \quad i_{2,1}(t)=\sqrt{2}4\sin\left(10^6 t+\pi/4\right)\text{mA} ;$$

$$\underline{I}_{3,1}=\underline{I}_{4,1}=\underline{I}_{5,1}=0 \quad \Rightarrow \quad i_{3,1}(t)=i_{4,1}(t)=i_{5,1}(t)=0\ \text{mA} .$$

Pentru armonica de ordinul doi, k = 2, schema echivalentă în complex a circuitului este desenată în figura 5.11, d. Impedanța complexă echivalentă $\underline{Z}_{45e,2}$ a laturilor l_4 şi l_5 conectate în paralel are expresia

$$\underline{Z}_{45e,2}=\frac{R_5\cdot j\left(2\omega L_4-\frac{1}{2\omega C_4}\right)}{R_5+j\left(2\omega L_4-\frac{1}{2\omega C_4}\right)}=\frac{3\cdot j(4-4)}{3+j(4-4)}=0 ,$$

iar impedanța complexă echivalentă în raport cu bornele sursei ideale independente de tensiune e_1, corespunzătoare armonicii de ordinul doi este

$$\underline{Z}_{e,2}=R_1+\frac{\left(j2\omega L_3+\underline{Z}_{45e,2}\right)\left(j2\omega L_2-\frac{j}{2\omega L_2}\right)}{j2\omega L_3+\underline{Z}_{45e,2}+j2\omega L_2-\frac{j}{2\omega L_2}}=3+\frac{6j(8j-2j)}{6j+8j-2j}=3+3j \quad .$$

Acelaşi rezultat se obținea direct, dacă se observa că latura l_4 este la rezonanță pe armonica a doua.

Prin urmarea, valoarea complexă a intensității curentului din latura l_1, corespunzătoare armonicii de ordinul doi este

$$\underline{I}_{1,2}=\frac{\underline{E}_{1,2}}{\underline{Z}_{e,2}}=\frac{6\sqrt{2}e^{j\pi/2}}{3\sqrt{2}e^{j\pi-4}}=2e^{j\pi/4} \quad \Rightarrow \quad i_{1,2}(t)=\sqrt{2}2\sin\left(2\cdot 10^6 t+\frac{\pi}{4}\right)\text{mA} .$$

Conform regulii divizorului de curent rezultă:

$$\underline{I}_{2,2}=\underline{I}_{1,2}\frac{j2\omega L_3+\underline{Z}_{45e,2}}{j2\omega L_3+\underline{Z}_{45e,2}+j2\omega L_2-\frac{j}{2\omega C_2}}=2e^{j\pi/4}\frac{6j}{6j+8j-2j}=\frac{2e^{j\pi/4}}{2}=1e^{j\pi/4}\ \text{mA} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i_{2,2}=\sqrt{2}\sin\left(2\cdot 10^6 t+\pi/4\right)\text{mA}.$$

Din prima teoremă a lui Kirchhoff în complex aplicată în nodul 1 (fig.5.11,d), se obține:

$$\underline{I}_{3,2}=\underline{I}_{1,2}-\underline{I}_{2,2}=1\cdot e^{j\pi/4}\ \text{mA} \quad \Rightarrow \quad i_{3,2}(t)=\sqrt{2}\sin\left(2\cdot 10^6 t+\pi/4\right)\text{mA} .$$

Deoarece în latura l_4 este rezonanță pe armonica doi, avem

$$\underline{I}_{5,2} = 0\text{ mA} \Rightarrow \mathrm{i}_{5,2}(t) = 0\text{ mA};\ \underline{I}_{4,2} = \underline{I}_{3,2} = 1\cdot e^{j\pi/4}\text{ mA}$$
$$\Rightarrow i_{4,2}(t) = \sqrt{2}\sin\left(2\cdot 10^6 t + \pi/4\right)\text{mA}$$

Aplicând teorema superpoziției se obțin curenții laturilor:

$$i_1(t) = I_{1,0} + i_{1,1}(t) + i_{1,2}(t) = 2 + \sqrt{2}4\sin\left(10^6 t + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}2\sin\left(2\cdot 10^6 t + \frac{\pi}{4}\right)\text{mA};$$

$$i_2(t) = I_{2,0} + i_{2,1}(t) + i_{2,2}(t) = \sqrt{2}4\sin\left(10^6 t + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\sin\left(2\cdot 10^6 t + \frac{\pi}{4}\right)\text{mA};$$

$$i_3(t) = I_{3,0} + i_{3,1}(t) + i_{3,2}(t) = 2 + \sqrt{2}\sin\left(2\cdot 10^6 t + \frac{\pi}{4}\right)\text{mA};$$

$$i_4(t) = I_{4,0} + i_{4,1}(t) + i_{4,2}(t) = \sqrt{2}\sin\left(2\cdot 10^6 t + \frac{\pi}{4}\right)\text{mA};$$

$$i_5(t) = I_{5,0} + i_{5,1}(t) + i_{51,2}(t) = 2\text{ mA}.$$

b) Puterea activă cedată de sursa independentă de tensiune e_1 este

$$P_g = E_{1,0}I_{1,0} + E_{1,1}I_{1,1}\cos\varphi_{1,1} + E_{1,2}I_{1,2}\cos\varphi_{1,2} = 12\cdot 2 + 12\cdot 4\cdot 1 + 6\sqrt{2}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 84\text{ mW},$$

iar puterea reactivă cedată de această sursă are expresia

$$Q_g = E_{1,1}I_{1,1}\sin\varphi_{1,1} + E_{1,2}I_{1,2}\sin\varphi_{1,2} = 12\cdot 4\cdot 0 + 6\sqrt{2}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 12\text{ mvar}.$$

Puterea activă consumată în rezistoarele circuitului este

$$P_R = R_1 I_1^2 + R_5 I_5^2 = 3(4+16+4) + 3(4+0+0) = 72 + 12 = 84\text{ mW},$$

iar puterea reactivă consumată de elementele reactive ale circuitului are expresia

$$Q_X = \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)I_{2,1}^2 + \omega L_3 I_{3,1}^2 + \left(\omega L_4 - \frac{1}{\omega C_4}\right)I_{4,1}^2 + \left(2\omega L_2 - \frac{1}{2\omega C_2}\right)I_{2,2}^2 +$$
$$+ 2\omega L_3 I_{3,2}^2 + \left(2\omega L_4 - \frac{1}{2\omega C_4}\right)I_{4,2}^2 = 0\cdot 16 + 3\cdot 0 + (2-8)\cdot 0 + 6\cdot 1 + 6\cdot 1 + 0\cdot 1 = 12\text{ mvar}.$$

Deci: $P_g = P_R = 84\text{ mW}$ și $Q_g = Q_X = 12m\text{ var}$.

c) $P_{e_1} = P_g = 84\text{ mW};\ Q_{e_1} = Q_g = 12\text{ mvar};$

$$S_{e_1} = E_1 I_1 = \sqrt{12^2 + 12^2 + 2\cdot 6^2}\cdot\sqrt{2^2 + 4^2 + 2^2} = 24\sqrt{15}\text{ mVA};$$
$$D_{e_1} = \sqrt{S_{e_1}^2 - P_{e_1}^2 - Q_{e_1}^2} = \sqrt{24^2\cdot 15 - 84^2 - 12^2} = 4\sqrt{83}\text{ mvad}.$$

5.7. ANALIZA REGIMURILOR PERIODICE PRIN METODA REGIMURILOR TRANZITORII REPETATE

Metoda regimurilor tranzitorii repetate de calcul a circuitelor electrice în regim permanent periodic se bazează pe faptul că soluțiile căutate verifică ecuațiile circuitului și prin urmare se pot obține prin particularizarea soluțiilor generale ale acestor ecuații. Metoda constă în determinarea condițiilor inițiale ale soluțiilor căutate pe baza ecuațiilor care exprimă repetarea periodică a acestor condiții inițiale. Considerând numai circuitele electrice liniare formate din

elemente ideale de circuit, care redau corect variația continuă a tensiunilor condensatoarelor şi a curenților prin bobinele din circuitele reale (în care aceste mărimi nu pot varia discontinuu), aceste ecuații exprimă:

a) repetarea valorii tensiunii la bornele fiecărui condensator la interval de o perioadă, adică

$$u_C(t_0) = u_C(t_0 + T); \qquad (5.112)$$

b) repetarea valorii intensității curentului fiecărei bobine la interval de o perioadă, adică

$$i_L(t_0) = i_L(t_0 + T). \qquad (5.113)$$

De obicei se consideră $t_0 = 0$.

În cazul în care mărimea de excitație a circuitului are expresii analitice diferite în subintervale ale perioadei, condițiile de continuitate (5.112) şi (5.113) se scriu la fiecare punct comun a două astfel de subintervale.

Exemplul 5.5: Circuitului *R*, *C* serie din figura 5.12,a i se aplică la borne o tensiune periodică dreptunghiulară de forma cele reprezentate în figura 5.12,b. Să se determine variația curentului prin circuit în regim periodic nesinusoidal.

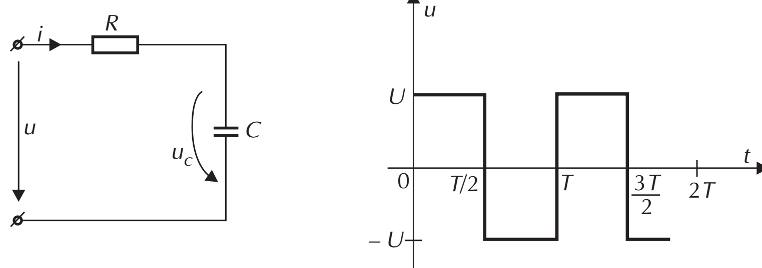


Fig. 5.12. a) Schema circuitului: b) Variația în timp a semnalului de intrare.

Pe intervalul $0 < t < T / 2$ se aplică circuitului o tensiune de valoare constantă *U*. Ecuația de funcționare a circuitului în regim dinamic este

$$Ri + u_C = U ,$$

cu

$$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}.$$

Introducând expresia curentului în prima ecuație, se obține:

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = U ,$$

care are soluția:

$$u_C(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}} + U .$$

Din condiția inițială $u_C(0_-) = u_C(0_+) = 0$ rezultă $A = - U$ şi soluția devine

$$u_C(t) = U\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right).$$

Intensitatea curentului din circuit are expresia

$$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{U}{R}e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Pe intervalul $T/2 < t < T$ circuitului i se aplică o tensiune constantă de valoare $-U$. În acest caz, ecuația circuitului este

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = -U,$$

cu soluția

$$u_C(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}} + U.$$

Punând condiția de continuitate pentru tensiunea de la bornele condensatorului la momentul $t = T/2$, rezultă:

$$u_C(T/2 - 0) = u_C(T/2 + 0) \Leftrightarrow U\left(1 - e^{-\frac{T}{2RC}}\right) = B - U \Rightarrow B = U\left(2 - e^{-\frac{T}{2RC}}\right).$$

Soluția corespunzătoare intervalului $T/2 < t < T$ este:

$$u_C(t) = U\left(2e^{-\frac{t-T/2}{RC}} - e^{-\frac{t}{RC}} - 1\right),\ i(t) = \frac{U}{R}\left(2e^{-\frac{t-T/2}{RC}} - e^{-\frac{t}{RC}}\right).$$

Evident, obținerea soluției exacte a problemei sub formă compactă prezintă o serie de avantaje (față de obținerea soluției sub formă de serie). Partea mai dificilă în metoda regimurilor tranzitorii repetate constă în rezolvarea ecuației caracteristice a sistemului.

Trebuie remarcat că exemplul considerat evidențiază faptul că soluția de regim permanent nesinusoidal nu coincide cu soluția particulară a sistemului.

5.8. CIRCUITE TRIFAZATE ÎN REGIM PERIODIC NESINUSOIDAL

Între regimul periodic nesinusoidal simetric al rețelelor electrice trifazate şi regimul sinusoidal simetric al acestora există deosebiri esențiale. Aceste deosebiri provin din faptul că armonicele fazelor formează sisteme trifazate cu succesiuni diferite în funcție de ordinul armonicilor.

Un sistem trifazat simetric de mărimi periodice nesinusoidale de succesiune directă sau inversă are forma:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y(\omega t) \\ y_{21}(t) &= y(\omega t - \gamma) \\ y_3(t) &= y(\omega t + \gamma), \end{aligned} \qquad (5.114)$$

cu $\gamma = \frac{2\pi}{3}$, respectiv $\gamma = -\frac{2\pi}{3}$

Dezvoltările în serie Fourier ale mărimilor y_1, y_2 şi y_3

$$y_1(t) = Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} Y_k \sin(k\omega t + \alpha_k);$$
$$y_2(t) = Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} Y_k \sin\left(k\omega t + \alpha_k - k\frac{2\pi}{3}\right);$$
$$y_3(t) = Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} Y_k \sin\left(k\omega t + \alpha_k + k\frac{2\pi}{3}\right), \tag{5.115}$$

pun în evidență următoarele proprietăți:

- armonicele de ordin $k = 3n = 0, 3, 6, 9, \ldots$,

$$y_{1,3n} = \sqrt{2} Y_{3n} \sin(3\omega t + \alpha_{3n});$$
$$y_{2,3n} = \sqrt{2} Y_{3n} \sin\left(3\omega t + \alpha_{3n} - 3n\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{2} Y_{3n} \sin(3\omega t + \alpha_{3n});$$
$$y_{3,3n} = \sqrt{2} Y_{3n} \sin\left(3\omega t + \alpha_{3n} + 3n\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{2} Y_{3n} \sin(3\omega t + \alpha_{3n}), \tag{5.116}$$

sunt în fază şi alcătuiesc sisteme omopolare;

- armonicele de ordin $k = 3n + 1 = 1, 4, 7, 10, 13, \ldots$,

$$y_{1,3n+1} = \sqrt{2} Y_{3n+1} \sin[(3n+1)\omega t + \alpha_{3n+1}];$$
$$y_{2,3n+1} = \sqrt{2} Y_{3n+1} \sin\left[(3n+1)\omega t + \alpha_{3n+1} - (3n+1)\frac{2\pi}{3}\right] = \sqrt{2} Y_{3n+1} \sin\left[(3n+1)\omega t + \alpha_{3n+1} - \frac{2\pi}{3}\right];$$
$$y_{3,3n+1} = \sqrt{2} Y_{3n+1} \sin\left[(3n+1)\omega t + \alpha_{3n+1} + (3n+1)\frac{2\pi}{3}\right] = \sqrt{2} Y_{3n+1} \sin\left[(3n+1)\omega t + \alpha_{3n+1} + \frac{2\pi}{3}\right], \tag{5.117}$$

alcătuiesc sisteme trifazate simetrice de succesiune directă;

- armonicele de ordin $k = 3n + 2 = 2, 5, 8, 11, \ldots$,

$$y_{1,3n+2} = \sqrt{2} Y_{3n+2} \sin[(3n+2)\omega t + \alpha_{3n+2}];$$
$$y_{2,3n+2} = \sqrt{2} Y_{3n+2} \sin\left[(3n+2)\omega t + \alpha_{3n+2} - (3n+2)\frac{2\pi}{3}\right] = \sqrt{2} Y_{3n+2} \sin\left[(3n+2)\omega t + \alpha_{3n+2} + \frac{2\pi}{3}\right];$$
$$y_{3,3n+2} = \sqrt{2} Y_{3n+2} \sin\left[(3n+2)\omega t + \alpha_{3n+2} + (3n+2)\frac{2\pi}{3}\right] = \sqrt{2} Y_{3n+2} \sin\left[(3n+2)\omega t + \alpha_{3n+2} - \frac{2\pi}{3}\right], \tag{5.118}$$

alcătuiesc sisteme trifazate simetrice de succesiune inversă.

Consecințe:

a) Suma valorilor instantanee ale sistemelor de mărimi nesinusoidale simetrice nu este nulă (spre deosebire de suma nulă a mărimilor sistemelor sinusoidale simetrice):

$$y_1 + y_2 + y_3 = 3 \sum_{k=0,3,6,9,...} \sqrt{2} Y_k \sin(k\omega t + \alpha_k), \tag{5.119}$$

unde $sin\, \alpha_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ca urmare, în regim periodic nesinusoidal simetric în conductorul neutru apare un curent, respectiv între punctele neutre apare o tensiune dată de armonicele de ordinul 0, 3, 6, 9, … ale mărimilor de fază. Valoarea efectivă a curentului din conductorul neutru are expresia

$$I_n = \sqrt{I_{0f}^2 + I_{3f}^2 + I_{6f}^2 + ...}, \tag{5.120}$$

unde valorile efective ale armonicelor curenților fazelor s-au notat cu indicele inferior *f*.

Relația (5.119) arată că în circuitele cu conexiune triunghi (ale transformatoarelor, generatoarelor etc.) t.e.m. au în regim periodic nesinusoidal simetric o sumă diferită de zero, produsă de armonicele de ordinul 0, 3, 6, 9, … ale acestor t.e.m. În felul acesta se produce un curent de circulație interioară în interiorul acestor generatoare chiar dacă t.e.m. sunt simetrice.

Suma tensiunilor de linie fiind întotdeauna nulă rezultă că tensiunile de linie nu conțin, în regim periodic nesinusoidal simetric, armonice de ordin multiplu de trei.

b) Diferența a două mărimi de fază nu conține armonicele de ordinul $k = 0,3,6,9,...$

$$\begin{aligned} y_{12} = y_1 - y_2 &= Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} Y_k \sin(k\omega t + \alpha_k) - Y_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} Y_k \sin\left(k\omega t + \alpha_k - k\frac{2\pi}{3}\right) = \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ (k \neq 0,3,6,9,...)}}^{\infty} \left[\sqrt{2} Y_k \sin(k\omega t + \alpha_k) - \sqrt{2} Y_k \sin\left(k\omega t + \alpha_k - k\frac{2\pi}{3}\right)\right]. \end{aligned} \tag{5.121}$$

Deci la circuitele cu conexiune în stea, în regim periodic nesinusoidal simetric, tensiunile de linie au o valoare efectivă

$$U_l = \sqrt{3}\sqrt{U_{1f}^2 + U_{2f}^2 + U_{4f}^2 + U_{5f}^2 + U_{7f}^2 + ...} \tag{5.122}$$

mai mică decât de $\sqrt{3}$ ori tensiunea de fază

$$U_f = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_{kf}^2}\ . \tag{5.123}$$

Similar, curenții de linie la circuitele trifazate cu conexiune triunghi nu conțin armonice de ordin multiplu de trei şi au prin urmare valori efective mai mici de $\sqrt{3}$ ori curenții de fază

$$I_l = \sqrt{3}\sqrt{I_{1f}^2 + I_{2f}^2 + I_{4f}^2 + I_{5f}^2 + I_{7f}^2 + ...}\ . \tag{5.124}$$

Datorită faptului că t.e.m. ale circuitelor electrice trifazate sunt mărimi alternativ simetrice, armonicele de ordin par practic nu apar în curenții şi tensiunile acestor circuite.

Armonicele de ordin $3n + 1$ ale curenților produc în maşinile electrice trifazate câmpuri magnetice învârtitoare care se rotesc invers față de sensul câmpurilor magnetice învârtitoare produse de armonicele $3n + 2$. Din acest motiv distorsiunea tensiunilor de alimentare, respectiv a curenților (față de forma de undă sinusoidală) scade cuplul activ al acestor maşini, ceea ce conduce la înrăutățirea condițiilor lor de exploatare.

Exemplul 5.5: Circuitul serie $R - L$ din figura 5.13, cu $R = 3\ \Omega$ şi $\omega L = 4\ \Omega$, este alimentat la o rețea cu tensiunea $u(t) = 18 + 40\sin 100\pi t$ V. Intensitatea curentului prin circuit şi căderile de tensiune la bornele rezistorului şi ale bobinei sunt măsurate cu aparate de tip magnetoelectric şi apoi de tip electromagnetic. Să se determine indicațiile aparatelor de măsură în cele două cazuri şi să se precizeze dacă aceste indicații sunt suficiente pentru determinarea puterii active. Aparatele de măsură se presupun ideale ($Z_A \cong 0$ şi $Z_V \to \infty$).

Intensitatea curentului prin circuit are expresia

$$i(t) = \frac{U_0}{R} + \frac{U_{1m}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin\left(\omega t - arctg\frac{\omega L}{R}\right) = 6 + 8\sin\left(100\pi t - 53^0\right) \text{A}.$$

Valorile instantanee ale tensiunilor $u_R(t)$ şi $u_L(t)$ sunt:

$$u_R(t) = Ri(t) = U_0 + U_{1m}\frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin\left(\omega t - arct\frac{\omega L}{R}\right) = 18 + 24\sin\left(100\pi t - 53^0\right) \text{V};$$

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = U_{1m}\frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin\left(\omega t - arct\frac{\omega L}{R} + 90^0\right) = 32\sin\left(100\pi t + 47^0\right) \text{V}.$$

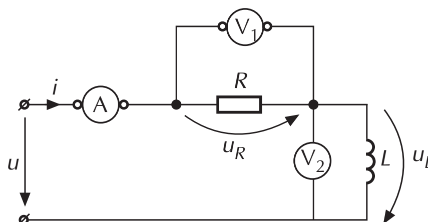


Fig.5.13. Schema circuitului.

Aparatele de tip magnetoelectric indică valorile medii

$$\text{A} \to I_0 = 6\ \text{A},\ \text{V}_1 \to U_{R0} = 18\ \text{V şi V}_2 \to U_{L0} = 0\ \text{V},$$

iar cele electromagnetice valorile efective

$$\text{A} \to I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2} = \sqrt{6^2 + \left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right)^2} = 8{,}25\ \text{A};$$

$$\text{V}_1 \to U_R = \sqrt{U_{R0}^2 + U_{R1}^2} = \sqrt{18^2 + \left(\frac{24}{\sqrt{2}}\right)^2} = 24{,}75\ \text{V};$$

$$\text{V}_2 \to U_L = \sqrt{U_{L0}^2 + U_{L1}^2} = \sqrt{0^2 + \left(\frac{32}{\sqrt{2}}\right)^2} = 22{,}7\ \text{V}.$$

Puterea activă este dată de una din următoarele expresii:

$$P = RI^2 = 3 \cdot 68 = 204 \text{ W};$$

$$P = U_0 I_0 + \frac{1}{2} U_{1m} I_{1m} \cos\varphi_1 = 18 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 8 \cdot \cos 53^0 = 108 + 96 = 204 \text{ W};$$

$$P = \frac{U_{R0}}{I_0} I^2 = \frac{18}{3} 68 = 204 \text{ W};$$

$$P = U_R I = 24{,}75 \cdot 8{,}25 = 204 \text{ W}.$$

Prin urmare, pentru măsurarea puterii active, conform ultimelor relații, sunt suficiente măsurările de curent cu ampermetrele magnetoelectric şi electromagnetic şi măsurarea tensiunii la bornele rezistorului cu voltmetrul magnetoelectric, sau numai măsurările de curent şi de tensiune la bornele rezistorului cu aparatele electromagnetice.

BIBLIOGRAFIE

1. **M. Preda, P. Cristea**, *Bazele electrotehnicii*, Vol.II, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980.
2. **C. I. Mocanu**, *Teoria circuitelor electrice*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.
5. **M. Preda** şi alții, *Bazele electrotehnicii - Culegere de probleme* (reeditată şi completată), Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1985.
4. **Lucia Dumitriu, M. Iordache**, *Teoria modernă a circuitelor electrice – Fundamentare teoretică, aplicații, algoritmi şi programe de calcul*, Vol I., Editura All Educational, Bucureşti, 1998.
5. 4. **M. Iordache**, **Lucia Dumitriu,** *Teoria modernă a circuitelor electrice – Fundamentare teoretică, aplicații, algoritmi şi programe de calcul*, Vol II., Editura All Educational, Bucureşti, 2000.
6. **M. Iordache,** *Culegere de probleme de electrotehnică, electronică şi maşini electrice*, Litografia Universității "Politehnica" Bucureşti, 1984.
7. **M. Iordache, Lucia Dumitriu,** *Culegere de probleme de electrotehnică - Circuite neliniare - Probleme, algoritmi şi programe de calcul*, Litografia Universității "Politehnica" Bucureşti, 1996.
8. **L. O. Chua, and P. M. Lin,** *Computer-aided of electronic circuit: Algorithms and computational techniques*, Englewood Cliffs, NJ: Prentince-Hall, 1975.
9. **R. Răduleț**, *Bazele Electrotehnicii - Probleme II*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1975.
10. **C. Șora**, *Cuadripolul electric*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1964.
11. **N. Balabanian, Th. Bickart,** *Teoria moderna a circuitelor*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1974.
12. **A. D. Calahan,** *Computer-aided network design*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1972.
15. **A. E. Schwarz**, *Computer-aided design of microelectronic circuits and systems*, Academic Press, Londra, 1987.
14. **S. Franco,** *Electric Circuit Fundamentals*, Sauders College Publishing, Harcout Brace College Publishers, N.Y., London, 1995.
15. **P. Tuinega**, *SPICE: A Guide to Circuit Simulation and Analysis Using PSPICE*, Prentice-Hall, N.Y., 1988.
16. **T. Marian**, *SPICE*, Editura Teora, Bucureşti, 1996.
17. **M. Badea**, *Analiza asistată de calculator a circuitelor electrice*, Editura InfoMed, Craiova, 1997.

CAPITOLUL 6

CIRCUITE LINIARE ÎN REGIM TRANZITORIU

6.1. CARACTERIZAREA REGIMULUI TRANZITORIU

6.1.1. Elemente dinamice de circuit. Regimul tranzitoriu

Rezistoarele liniare neparametrice sunt elemente statice de circuit, a căror caracteristică $u(i)$ este independentă de timp şi, deoarece puterea primită $p = ui = Ri^2 > 0$ în orice punct al caracteristicii indiferent de modul de variație în timp al mărimilor, au proprietatea de a disipa energie. Ecuațiile de funcționare ale circuitelor rezistive liniare invariabile în timp sunt ecuații algebrice [1]. Spre deosebire de rezistoare, bobinele şi condensatoarele liniare au ecuații caracteristice dependente de timp de forma $u = L(\mathrm{d}i / \mathrm{d}t)$, respectiv $i = C(\mathrm{d}u / \mathrm{d}t)$, fapt pentru care sunt denumite *elemente dinamice* de circuit. Ecuațiile de funcționare ale circuitelor ce conțin aceste elemente, obținute pe baza teoremelor lui Kirchhoff şi a ecuațiilor caracteristice ale elementelor, sunt ecuații integro-diferențiale, liniare, neomogene, cu coeficienți constanți. Proprietatea fundamentală a celor două elemente dinamice este de a acumula energie şi anume (în conformitate cu aproximațiile teoriei circuitelor electrice cu parametri concentrați [1]) energie magnetică în bobine, respectiv energie electrică în condensatoare.

Corelat cu proprietățile de transformare ireversibilă (disipare), respectiv de acumulare a energiei electromagnetice, se impune următoarea observație: în timp ce funcționarea circuitelor rezistive este condiționată de existența a cel puțin o sursă independentă care să furnizeze semnalul de excitație, circuitele cu bobine şi condensatoare, care au acumulat energie, pot funcționa şi în absența unui generator de semnal.

Un circuit electric are elemente în exces de prima speță (categorie) dacă conține: bucle formate numai din condensatoare (C) sau/şi din C şi surse ideale independente de tensiune (E) sau/şi din C şi surse ideale de tensiune comandate (E_c) sau/şi din C, E şi E_c - toate aceste bucle numite generic *bucle de tipul C-E* şi secțiuni independente intersectate numai de bobine (L) sau/şi de L şi surse ideale independente de curent (J) sau/şi de L şi surse ideale de curent comandate (J_c) sau/şi de L, J şi J_c - toate aceste secțiuni numite generic *secțiuni de tipul L-J.* Un circuit electric conține elemente în exces de speță (categorie) a doua dacă are: bucle formate numai din bobine (L) sau/şi din L şi surse ideale independente de tensiune (E) sau/şi din L şi surse ideale de tensiune comandate (E_c) sau/şi din L, E şi E_c - toate aceste bucle numite generic *bucle de tipul L-E* şi secțiuni independente intersectate numai de condensatoare (C) sau/şi de C şi surse ideale independente de curent (J) sau/şi de C şi surse ideale de curent comandate (J_c) sau/şi de C, J şi J_c - toate aceste secțiuni numite generic *secțiuni de tipul C-J.* Fiecare elemente în exces de speța a doua introduce câte o valoare proprie nulă.

Comportarea unui circuit electric liniar *fără* elemente în exces (circuit nedegenerat) este complet descrisă de sistemul de ecuații obținut prin aplicarea celor două teoreme ale lui Kirchhoff, prelucrate în funcție de ecuațiile caracteristice ale laturilor, respectiv ale elementelor de circuit. Prezența în circuit a bobinelor şi condensatoarelor introduce în ecuații termeni ce conțin derivate în raport cu timpul, respectiv integrale în timp (conform ipotezelor asumate în teoria circuitelor cu parametri concentrați [1], propagarea semnalelor se face instantaneu şi deci mărimile de stare variază numai în funcție de timp). În consecință comportarea circuitului va fi descrisă de un sistem de ecuații integro-diferențiale liniare, neomogene, cu coeficienți constanți, care se poate prelucra sub forma unui sistem format numai din ecuații diferențiale. Prin eliminări succesive, acest sistem se poate reduce la o singură ecuație diferențială de ordin n şi cum numai bobinele şi condensatoarele introduc câte

un element diferențial, rezultă că ordinul n al ecuației echivalente este egal cu suma dintre numărul de bobine n_L şi numărul de condensatoare n_C din circuit. Soluția ecuației diferențiale echivalente de ordinul n este de forma

$$x(t) = x_p(t) + x_t(t), \tag{6.1}$$

unde:

$x_p(t)$ - reprezintă o soluție particulară a ecuației neomogene. Forma ei este impusă de funcția de timp ce reprezintă termenul liber al ecuației, corespunzător mărimilor de excitație care întrețin această componentă, de unde şi denumirea ei de *componentă forțată* sau, deoarece este soluția de regim permanent a circuitului, *componentă permanentă*;

$x_t(t)$ - este soluția generală a ecuației omogene (corespunzătoare pasivizării surselor) şi conține un număr de constante de integrare egal cu ordinul ecuației. Aceste constante se determină pe baza condițiilor inițiale (valorilor la momentul t_0) pe care trebuie să le satisfacă soluția completă. Componenta tranzitorie se poate scrie sub forma

$$x_t(t) = \sum_k P_k(t, m_k) e^{\alpha_k t}, \tag{6.2}$$

în care α_k este o rădăcină multiplă de ordinul m_k a ecuației caracteristice asociate ecuației diferențiale, iar $P_k(t,m_k)$ un polinom de gradul (m_k-1) în variabila t, cu coeficienți constanți (reali sau complecşi). Deoarece în circuitele reale se constată că, în absența surselor de excitație, mărimile electrice (curenți şi tensiuni) se anulează după un anumit interval de timp, rezultă că rădăcinile ecuației caracteristice trebuie să satisfacă relația

$$\mathrm{Re}\{\alpha_k\} < 0. \tag{6.3}$$

Nefiind întreținută din exterior (sursele de excitație sunt pasivizate), această componentă se datorează exclusiv acumulării de energie electromagnetică în elementele dinamice ale circuitului şi, în consecință, durata ei corespunde intervalului necesar transformării ireversibile a acestei energii în elementele disipative ale circuitului. Deoarece este independentă de sursele de excitație şi durata ei este limitată, această componentă se numeşte *componentă liberă (naturală)* sau *componentă tranzitorie.*

Pe baza observațiilor de mai sus se pot formula următoarele definiții:

Definiția 6.1.1. Se numeşte regim permanent acel regim de funcționare a circuitului în care componenta liberă (naturală) a soluției este neglijabilă în raport cu cea forțată.

Definiția 6.1.2. Se numeşte regim tranzitoriu acel regim de funcționare a circuitelor electrice în care soluția liberă (naturală) are valori importante în raport cu cele ale soluției forțate. Acest regim, care apare la momentul t_0, este influențat de condițiile de funcționare ale circuitului, anterior acestui moment.

Formularea problemei condițiilor inițiale este necesară pentru determinarea celor n constante de integrare ale componentei tranzitorii (respectiv ale soluției generale). Aceste constante se determină pe baza valorilor la momentul t_0 ale unora dintre mărimile caracteristice ale circuitului, valori ce constituie condiții inițiale ale regimului tranzitoriu.

Deoarece, aşa cum s-a arătat mai sus, elementele dinamice ale circuitului sunt cele care determină natura integro-diferențială a ecuațiilor circuitului, şi cum curenții prin bobine, respectiv tensiunile la bornele condensatoarelor, în cazul circuitelor liniare, se pot exprima cu relațiile

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int u_L(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u_L(t')\mathrm{d}t' + i_L(t_0), \tag{6.4}$$

respectiv

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int i_C(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_C(t')\mathrm{d}t' + u_C(t_0), \tag{6.5}$$

rezultă că aceste condiții inițiale se referă la valorile inițiale ale intensităților curenților prin bobine şi respectiv ale tensiunilor la bornele condensatoarelor. Prin urmare dispunem de un număr total de n_L+ n_C condiții, necesare determinării celor n constante de integrare.

În cazul general al circuitelor reale, valorile $i_L(t_0)$, respectiv $u_C(t_0)$ se obțin din condiția ca intensitățile curenților prin bobine şi ale tensiunilor la bornele condensatoarelor să varieze în mod continuu în momentul t_0:

$$i_L(t_{0-}) = i_L(t_{0+}), \tag{6.6}$$

respectiv

$$u_C(t_{0-}) = u_C(t_{0+}). \tag{6.7}$$

Dacă aceste condiții nu ar fi respectate, conform caracteristicilor $u(i)$, respectiv $i(u)$ ale celor două elemente ar trebui ca la momentul t_0 în circuit să apară variații infinite ale tensiunilor la bornele bobinelor şi respectiv ale curenților prin condensatoare, fapt care contrazice realitatea.

Valorile $i_L(t_{0_})$ respectiv $u_C(t_{0_})$ se calculează din regimul permanent anterior declanşării regimului tranzitoriu. Regimul permanent la $t_{0_}$ poate fi un regim de curent continuu, caz în care analiza circuitului va ține seama de faptul că bobinele ideale se modelează prin scurtcircuite, iar condensatoarele prin întreruperi [1], sau poate fi un regim periodic sinusoidal care se va rezolva cu metoda simbolică de reprezentare în complex a mărimilor. Dacă regimul permanent este nesinusoidal, atunci, circuitele fiind liniare, se aplică metoda superpoziției, rezolvând circuitul pentru fiecare componentă a mărimilor de excitație. Soluția obținută în oricare din situațiile de mai sus se particularizează apoi pentru $t = t_0$ şi se aplică ecuațiile de continuitate.

În cazul unor circuite idealizate cu energie finită, care urmăresc să evidențieze numai unele aspecte mai importante ale comportării acestor circuite (cu elemente în exces), pot fi imaginate şi comutări ideale care să producă variații bruşte ale mărimilor i_L şi u_C, deci variații infinite ale tensiunii la bornele bobinelor, respectiv a intensității curentului prin condensatoare. În această situație, condițiile inițiale se determină pe baza teoremei mai generale de conservare a fluxului magnetic total pentru fiecare buclă care nu conține nici o sursă de curent şi a conservării sarcinii electrice totale pentru fiecare suprafață de secțiune care nu conține nici o sursă ideală de tensiune:

$$\sum_{l_k \in (b_h)}^{(A)} \left(L_k i_k(t_{0_}) + \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq k}}^{l} L_{ks} i_s(t_{0_}) \right) = \sum_{l_k \in (b_h)}^{(A)} \left(L_k i_k(t_{0+}) + \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq k}}^{l} L_{ks} i_s(t_{0+}) \right), \quad h = \overline{1, b'}, \tag{6.8}$$

respectiv

$$\sum_{l_k \in (\Sigma_j)}^{(A)} C_k u_{Ck}(t_{0_}) = \sum_{l_k \in (\Sigma_j)}^{(A)} C_k u_{Ck}(t_{0_+}), \quad j = \overline{1, n'}. \tag{6.9}$$

Aceste relații decurg din condiția ca energia magnetică (energia electrică) acumulată în câmpul magnetic al bobinelor (în câmpul electric al condensatoarelor) să aibe numai variații finite.

Regimul permanent de funcționare al unui circuit este regimul în care circuitul atinge o anumită stare de echilibru, în care răspunsul său are aceeaşi formă de variație în timp cu a

mărimilor de excitație aplicate. În circuitele care conțin elemente dinamice, regimul permanent nu se stabilește instantaneu, deoarece aceasta ar presupune un transfer de energie finită (acumulată în bobine sau/şi în condensatoare) într-un timp nul, printr-o putere infinită, lucru evident imposibil de realizat. În consecință, între un regim de repaus şi un regim permanent sau între două regimuri permanente există o perioadă de timp în care circuitul funcționează în *regim tranzitoriu*. Modificările regimului de funcționare al unui circuit şi implicit apariția regimului tranzitoriu pot avea mai multe cauze: modificarea structurii topologice a circuitului, modificarea valorilor parametrilor circuitului, modificarea valorilor mărimilor de excitație.

Metodele de analiză a comportării circuitelor electrice în regim tranzitoriu se clasifică în trei categorii:

- metoda elementară, constând în integrarea directă a sistemului de ecuații integro-diferențiale obținute prin aplicarea celor două teoreme ale lui Kirchhoff. Fiind foarte laborioasă, această metodă de analiză se aplică numai în cazul circuitelor simple cu un număr redus de elemente dinamice (de regulă o bobină sau un condensator);
- metode simbolice (operaționale), care, prin aplicarea unor transformări operaționale (transformata Laplace, transformata Fourier, transformata Z), simplifică în mod considerabil rezolvarea sistemului de ecuații integro-diferențiale ale circuitului. Principiul de bază al acestor metode constă în a asocia în mod biunivoc fiecărei funcții de timp o funcție de variabilă complexă, transformând sistemul de ecuații integro-diferențiale într-un sistem de ecuații algebrice.
- metoda variabilelor de stare, care operează cu un sistem de ecuații ale circuitului având ca variabile numai mărimile legate direct de comportarea elementelor dinamice. Această metodă prezintă avantajul unei remarcabile sistematizări în modul de scriere a ecuațiilor, fiind în esență o metodă matriceală şi pretându-se cel mai bine pentru analiza calitativă asistată de calculator a circuitelor electrice. Pentru circuitele electrice cu grad ridicat de complexitate, formularea ecuațiilor de stare în formă normală necesită însă un efort foarte mare de calcul.

6.2. METODA VARIABILELOR DE STARE

6.2.1. Mărimile de stare ale circuitelor electrice şi ecuațiile lor

Circuitele electrice care conțin elemente de circuit acumulatoare de energie, cum sunt bobinele şi condensatoarele, pot fi studiate ca sisteme dinamice utilizând metoda variabilelor de stare.

Variabilele de stare ale unui sistem (circuit) reprezintă numărul minim de variabile independente care dacă se cunosc la momentul inițial $t_0 = 0$, pot determina, împreună cu marimile de intrare (excitație) ale sistemului (circuitului), evoluția întregului sistem (circuit) pentru orice $t > t_0$.

Forma matriceală normală (canonică) a ecuațiilor de stare, pentru sistemele liniare şi finite este:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}, \qquad (6.10)$$

unde:

$\boldsymbol{x}$ - este vectorul variabilelor de stare $(n\times1)$;

$\dot{\boldsymbol{x}}$ - este vectorul derivatelor de ordinul întâi (în raport cu timpul) ale variabilelor de stare;

$\boldsymbol{y}$ - reprezintă vectorul mărimilor de excitație (intrare) ale sistemului, $(m\times1)$;

$\boldsymbol{A}$ - este matricea coeficienților variabilelor de stare, $(n\times n)$;

$\boldsymbol{B}$ - reprezintă matricea coeficienţilor mărimilor de excitaţie (intrare), ($n \times m$).

Mărimile de intrare (excitaţie) sunt tensiunile electromotoare ale surselor independente de tensiune $\boldsymbol{e}(t)$ şi intensităţile curenţilor surselor independente de curent $\boldsymbol{j}(t)$.

În cazul circuitelor electrice normale (nedegenerate), cu parametri concentraţi şi constanţi în timp, vectorul variabilelor de stare conţine vectorul tensiunilor la bornele condensatoarelor $\boldsymbol{u}_C(t)$ şi vectorul intensităţilor curenţilor din bobine $\boldsymbol{i}_L(t)$. Aceste variabile de stare prezintă avantajul exprimării uşoare a condiţiilor iniţiale datorită continuităţii tensiunilor la bornele condensatoarelor şi a curenţilor prin bobine.

Dacă circuitele electrice conţin elemente în exces, nu toate tensiunile la bornele condensatoarelor şi/sau toţi curenţii prin bobine sunt independenţi. Condensatoarele şi bobinele cu tensiuni şi, respectiv, cu curenţi dependenţi (exprimate în funcţie de tensiunile la borne ale altor condensatoare şi ale unor eventuale t.e.m. ale unor surse ideale de tensiune, respectiv în funcţie de curenţii altor bobine şi ai unor eventuale surse ideale de curent) se numesc **elemente în exces**. Pentru astfel de circuite, în ecuaţiile de stare intervin ca mărimi de excitaţie şi derivatele tensiunilor electromotoare ale surselor de tensiune din buclele condensatoarelor şi/sau derivatele curenţilor surselor de curent din secţiunile de bobine.

În acest caz, forma normală a ecuaţiilor de stare este:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{y}}, \qquad (6.11)$$

unde:

$\dot{\boldsymbol{y}}$ - reprezintă vectorul derivatelor în raport cu timpul ale mărimilor de excitaţie (intrare) ale sistemului, ($m \times 1$);

$\boldsymbol{C}$ - este matricea coeficienţilor derivatelor mărimilor de excitaţie (intrare), ($n \times m$). Matricea $\boldsymbol{C}$ este nenulă numai în cazul când circuitul conţine bucle independente formate numai din C şi surse ideale independente de tensiune sau/şi secţiuni alcătuite numai din L şi surse ideale independente de curent.

6.2.2. Formularea ecuaţiilor de stare

Ecuaţiile de stare în forma normală (6.10) şi (6.11) se pot stabili pe baza teoremelor lui Kirchhoff şi a ecuaţiilor caracteristice de tensiuni şi de curenţi ale elementelor de circuit.

Metoda este în general laborioasă, de aceea se face apel la metode sistematice de formulare a ecuaţiilor de stare, cum sunt: metoda surselor echivalente, metoda topologică a arborelui normal, foarte generală şi uşor de implementat pe calculator, metoda bazată pe utilizarea unor formule topologice, metoda grafului de fluenţă propriu etc.

6.2.2.1. Metoda topologică a arborelui normal

Fie un circuit electric liniar care conţine: rezistoare liniare, bobine liniare, condensatoare liniare, cuplaje magnetice, toate cele patru tipuri de surse comandate diport, surse independente de tensiune şi surse independente de curent. Bobinele cuplate magnetic se pot înlocui cu scheme echivalente formate din bobine şi surse comandate. Circuitul analizat poate să conţină orice element de circuit multipol sau multiport care are o schemă echivalentă formată numai din elemente dipolare de circuit şi surse comandate. Fiecare latură a circuitul se consideră formată dintr-un singur element de circuit. Porţile de comandă ale surselor comandate în curent sunt reprezentate prin laturi rezistive care au rezistenţa nulă (scurtcircuite).

Se selectează un arbore - **numit arbore normal** (**de referinţă**) (AN (AR)), care trebuie să conţină: toate sursele ideale independente şi/sau comandate (laturile comandate) de tensiune, un număr maxim posibil de condensatoare, un număr maxim posibil de scurtcircuite (laturile

de comandă ale surselor comandate în curent), un număr minim posibil de bobine şi nici o sursă ideale independentă şi/sau comandată de curent.

Prin urmare, structurile vectorului de stare $\boldsymbol{x}$ şi, respectiv a vectorului mărimilor de excitaţie $\boldsymbol{y}$, au forma:

$$\boldsymbol{x} = \left[\boldsymbol{u}_{Ca}^{\mathrm{t}}, \boldsymbol{i}_{Lc}^{\mathrm{t}}\right]^{\mathrm{t}}, \qquad \boldsymbol{y} = \left[\boldsymbol{u}_{E}^{\mathrm{t}}, \boldsymbol{i}_{J}^{\mathrm{t}}\right]^{\mathrm{t}}. \tag{6.12}$$

Pentru descrierea algoritmului de generare a ecuaţiilor de stare în forma normală, bazat pe metoda topologică a arborelui normal, se consideră circuitul reprezentat în figura 6.1.

Exemplul 6.1. În figura 6.1 se prezintă un circuit electric nereciproc cu elemente în exces. În figura 6.1 laturile AN s-au desenat cu linie îngroşată, $AN = \{e_1, C_3, R_2, L_5\}$. Circuitul din figura 6.1. are un element în exces de prima speţă (o secţiune de tipul Σ_{L-J}, $\Sigma_{L-J} = \{L_5, L_6, j_7\}$) şi un element în exces de speţa a doua (o buclă de tipul *L-E*, $b_{L-J} = \{e_1, L_5, L_6\}$). Aceasta buclă determină o valoare proprie nulă. Deci, structura vectorilor de stare şi de intrare este:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} u_3 \\ i_6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = [j_7]. \tag{6.13}$$

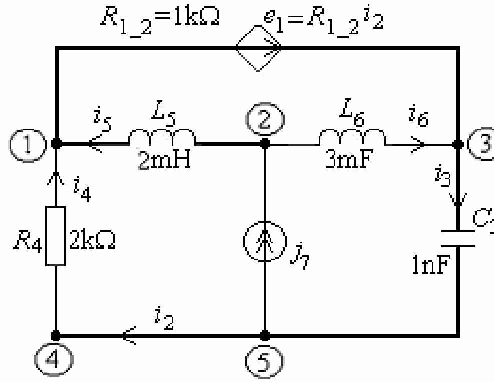


Fig. 6.1. Schema Circuitului.

Pasul 1. Se selectează arborele normal *AN* şi coarborele corespunzător C_{AN}: $AN = \{e_1, C_3, R_2, L_5\}$ şi $C_{AN} = \{R_4, L_6, j_7\}$.

Pasul 2. Se scrie prima teoremă a lui Kirchhoff pe secţiunile ataşate condensatoarelor ramuri în care se ţine seama că $i_C = C \cdot \mathrm{d}u_C / \mathrm{d}t$ şi curenţii surselor de curent comandate se exprimă, cu relaţia de definiţie, în funcţie de mărimile de comandă:

$$\left(\Sigma_{C_3}\right): \quad C_3 \frac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}t} = -i_4 + j_7. \tag{6.14}$$

Pasul 3. Se scrie a doua teoremă a lui Kirchhoff pe buclele ataşate condensatoarelor coarde în care se ţine seama că $u_R = R \cdot i_R$, $u_L = L \cdot \mathrm{d}i_L / \mathrm{d}t$ şi tensiunile electromotoare ale surselor de tensiune comandate se exprimă, cu relaţia de definiţie, în funcţie de mărimile de comandă. Pentru circuitul din figura 6.1 nu există astfel de bucle.

Pasul 4. Se formulează a doua teoremă a lui Kirchhoff pe buclele ataşate bobinelor coarde în care se ţine seama că $u_R = R \cdot i_R$, $u_L = L \cdot \mathrm{d}i_L / \mathrm{d}t$ şi tensiunile electromotoare ale surselor de tensiune comandate se exprimă, cu relaţia de definiţie, în funcţie de mărimile de comandă.

$$\left(b_{L_6}\right):\quad L_6\frac{\mathrm{d}i_6}{\mathrm{d}t}=L_5\frac{\mathrm{d}i_5}{\mathrm{d}t}-R_{1_2}i_2. \tag{6.15}$$

Pasul 5. Se scrie prima teoremă a lui Kirchhoff pe secțiunile atașate bobinelor ramuri în care se ține seama că $i_C = C \cdot \mathrm{d}u_C / \mathrm{d}t$ și curenții surselor de curent comandate se exprimă, cu relația de definiție, în funcție de mărimile de comandă:

$$\left(\Sigma_{L_5}\right):\quad i_5=-i_6+j_7. \tag{6.16}$$

Pasul 6. Se formulează prima teoremă a lui Kirchhoff pe secțiunile atașate rezistoarelor ramuri în care se ține seama că $i_C = C \cdot \mathrm{d}u_C / \mathrm{d}t$ și curenții surselor de curent comandate se exprimă, cu relația de definiție, în funcție de mărimile de comandă:

$$\left(\Sigma_{R_2}\right):\quad i_2=i_4. \tag{6.17}$$

Pasul 7. Se scrie a doua teoremă a lui Kirchhoff pe buclele atașate rezistoarelor coarde în care se ține seama că $u_R = R \cdot i_R$, $u_L = L \cdot \mathrm{d}i_L / \mathrm{d}t$ și tensiunile electromotoare ale surselor de tensiune comandate se exprimă, cu relația de definiție, în funcție de mărimile de comandă.

$$\left(b_{R_4}\right):\quad R_4 i_4=-u_3+R_{1_2}i_2. \tag{6.18}$$

Pasul 8. Se determină curenții rezistoarelor ramuri $\boldsymbol{i}_{Ra}$ și curenții rezistoarelor coarde $\boldsymbol{i}_{Rc}$ (în funcție de mărimile de stare și de mărimile de excitație excitație), prin rezolvarea ecuațiilor (6.16) și (6.17). Procedând astfel, se obține:

$$i_2=i_4=-\frac{1}{R_4-R_{1_2}}u_3. \tag{6.19}$$

Pasul 9. Se introduc expresiile curenților obținuți la Pasul 8 în ecuațiile de la Pașii 3 și 5. Ecuațiile astfel generate se introduc, împreună cu relațiile (6.19), în ecuațiile de la Pasul 2 și de la Pasul 4. Rezolvând aceste ecuații în raport cu derivatele mărimilor de excitație se obțin ecuațiile de stare ale circuitului în forma normală:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}u_3\\ i_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{C_3\left(R_4-R_{1_2}\right)} & 0\\ \dfrac{R_{1_2}}{\left(L_5+L_6\right)\left(R_4-R_{1_2}\right)} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_3\\ i_6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{C_3}\\ 0\end{bmatrix}\left[j_7\right]+\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{L_5}{L_5+L_6}\end{bmatrix}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[j_7\right]. \tag{6.20}$$

6.2.3. Soluțiile ecuațiilor de stare

În cazul circuitelor liniare cu parametri constanți în timp, expresia generală a soluției ecuației de stare (6.10) este următoarea:

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{6.21}$$

unde $\boldsymbol{x}(t_0)$ este vectorul valorilor inițiale ale mărimilor de stare $\boldsymbol{x}(t)$.

Matricea funcție de timp (funcția de matrice):

$$\boldsymbol{\Phi}(t)\overset{\mathrm{d}}{=}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}t} \tag{6.22}$$

se numește *matrice de tranziție*.

Deci, soluția generală a ecuației de stare se poate scrie și în forma:

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t - t_0)\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t - \tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}(\tau)\boldsymbol{d}\tau. \tag{6.23}$$

În expresia (6.23) se remarcă posibilitatea separării componentei datorate condițiilor inițiale de componenta datorată mărimilor de excitație:

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x_i}(t) + \boldsymbol{x_e}(t), \tag{6.24}$$

în care:

$$\boldsymbol{x_i}(t) \overset{\mathbf{d}}{=} e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{\Phi}(t - t_0)\boldsymbol{x}(t_0) \tag{6.25}$$

$$\boldsymbol{x_e}(t) \overset{\mathbf{d}}{=} \int_{t_0}^{t} e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}(\tau)\boldsymbol{d}\tau = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t - \tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}(\tau)\boldsymbol{d}\tau. \tag{6.26}$$

În cazul în care se cunoaşte o soluție particulară $\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}(t)$ a ecuației de stare (6.10), soluția generală a ecuației de stare se scrie sub forma:

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t - t_0)\left[\boldsymbol{x}(t_0) - \boldsymbol{x_p}(t_0)\right] + \boldsymbol{x_p}(t). \tag{6.27}$$

$\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}(t)$ reprezintă soluția particulară, de acelaşi tip cu mărimile de excitație, numită *componentă forțată* (*permanentă*), iar cealaltă componentă din ecuația (6.24) se numeşte *componentă liberă* (*tranzitorie*):

$$\boldsymbol{x}_t(t) = \boldsymbol{\Phi}(t - t_0)\left[\boldsymbol{x}(t_0) - \boldsymbol{x}_p(t_0)\right]. \tag{6.28}$$

Prin urmare, soluția de regim tranzitoriu în funcție de componenta forțată şi componenta liberă are expresia:

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t - t_0)\boldsymbol{x}_t(t_0) + \boldsymbol{x}_p(t), \tag{6.29}$$

cu

$$\boldsymbol{x}_t(t_0) = \boldsymbol{x}(t_0) - \boldsymbol{x}_p(t_0). \tag{6.30}$$

Aplicarea formulei (6.26) conduce la calcule mai simple decât aplicarea formulei (6.23) în cazurile uzuale, când mărimile de excitație sunt funcții de tip polinomial, exponențial sau sinusoidal.

6.2.3.1. Funcțiile de matrice şi proprietățile lor

Definiția 6.3. Oricărei funcții dezvoltabilă în serie de puteri:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \text{ cu } t \in \mathbf{R} \tag{6.31}$$

i se asociază o funcție de matrice

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}) \overset{\mathbf{d}}{=} \sum_{\boldsymbol{k}=0}^{\infty} a_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}}, \tag{6.32}$$

unde $\boldsymbol{A}$ este o matrice pătratică de dimensiunea ($n\times n$), $n \in \mathbf{N}$.

Relația (6.32) este valabilă numai pentru matricea $\boldsymbol{A}$, ale cărei valori proprii aparțin mulțimii de definiție a funcției *f*. Funcția de matrice este ea însăşi o matrice.

Definiția 6.4. Ecuația caracteristică a matricei pătrate $\boldsymbol{A}$ este, prin definiție, ecuația:

$$g(\lambda) \overset{\mathbf{d}}{=} \det(\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}) = 0, \tag{6.33}$$

iar g(λ) este *polinomul caracteristic* al matricei $\boldsymbol{A}$.

Rădăcinile ecuației caracteristice λ_1, λ_2, ..., λ_m, cu $m \leq n$ se numesc *valori proprii* ale matricei $\boldsymbol{A}$, cu ordin de multiplicitate m_1, m_2, ..., m_m.

Teorema 6.1. Teorema Cayley-Hamilton. Orice matrice pătrată $\boldsymbol{A}$ își verifică propria ei ecuație caracteristică:

$$g(\boldsymbol{A}) = \mathbf{0}. \tag{6.34}$$

Teorema 6.2. O funcție de matrice $f(\boldsymbol{A})$ de ordinul n se poate exprima sub forma unui polinom de gradul n-1 în funcție de $\boldsymbol{A}$:

$$f(\boldsymbol{A}) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \boldsymbol{A}^k \overset{\mathrm{d}}{=} P_{n-1}(\boldsymbol{A}). \tag{6.35}$$

1. Calculul funcțiilor de matrice (în particular al matricei de tranziție)

Pentru calculul funcțiilor de matrice (şi în particular al matricei de tranziție) există mai multe metode: metoda polinomului matriceal**,** formulele lui Silvester, metoda matricelor componente şi metode numerice de calcul al matricei de tranziție**.**

a. Metoda polinomului matriceal. Coeficienții b_0, b_1, ..., b_{n-1} din expresia polinomială (6.32) ai funcției de matrice corespunzătoare unei funcții $f(t)$ şi unei matrice pătrate $\boldsymbol{A}$ de ordinul n date, se pot determina particularizând ecuația matriceală (6.32) pentru valorile proprii λ_k ale matricei $\boldsymbol{A}$. Rezultă astfel un sistem de n ecuații de forma:

$$f^{(p)}(\lambda_k) = P^{(p)}(\lambda_k). \tag{6.36}$$

Derivatele de ordin p = 1, 2, ..., m_k - 1, în raport cu parametrii λ_k, apar în cazul valorilor proprii λ_k cu ordin de multiplicitate m_k, k = 1, 2, ..., m, unde m este numărul valorilor proprii distincte şi $\sum_{k=1}^{m} m_k = n$.

Particularizând pentru $f(t) = e^{\boldsymbol{A}t}$, ecuația (6.27) devine

$$\left(e^{\lambda_k t}\right)^{(p)} = P^{(p)}(\lambda_k). \tag{6.37}$$

Pentru valorile numerice ale parametrilor circuitului din figura 6.1, matricea de stare $\boldsymbol{A}$ are expresia:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -10^6 & 0 \\ 200 & 0 \end{bmatrix},$$

iar polinomul caracteristic este:

$$g(\lambda) = \det(\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}) = \lambda\left(\lambda + 10^6\right).$$

Valorile proprii sunt:

$$\lambda_1 = 0.0, \ \ \lambda_2 = -10^6.$$

Coeficienții seriei de puteri (6.35) sunt rădăcinile sistemului:

$$\begin{cases} b_0 + 0.0 \cdot b_1 = 1.0 \\ b_0 - 10^6 \cdot b_1 = e^{-10^6 t} \end{cases},$$

de unde rezultă: $b_0 = 1.0$ şi $b_1 = 10^{-6}\left(1.0 - e^{-10^6 t}\right)$.

Matricea de tranziție are expresia:

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} e^{-10^6 t} & 0.0 \\ 2\cdot 10^{-4}-2\cdot 10^{-4}\cdot e^{-10^6 t} & 1.0 \end{bmatrix}.$$

Considerând condiții inițiale de zero, soluțiile ecuațiilor de stare, pentru circuitul din figura 6.1, au expresiile:

$$UC3(t) := 2196.2445\, e^{(-0.1000000010^7 t)} - 2196.2445\cos(0.6280000\, 10^7 t) + 349.72046\sin(0.6280000\, 10^7 t)$$

$$iL6(t) := -0.43924890\, e^{(-0.1000000010^7 t)} - 0.011137594\cos(0.6280000\, 10^7 t) + 5.5869104\sin(0.6280000\, 10^7 t) + 0.45038650$$

b. Calculul numeric al matricei de tranziție

Pentru matricea $\boldsymbol{A}$ de ordin ridicat prezintă importanță metodele de calcul care nu necesită determinarea valorilor proprii. Acest calcul se bazează pe dezvoltări în serii convergente (de exemplu, seria Taylor) şi aproximări succesive (Runge-Kutta, Peanno-Baker etc.).

Pentru un pas de timp $h = t_k - t_{k-1}$ se obține următoarea expresie a matricei de tranziție:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{h}} = e^{\boldsymbol{A}\mathrm{h}} = \boldsymbol{I}_n\left[1+\frac{h^n}{n!}b_{0,0}+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}b_{0,1}+\ldots+\frac{h^{n+p}}{(n+p)!}b_{0,p}+\ldots\right]+\\ +\boldsymbol{A}\left[\frac{h}{1!}+\frac{h^n}{n!}b_{1,0}+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}b_{1,1}+\ldots+\frac{h^{n+p}}{(n+p)!}b_{1,p}+\ldots\right]+\\ +\boldsymbol{A}^2\left[\frac{h^2}{2!}+\frac{h^n}{n!}b_{2,0}+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}b_{2,1}+\ldots+\frac{h^{n+p}}{(n+p)!}b_{2,p}+\ldots\right]+\\ +\ldots+\boldsymbol{A}^{n\text{-}1}\left[\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{h^n}{n!}b_{n-1,0}+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}b_{n-1,1}+\ldots+\frac{h^{n+p}}{(n+p)!}b_{n-1,p}+\ldots\right].\end{aligned} \tag{6.38}$$

Coeficienții $b_{0,0}$, $b_{1,0}$, ..., $b_{n\text{-}1,0}$, sunt cei ai ecuației caracteristice a matricei $\boldsymbol{A}$ scrisă în forma:

$$\lambda^n = b_{0,0} + b_{1,0}\lambda + b_{2,0}\lambda^2 + \ldots + b_{n-1,0}\lambda^{n-1}. \tag{6.39}$$

Ceilalți coeficienți de tipul $b_{0,p}$, $b_{1,p}$, ..., $b_{n\text{-}1,p}$ se determină cu următoarele relații de recurență:

$$\begin{aligned} b_{0,p} &= b_{0,0}b_{n-1,p-1}\\ b_{1,p} &= b_{1,0}b_{n-1,p-1}+b_{0,p-1}\\ b_{2,p} &= b_{2,0}b_{n-1,p-1}+b_{1,p-1}\\ &\vdots\\ b_{n-1,p} &= b_{n-1,0}b_{n-1,p-1}+b_{n-2,p-1}\end{aligned} \tag{6.40}$$

pentru p = 1, 2, 3, ...

6.3. METODA TRANSFORMATEI LAPLACE

6.3.1. Transformata Laplace

Fiind dată o funcţie de timp f(t) se defineşte transformata Laplace a acestei funcţii cu relaţia

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t, \tag{6.41}$$

unde $s=\alpha+j\omega$ este *frecvenţa complexă*.

Relaţia (6.41), numită transformata Laplace bilaterală, efectuează transformarea unei funcţii reale de timp într-o funcţie de frecvenţă complexă, $f(t)\to F(s)$.

Sistemele fizice pe care le studiem sunt sisteme cauzale, adică sisteme în care efectul nu precede niciodată cauza, fiind definite prin funcţii de timp de tipul $f(t)=0$ pentru $t<0$ şi $f(t)\neq 0$ pentru $t\geq 0$.

Fie funcţia $f(t)$ care satisface următoarele condiţii:

- este nulă în intervalul $-\infty<t<0_-$;
- este mărginită şi în orice interval finit $[t_1,t_2]$, $0<t_1<t_2$, are un număr finit de maxime, minime şi de discontinuităţi de speţa întâi;
- este absolut integrabilă în origine, adică $\int_{0_-}^{0_+}|f(t)|\mathrm{d}t<\infty$;
- există trei mărimi reale α_0, t_0 şi $A>0$ astfel încât $|f(t)|<Ae^{\alpha_0 t}$, pentru $t>t_0$;

Funcţia $f(t)$ care satisface aceste condiţii se numeşte *funcţie original* şi are o *imagine Laplace* definită de transformata Laplace unilaterală

$$F(s)=\mathrm{L}\{f(t)\}=\int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t. \tag{6.42}$$

Funcţia $F(s)$ există pentru orice $\mathrm{Re}\{s\}>\alpha_0$, unde α_0 este valoarea minimă pentru care este satisfăcută ultima condiţie. Valoarea min $\mathrm{Re}\{s\}=c_0$, pentru care integrala din (6.42) există, se numeşte *abscisă de convergenţă*.

Relaţia (6.42) este biunivocă, deoarece odată cunoscută funcţia F(s), aplicând transformata inversă se poate obţine funcţia original $f(t)\to \mathrm{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Limita inferioară de integrare permite aplicarea transformatei Laplace şi funcţiilor original cu salt în origine, cum sunt funcţia treaptă şi impulsul Dirac. Starea circuitului înainte de 0_- este luată în considerare prin condiţiile iniţiale, care sunt memorate de circuit în energia stocată în elementele dinamice.

Exemple

Aplicând definiţia imaginii Laplace să se calculeze:

1. Imaginea funcţiei treaptă unitate $f(t)=\gamma(t)=1(t)$.

$$F(s)=\int_{0_-}^{\infty}\gamma(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t=\int_{0_-}^{\infty}1(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{0_-}^{\infty}=\frac{1}{s}. \tag{6.43}$$

2. Imaginea funcţiei treaptă $f(t)=A1(t)$.

$$F(s)=\int_{0_-}^{\infty} A1(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = A\left(-\frac{1}{s}\right)e^{-st}\Big|_{0_-}^{\infty} = \frac{A}{s}. \tag{6.44}$$

1. Imaginea funcției treaptă retardată $f(t)=A1(t-\tau)$.

Deoarece $1(t-\tau)=0$ pentru $t<\tau$ şi cu schimbarea de variabilă $\xi = t-\tau$ rezultă:

$$F(s)=\int_{\tau}^{\infty} Ae^{-st}\,\mathrm{d}t = A\int_{0}^{\infty} e^{-s(\xi+\tau)}\,\mathrm{d}\xi = Ae^{-s\tau}\int_{0}^{\infty} e^{-s\xi}\,\mathrm{d}\xi = \frac{A}{s}e^{-s\tau}. \tag{6.45}$$

4. Imaginea funcției impuls Dirac $f(t)=\delta(t)$.

$$F(s)=\int_{0_-}^{\infty}\delta(t)\,e^{-st}\,\mathrm{d}t = \lim_{\Delta\to 0}\int_{0_-}^{\infty}\frac{1}{\Delta}\big(1(t)-1(t-\Delta)\big)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1-e^{-s\Delta}}{s\Delta}=1. \tag{6.46}$$

6.3.2. Teoremele transformatei Laplace

Transformata Laplace afectează atât funcțiile original cât şi operațiile cu aceste funcții. Corespondența dintre operațiile în domeniul t şi operațiile în domeniul s este descrisă de următoarele teoreme:

1. **Teorema combinațiilor liniare**: transformata Laplace a unei combinații liniare este combinația liniară a transformatelor individuale

$$\mathrm{L}\{c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t)\} = c_1F_1(s)+c_2F_2(s). \tag{6.47}$$

Demonstrație: folosind definiția transformatei Laplace se obține

$$\mathrm{L}\{c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t)\} = \int_{0_-}^{\infty}\left[c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t)\right]e^{-st}\,\mathrm{d}t = c_1\int_{0_-}^{\infty} f_1(t)\,e^{-st}\,\mathrm{d}t + c_2\int_{0_-}^{\infty} f_2(t)\,e^{-st}\,\mathrm{d}t =$$
$$= c_1\mathrm{L}\{f_1(t)\}+c_2\mathrm{L}\{f_2(t)\} = c_1F_1(s)+c_2F_2(s),$$

unde c_1 şi c_2 sunt constante reale sau complexe.

2. **Teorema derivatei unei funcții original:** dacă $F(s)=\mathrm{L}\{f(t)\}$, atunci

$$\mathrm{L}\left\{\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right\} = sF(s)-f(0_-). \tag{6.48}$$

Demonstrație: integrând prin părți rezultă

$$\mathrm{L}\left\{\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right\} = \int_{0_-}^{\infty}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}e^{-st}\,\mathrm{d}t = f(t)e^{-st}\Big|_{0_-}^{\infty} + s\int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = sF(s)-f(0_-).$$

Ca şi în cazul fazorilor, operația de derivare este schimbată în operație algebrică. În plus însă, transformata Laplace ia în considerare valoarea inițială a funcției.
Pentru derivata de ordin n se obține:

$$\mathrm{L}\left\{\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}\right\} = s^nF(s)-s^{n-1}f(0_-)-s^{n-2}f^{(1)}(0_-)-...-f^{(n-1)}(0_-). \tag{6.49}$$

Observație: Mai sus s-a demonstrat că $\mathrm{L}\{\gamma(t)\}=\frac{1}{s}$ şi dacă aplicăm teorema derivării obținem $\mathrm{L}\left\{\frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t}\right\} = s\frac{1}{s}-\gamma(0_-)=1$. Cum s-a demonstrat că $\mathrm{L}\{\delta(t)\}=1$, rezultă că $\delta(t)=\frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t}$.

Se poate demonstra simplu că

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}^n\delta(t)}{\mathrm{d}t^n}\right\} = s^n. \tag{6.50}$$

3. Teorema integrării unei funcții original: dacă $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, atunci

$$\mathcal{L}\left\{\int_{0_-}^{t} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right\} = \frac{F(s)}{s}. \tag{6.51}$$

Demonstrație: notând cu $f(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{0_-}^{t} f(\xi)\mathrm{d}\xi$ şi aplicând teorema derivării obținem

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{0_-}^{t} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right\} = s\mathcal{L}\left\{\int_{0_-}^{t} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right\} - \int_{0_-}^{0_-} f(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Cum ultima integrală este nulă, rezultă demonstrația teoremei.

4. Teorema retardării: pentru orice $\tau > 0$

$$\mathcal{L}\{f(t-\tau)\} = e^{-s\tau}F(s). \tag{6.52}$$

Demonstrație: aplicând schimbarea de variabilă $\xi = t - \tau$ $(\mathrm{d}\xi = \mathrm{d}t)$ se obține

$$\mathcal{L}\{\mathrm{f(t - \tau)}\} = \int_{0_-}^{\infty} f(t-\tau)e^{-st}\mathrm{d}t = \int_{\tau_-}^{\infty} f(\xi)e^{-s\tau}e^{-s\xi}\mathrm{d}\xi.$$

Deoarece f este o funcție original, $f(t-\tau) = f(\xi) = 0$ pentru $\tau > t$ $(\xi < 0)$ şi deci

$$\mathcal{L}\{\mathrm{f(t - }\tau)\} = e^{-s\tau}\int_{0_-}^{\infty} f(\xi)e^{-s\xi}\mathrm{d}\xi = e^{-s\tau}F(s).$$

5. Teorema translației variabilei complexe: dacă $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, atunci

$$F(s+a) = \mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\}. \tag{6.53}$$

Demonstrație: aplicând definiția transformatei Laplace se obține

$$\int_{0_-}^{\infty} e^{-at}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-(s+a)t}\mathrm{d}t = F(s+a).$$

6. Teorema convoluției în domeniul timpului: convoluția în domeniul t corespunde multiplicării în domeniul s, adică

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(s)F_2(s), \tag{6.54}$$

unde relația

$$f_1(t) * f_2(t) \overset{\mathrm{d}}{=} \int_{0_-}^{t} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{6.55}$$

definește produsul de convoluție a două funcții original $f_1(t)$ şi $f_2(t)$.

Demonstrație: Vom efectua produsul imaginilor celor două funcții sub forma

$$F_1(s)F_2(s)=\left(\int_{0_-}^{\infty} f_1(\tau)e^{-s\tau}\mathrm{d}\tau\right)F_2(s)=\int_{0_-}^{\infty} f_1(\tau)\left(e^{-s\tau}F_2(s)\right)\mathrm{d}\tau.$$

Folosind teorema retardării, relația devine

$$F_1(s)F_2(s)=\int_{0_-}^{\infty} f_1(\tau)\mathcal{L}\{f_2(t-\tau)\}\mathrm{d}\tau=\int_{0_-}^{\infty} f_1(\tau)\left(\int_{0_-}^{\infty} f_2(t-\tau)e^{-st}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\tau.$$

Ținând seama că funcția $f_2(t-\tau)=0$ pentru $\tau>t$, putem reduce limita superioară a integralei a doua de la ∞ la t şi schimbând ordinea de integrare se obține

$$F_1(s)F_2(s)=\int_{0_-}^{\infty}\left(\int_{0_-}^{t} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right)e^{-st}\mathrm{d}t=\int_{0_-}^{\infty}\left(f_1(t)*f_2(t)\right)e^{-st}\mathrm{d}t=\mathcal{L}\{f_1(t)*f_2(t)\}.$$

7. Teorema asemănării: dacă a este o constantă adimensională, există relația

$$\mathcal{L}\{f(at)\}=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right). \qquad (6.56)$$

Demonstrație: efectuând schimbarea de variabilă $\xi=at$, de unde rezultă $t=\xi/a$ şi $\mathrm{d}t=\mathrm{d}\xi/a,$ obținem

$$\mathcal{L}\{f(at)\}=\int_{0_-}^{\infty} f(at)e^{-st}\mathrm{d}t=\frac{1}{a}\int_{0_-}^{\infty} f(\xi)e^{-\frac{s\xi}{a}}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

8. Teorema valorii inițiale: dacă $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$, atunci

$$\lim_{s\to\infty} sF(s)=f(0_+). \qquad (6.57)$$

Demonstrație: folosind teorema derivării şi definiția transformatei Laplace obținem

$$\lim_{s\to\infty}\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right\}=\lim_{s\to\infty}\left(sF(s)-f(0_-)\right),$$

respectiv

$$\lim_{s\to\infty}\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right\}=\lim_{s\to\infty}\int_{0_-}^{\infty}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}e^{-st}\mathrm{d}t=\lim_{s\to\infty}\left[f(0_+)-f(0_-)+\int_{0_+}^{\infty}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}e^{-st}\mathrm{d}t\right].$$

Din cele două relații rezultă

$$\lim_{s\to\infty} sF(s)=\lim_{s\to\infty}\left(\int_{0_+}^{\infty}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}e^{-st}\mathrm{d}t+f(0_+)\right)=\lim_{s\to\infty} f(0_+)=f(0_+),$$

deoarece $f(0_+)$ este independentă de s.

9. Teorema valorii finale: dacă $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$, atunci

$$\lim_{s\to 0} sF(s)=f(\infty). \qquad (6.58)$$

Demonstrație: procedând ca mai sus, dar schimbând limita, se obține

$$\lim_{s\to 0}\left(sF(s)-f(0_-)\right)=\lim_{s\to 0}\int_{0_-}^{\infty}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}e^{-st}\mathrm{d}t=\int_{0_-}^{\infty}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=f(\infty)-f(0_-).$$

Cum $\lim_{s\to 0} f(0_-)=f(0_-)$, deoarece $f(0_-)$ este independentă de s, teorema este demonstrată.

Teoremele de mai sus arată că transformarea Laplace asigură reprezentarea ecuațiilor diferențiale ale circuitelor prin ecuații algebrice. Ea înlocuieşte rezolvarea sistemului de ecuații integro-diferențiale, satisfăcut de funcțiile original $f_k(t)$, cu rezolvarea unui sistem de ecuații algebrice satisfăcut de funcțiile imagine $F_k(s)$. Soluțiile de regim tranzitoriu $f_k(t)$ se obțin apoi din imaginile lor, $F_k(s)$, prin transformări inverse.

6.2.3. Transformata Laplace şi funcția de circuit

După cum s-a arătat în [1], imaginea răspunsului circuitului în condiții inițiale diferite de zero, poate fi pusă sub forma

$$X(s)=H(s)Y(s)+X_{vi}(s), \tag{6.59}$$

unde: $Y(s)$ este imaginea semnalului aplicat circuitului; $H(s)$ reprezintă funcția de transfer intrare-ieşire, în condiții inițiale de zero, exprimată ca o funcție rațională de s, cu coeficienți reali, depinzând numai de parametrii circuitului

$$H(s)=\left.\frac{X(s)}{Y(s)}\right|_{X_{vi}(s)=0}=\frac{N(s)}{D(s)}; \tag{6.60}$$

$X_{vi}(s)$ este o funcție rațională de s, depinzând de valorile inițiale ale variabilei şi care este nulă când acestea sunt nule

$$X_{vi}(s)=\frac{P_{vi}(s)}{D(s)}. \tag{6.61}$$

În relațiile de mai sus $N(s)$ şi $D(s)$ sunt polinoame în s cu coeficienți reali, de gradul m, respectiv n, $n > m$, iar $P_{vi}(s)$ este un polinom de gardul n-1 în s, constând în combinații liniare ale valorilor inițiale ale răspunsului $x(t)$ şi primelor sale (n-1) derivate.

Aplicând transformata Laplace inversă ecuației (6.59) se obține răspunsul circuitului sub forma

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}=x(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H(s)Y(s)\}+\mathcal{L}^{-1}\{X_{vi}(s)\}, \tag{6.62}$$

sau

$$x(t)=x_{\text{fortat}}+x_{\text{natural}}. \tag{6.63}$$

Prima componentă a răspunsului depinde numai de semnalul aplicat, indiferent de condițiile inițiale, în timp ce a doua componentă depinde numai de condițiile inițiale, indiferent de semnalul aplicat.

Rezultă deci că în cazul utilizării metodei transformatei Laplace, răspunsul complet al circuitului conține în mod explicit condițiile inițiale, spre deosebire de metoda de analiză cu ajutorul funcțiilor de circuit, în care condițiile inițiale intervin în mod implicit în valorile coeficienților componentei tranzitorii [1].

În cazul unui circuit în condiții inițiale nule, $(X_{vi}(s)=0)$, căruia i se aplică un semnal impuls Dirac $(y(t)=\delta(t)\Rightarrow Y(s)=1)$, răspunsul circuitului, numit răspuns la semnal impuls, este, conform relației (6.62)

$$x_\delta(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\cdot 1\} = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = h(t). \tag{6.64}$$

În consecință, în condiții inițiale nule, transformata Laplace inversă a funcției de circuit este egală cu răspunsul circuitului la semnal impuls.
Această concluzie atrage două interpretări:

1. Dacă se cunoaşte funcția de circuit $H(s)$, aplicându-i transformata Laplace inversă se obține răspunsul circuitului la semnal impuls

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = h(t) = x_\delta(t). \tag{6.65}$$

2. Dacă se cunoaşte răspunsul circuitului la semnal impuls, $x_\delta(t)$, se poate determina funcția de circuit aplicându-i transformata Laplace

$$\mathcal{L}\{x_\delta(t)\} = \mathcal{L}\{h(t)\} = H(s). \tag{6.66}$$

6.3.4. Convoluția

În cazul unui circuit cu condiții inițiale nule, ecuația (6.173) devine

$$X(s) = H(s)Y(s), \tag{6.67}$$

iar aplicarea transformatei Laplace inverse aduce problema din domeniul frecvenței complexe în domeniul timp cu relația

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)Y(s)\}. \tag{6.68}$$

Sunt situații în care se doreşte ca analiza circuitului să se facă numai în domeniul timp. În astfel de cazuri se foloseşte teorema convoluției, potrivit căreia

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)Y(s)\} = h(t) * y(t). \tag{6.69}$$

Ținând seama de relația (6.69), ecuația (6.68) devine

$$x(t) = h(t) * y(t) = \int_{0_-}^{t} h(\xi)y(t-\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{6.70}$$

sau, deoarece operația de convoluție este comutativă

$$x(t) = y(t) * h(t) = \int_{0_-}^{t} y(\xi)h(t-\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{6.71}$$

Cele două relații fiind echivalente, o vom aplica, desigur, pe cea care conduce la calculul mai simplu al integralelor.

În situația în care semnalul aplicat, $y(t)$, ori răspunsul la impuls, $h(t)$, sunt cunoscute numai prin date experimentale, deci nu li se poate aplica transformata Laplace, se foloseşte convoluția numerică [5].

6.3.5. Ecuațiile operaționale ale circuitelor electrice

Pentru a formula ecuațiile circuitului direct în formă algebrică, evitând formularea ecuațiilor integro-diferențiale, vom analiza modul în care transformata Laplace afectează ecuațiile constitutive ale elementelor de circuit.

În cazul rezistorului această ecuație este $u(t) = Ri(t)$. Aplicând transformata Laplace ambilor termeni se obține relația

$$U(s) = RI(s). \tag{6.72}$$

care corespunde modelului operațional din figura 6.2,a.

Ecuația constitutivă a bobinei este $u(t) = L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$ şi aplicând teorema derivării rezultă

$$U(s) = sLI(s) - Li_L(0_-), \tag{6.73}$$

sugerând un model în domeniul s constând într-o impedanță sL în serie cu o sursă de tensiune de valoare $Li_L(0_-)$ conectate ca în figura 6.2,b. Prelucrând relația în funcție de curent se obține relația

$$I_L(s) = \frac{U(s)}{sL} + \frac{i_L(0_-)}{s}, \tag{6.74}$$

care sugerează modelul alternativ cu sursă de curent $i_L(0_-)/s$ în paralel cu impedanța sL.

Pentru condensator, ecuația constitutivă fiind $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$ se obține ecuația

$$I(s) = sCU_C(s) - Cu_C(0_-), \tag{6.75}$$

corespunzând modelului operațional din figura 6.2,c, cu sursa de curent $Cu_C(0_-)$ în paralel cu impedanța $1/sC$. În funcție de tensiune, ecuația (6.75) devine

$$U_C(s) = \frac{I(s)}{sC} + \frac{u_C(0_-)}{s}, \tag{6.76}$$

sugerând modelul alternativ cu sursă de tensiune $u_C(0_-)/s$ în serie cu impedanța $1/sC$.

Pentru două bobine cuplate magnetic (cuplaj pozitiv), ecuațiile constitutive sunt

$$u_1(t) = L_1\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t},\ \ u_2(t) = L_2\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{6.77}$$

Aplicând transformata Laplace ele capătă forma

$$\begin{aligned} U_1(s) &= sL_1I_1(s) + sMI_2(s) - \left(L_1i_1(0_-) + Mi_2(0_-)\right) \\ U_2(s) &= sL_2I_2(s) + sMI_1(s) - \left(L_2i_2(0_-) + Mi_1(0_-)\right), \end{aligned} \tag{6.78}$$

conducând la modelul operațional din figura 6.2, d.

În consecință în modelele operaționale ale elementelor de circuit intervin *impedanțele operaționale* ale acestora în forma

$$Z_R(s) = R,\ \ Z_L(s) = sL,\ \ Z_C(s) = \frac{1}{sC} \tag{6.79}$$

şi termenii

$$E_L(s) = Li_L(0_-),\ \ E_M(s) = Mi_L(0_-),\ \ E_C(s) = \frac{u_C(0_-)}{s}, \tag{6.80}$$

sau

$$J_L(s) = \frac{i_L(0_-)}{s},\ \ J_C(s) = Cu_C(0_-), \tag{6.81}$$

reprezentând *surse fictive* de tensiune, respectiv de curent corespunzătoare valorilor inițiale nenule ale elementelor dinamice de circuit.

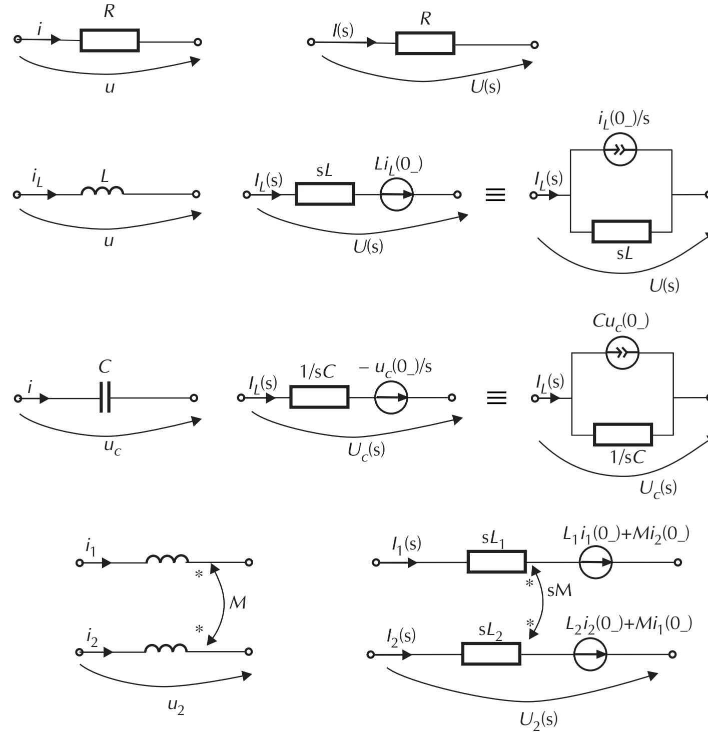


Fig. 6.2. Schemele operaţionale ale elementelor de circuit.

Funcţiile imagine $E_L(s), E_M(s)$ şi $J_C(s)$ corespund unor funcţii original de forma unor impulsuri Dirac:

$$e_L(t) = \mathrm{L}^{-1}\{E_L(s)\} = Li_L(0_)\delta(t)\,;\;\; e_M(t) = \mathrm{L}^{-1}\{E_M(s)\} = Mi(0_)\delta(t)\,;$$
$$j_C(t) = \mathrm{L}^{-1}\{J_C(s)\} = Cu_C(0_)\delta(t), \tag{6.82}$$

care modelează salturile bruşte ale tensiunilor la bornele bobinelor, respectiv ale curenţilor prin condensatoare, în timp ce funcţiile imagine $E_C(s)$ şi $J_L(s)$ corespund unor funcţii original de forma unui semnal treaptă:

$$e_C(t) = \mathrm{L}^{-1}\{E_C(s)\} = u_C(0_)\gamma(t)\,,\;\; j_L(t) = \mathrm{L}^{-1}\{J_L(s)\} = i_L(0_)\gamma(t). \tag{6.83}$$

După cum se observă, în metoda operaţională de analiză a circuitelor electrice, ca şi în metoda simbolică utilizată în studiul regimului sinusoidal, elementelor de circuit li se asociază scheme echivalente în care elementele de circuit se caracterizează prin impedanţele operaţionale $Z(s)$. Dacă se înlocuieşte s cu $j\omega$, se obţin impedanţele complexe $\underline{Z}(j\omega)$.

Prin urmare ecuaţiile operaţionale ale circuitelor electrice sunt perfect analoge ecuaţiilor complexe şi deci metodele prezentate în cadrul metodei simbolice se extind şi pentru metoda operaţională.

Pentru o latură de circuit cu structura reprezentată în figura 6.3, schema echivalentă operaţională este cea din figura 6.4, iar ecuaţia caracteristică a laturii are forma:

$$U_k(s)=\left(R_k+sL_k+\frac{1}{sC_k}\right)I_k(s)+\sum_{p=1,p\neq k}^{l}sL_{kp}I_p(s)-\left[E_k(s)+L_{kp}i_k(0_-)+\sum_{p=1,p\neq k}^{l}L_{kp}i_p(0_-)-\frac{u_{Ck}(0_-)}{s}\right]$$
$$-\left[E_k(s)+L_k i_k(0_-)+\sum_{p=1,p\neq k}^{l}L_{kp}i_p(0_-)-\frac{u_{C_k}(0_-)}{s}\right]. \tag{6.84}$$

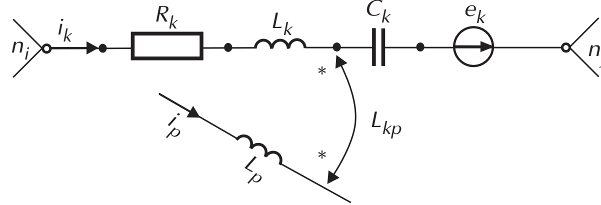


Fig. 6.3. Structura standard a laturii de circuit.

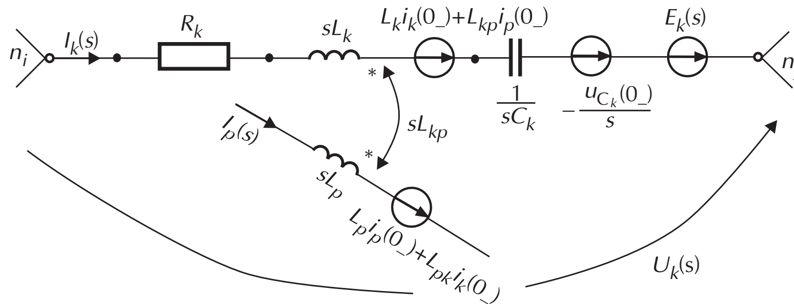


Fig. 6.4. Schema operațională a laturii de circuit.

Aplicând transformata Laplace ecuațiilor lui Kirchhoff în valori instantanee, şi ținând seama de proprietățile acestei transformate (§ 6.3.2), sau aplicând direct teoremele lui Kirchhoff în schema echivalentă operațională a circuitului, se obține următoarea formă operațională a acestor ecuații:

TK I

$$\sum_{l_k\in(n_j)}I_k(s)=0,\qquad j=\overline{1,n-1} \tag{6.85}$$

TK II

$$\sum_{l_k\in(b_h)}\left[\left(R_k+sL_k+\frac{1}{sC_k}\right)I_k(s)+\sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{l}sL_{kp}I_p(s)+U_{j_k}(s)+U_{j_{ck}}(s)-E_{C_k}(s)\right]=$$
$$=\sum_{l_k\in(b_h)}\left[E_k(s)+L_k i_k(0_-)+\sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{l}L_{kp}i_p(0_-)-\frac{u_{C_k}(0_-)}{s}\right],\qquad h=\overline{1,b}. \tag{6.86}$$

Mărimile $I_k(s), U_{j_k}(s), U_{j_{ck}}(s)$ şi $E_{ck}(s)$ reprezintă imaginile Laplace ale curenților de laturi, tensiunilor surselor independente de curent, tensiunilor surselor de curent comandate şi respectiv, tensiunilor electromotoare ale surselor de tensiune comandate.

Mărimea

$$Z_k(s) \overset{d}{=} R_k + sL_k + \frac{1}{sC_k} \tag{6.86}$$

este *impedanța operațională* a laturii.

Observație

Toate metodele de analiză prezentate la circuitele de c.a. în complex se pot aplica, ținând seama de schemele echivalente în operațional ale elementelor de circuit (fig. 6.1), şi la calculul circuitelor electrice în operațional şi anume:

- Metoda teoremelor lui Kirchhoff în operațional;
- Metoda curenților de buclă în operațional;
- Metoda nodală („clasică”) în operațional;
- Metoda nodală modificată în operațional.

6.3.6. Transformarea Laplace inversă

Trecerea din domeniul funcțiilor imagine $F_k(s)$ în domeniul funcțiilor original $f_k(t)$ se poate face fie pe bază de tabele de corespondență (tab. 6.1) completate cu utilizarea teoremelor satisfăcute de transformata Laplace, fie cu ajutorul unor formule de inversiune.

Tabelul 6.1

Funcția original $f(t)$	Imaginea Laplace $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
$e^{\pm at}$	$\frac{1}{s \mp a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\frac{1}{b-a}\left(e^{-at} - e^{-bt}\right)$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
$\frac{1}{ab} + \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{b}e^{-bt} - \frac{1}{a}e^{-at}\right)$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
$\frac{1}{b-a}\left(be^{-bt} - ae^{-at}\right)$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
sh at	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
ch at	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$\sin(\omega t + \alpha)$	$\frac{1}{s^2 + \omega^2}(s \sin \alpha + \omega \cos \alpha)$
$\cos(\omega t + \alpha)$	$\frac{1}{s^2 + \omega^2}(s \cos \alpha - \omega \sin \alpha)$

$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{\left(s^2+a^2\right)+\omega^2}$
$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{\left(s^2+a^2\right)+\omega^2}$
$t\sin\omega t$	$\frac{2\omega s}{\left(s^2+a^2\right)^2}$
$t\cos\omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}$
$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
$\delta(t - T)$	e^{-sT}
$\gamma(t - T)$	$\frac{1}{s}e^{-sT}$
$\gamma(t-T)e^{-a(t-T)}$	$\frac{1}{s+a}e^{-sT}$
$\sin^2 t$	$\frac{2}{s\left(s^2+4\right)}$
$\cos^2 t$	$\frac{s^2+2}{s\left(s^2+4\right)}$
$\frac{t}{2a}\sin at$	$\frac{s^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}$
$\frac{1}{t}\sin at$	$arctg\,\frac{a}{s}$
$\frac{1}{2a}(\sin at + at\cos at)$	$\frac{s^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{a^2}{4t}}, a \geq 0$	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-a\sqrt{s}}$
$1-erf\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right), a \geq 0$, unde erf este funcția erorilor: $erf(x) \overset{d}{=} \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$	$\frac{1}{s}e^{-a\sqrt{s}}$
$1+e^{a^2t}\left[erf\left(a\sqrt{t}\right)-1\right]$	$\frac{1}{s\left(\sqrt{s}+a\right)}$
$erf\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{1}{s}\left(1-e^{-a\sqrt{s}}\right)$

$J_0(at)$ unde $J_n(x) \overset{d}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\alpha - x\sin\alpha)\mathrm{d}\alpha$ este funcţia Bessel de prima speţă şi ordinul n.	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$ $\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}\left(\sqrt{s^2+a^2}-s\right)^n$

1. Formula Mellin-Fourier

Această metodă de inversiune este folosită în cazul general când $F(s)$ este dată în semiplanul $\mathrm{Re}\{s\} \geq c_0$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c_0-j\infty}^{c_0+j\infty} F(s)e^{st}\mathrm{d}s, \tag{6.87}$$

integrala făcându-se de-a lungul dreptei $\mathrm{Re}\{s\} = c_0$ care lasă la stânga ei toate singularităţile funcţiei $F(s)$.

2. Formulele lui Heaviside

Cunoscând funcţia imagine $F(s)$, se determină funcţia original aplicând transformata inversă $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$. $F(s)$ este o funcţie raţională de s care poate fi pusă sub forma raportului a două polinoame. Dacă coeficienţii polinomului de la numitor sunt ≥ 0, atunci rădăcinile lui, numite poli ai lui $F(s)$ se vor găsi în jumătatea stângă a planului s sau, cel mult pe axa imaginară (nu şi în jumătatea dreaptă). Aceşti poli pot fi reali sau complecşi, distincţi sau multipli. Tehnicile de determinare a inversei transformatei Laplace depind de tipul polilor lui $F(s)$.

Fie funcţia imagine

$$F(s) = \frac{M(s)}{N(s)}. \tag{6.88}$$

Cele două polinoame nu au divizori comuni $(s - s_k)$, iar gradul polinomului $M(s)$ este mai mic decât gradul lui $N(s)$.

- prima formulă a lui Heaviside (când N(s) are n rădăcini simple diferite nenule) este

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{M(s)}{N(s)}\right\} = \sum_{k=1}^{n}\frac{M(s_k)}{N'(s_k)}e^{s_k t}; \tag{6.89}$$

- a doua formulă Heaviside (în cazul în care numitorul funcţiei $F(s)$ are un pol în origine şi $n-1$ rădăcini simple nenule) are expresia:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{M(s)}{sN_1(s)}\right\} = \frac{M(0)}{N_1(0)} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{M(s_k)}{s_k N_1'(s_k)}e^{s_k t}; \tag{6.90}$$

- formula generală a lui Heaviside - când polinomul $N(s)$ are m rădăcini, fiecare rădăcină s_k având ordinul de multiplicitate m_k:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{M(s)}{N(s)}\right\} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m_k} a_{kj}\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}e^{s_k t}, \tag{6.91}$$

unde:

$$a_{kj} = \frac{1}{(m_k - j)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{m_k - j}}{\mathrm{d}s^{m_k - j}} \frac{(s - s_k)^{m_k} M(s)}{N(s)}\right]_{s=s_k}. \qquad (6.92)$$

Algoritmul de aplicare al metodei operaționale generale

1. Se calculează regimul permanent anterior declanşării regimului tranzitoriu ($t < t_0$). Se obțin astfel soluțiile: $i_{L_k}(0_-)$ şi $u_{C_k}(0_-)$. Dacă momentul inițial t_0 este diferit de zero, atunci se efectuează o schimbare a originii timpului $t' = t - t_0$, deoarece transformata Laplace unilaterală este definită pentru $t \geq 0$.
2. Se construieşte schema operațională a circuitului, corespunzătoare structurii acestuia la momentul 0_+ care va conține impedanțele operaționale ale elementelor pasive de circuit, imaginile Laplace ale surselor independente de tensiune şi de curent şi sursele "fictive" corespunzătoare condițiilor inițiale nenule $i_{L_k}(0_-)$ şi $u_{C_k}(0_-)$.
3. Se selectează, în funcție de structura şi complexitatea schemei operaționale echivalente obținută la pasul 2, metoda de analiză cea mai adecvată si cea mai eficientă (cum ar fi: utilizarea ecuațiilor Kirchhoff în operațional, metoda curenților de buclă în operațional, metoda nodală clasică sau metoda nodală modificată în operațional, teorema superpoziției, metoda transfigurărilor, metode de tip tablou etc.) pentru determinarea imaginilor Laplace ale funcțiilor necunoscute (de regulă variabilele de stare ale circuitului: $I_{L_k}(s)$ şi $U_{C_k}(s)$).
4. Se determină funcțiile original necunoscute cu una din metodele de transformare inversă.

Observație

Exprimarea surselor fictive în funcție de condițiile inițiale la 0_- prezintă avantajul că, evitând aplicarea proprietăților de continuitate, simplifică analiza circuitelor cu elemente în exces, pentru care determinarea condițiilor la 0_+ ar presupune aplicarea relațiilor (6.8) şi (6.9).

Exemplul 6.2. Circuitul din figura P.6.5,a funcționează în regim permanent cu întrerupătorul K deschis. La momentul $t_0 = 0$, K se închide. Ştiind că: $R = 2\Omega, L = 4\text{mH}, C = 1\text{mF}$ şi $E = 8\text{V}$, să se determine variația curentului prin bobină şi a tensiunii la bornele condensatorului în regimul tranzitoriu care apare.

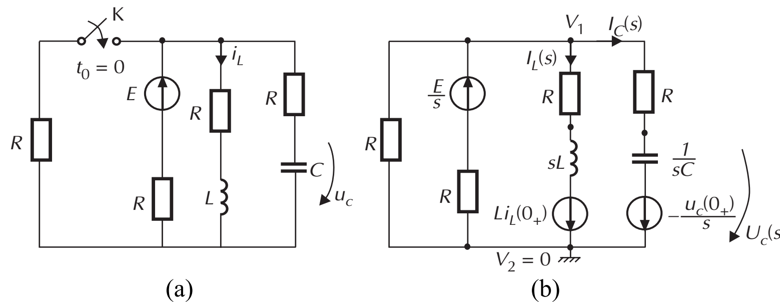


Fig. 6.5. a) Schema circuitului; b) Schema echivalentă în operațional.

Se calculează regimul permanent la $t_0 < 0$ (ținând seama că în c.c. bobina reprezintă un scurtcircuit iar condensatorul o întrerupere) şi se obține $I_L = E/2R = 2\text{A}$, respectiv $U_C = RI_L = 4\text{V}$. Deci condițiile inițiale sunt:

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) = 2\text{A}, \quad u_C(0_-) = u_C(0_+) = 4\text{V},$$

iar schema echivalentă operațională a circuitului este cea reprezentată în figura 6.5,b.

Aplicând metoda potențialelor nodurilor se obține ecuația:

$$V_1(s)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R}+\frac{1}{R+sL}+\frac{1}{R+1/sC}\right)=\frac{E}{sR}-\frac{Li_L(0_+)}{R+sL}+\frac{u_C(0_+)}{s(R+1/sC)} \quad ,$$

din care, prin înlocuirea valorilor numerice, rezultă $V_1(s)=8/3s$.

Se calculează apoi curentul prin bobină:

$$I_L(s)=\frac{V_1-V_2+Li_L(0_+)}{R+sL}=\frac{(8/3s)+8\cdot 10^{-3}}{2+4\cdot 10^{-3}s}=\frac{4}{3s}+\frac{2}{3(s+500)} .$$

Pentru calculul tensiunii la bornele condensatorului se determină succesiv:

$$I_C(s)=\frac{V_1-V_2-u_C(0_+)/s}{R+1/sC}=-\frac{2}{3(s+500)},$$

respectiv

$$U_C(s)=I_C(s)\frac{1}{sC}+\frac{u_C(0_+)}{s}=\frac{8}{3s}+\frac{4}{3(s+500)} \quad .$$

Aplicând transformarea inversă Laplace, se obține:

$$\mathrm{i_L(t)}=\frac{4}{3}\gamma(\mathrm{t})+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-500\mathrm{t}}\gamma(\mathrm{t}) \quad \text{și} \quad \mathrm{u_C(t)}=\frac{8}{3}\gamma(\mathrm{t})+\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-500\mathrm{t}}\gamma(\mathrm{t}) \quad .$$

Observație (consecință a teoremei valorii inițiale, respectiv finale):

1. pentru t = 0 relațiile de mai sus verifică valorile condițiilor inițiale;

2. pentru $t\to\infty$ se obțin valorile de regim permanent ale curentului prin bobină și tensiunii la bornele condensatorului.

6.3.7. Metoda separării componentelor tranzitorii și permanente

Metoda separării componentelor tranzitorii și permanente este o variantă a metodei operaționale de mai sus, din care derivă pe baza teoremei superpoziției. Deoarece componenta permanentă se calculează ușor din regimul permanent, se poate opta pentru separarea calculului celor două componente. Pe de altă parte această separare este foarte convenabilă în cazul analizei regimurilor tranzitorii în circuitele electrice liniare care conțin surse independente de tensiune sau/și de curent variabile în timp sinusoidal, a căror prezență complică rezolvarea schemelor echivalente operaționale (imaginea Laplace a funcției *sinus* are numitorul de gradul doi).

Astfel componenta permanentă a soluției generale, care este determinată de sursele reale independente ale circuitului, se obține prin rezolvarea schemei corespunzătoare regimului permanent pentru $t>t_0$. Componenta tranzitorie se determină cu ajutorul calculului operațional pe o schemă operațională echivalentă în care sursele independente reale ale circuitului sunt pasivizate, rămânând doar sursele independente "fictive" corespunzătoare condițiilor inițiale ale acestei componente:

$$i_{Lt}(0_+)=i_L(0_+)-i_{Lp}(0_+),\ \ u_{Ct}(0_+)=u_C(0_+)-u_{Cp}(0_+). \tag{6.93}$$

În ecuațiile de mai sus s-a făcut schimbarea de variabilă $t'=t-t_0$.

Algoritmul de aplicare al metodei este:

1. Se rezolvă regimul permanent pentru $t < t_0$, obținând soluțiile $i_{L_k}(0_-)$ şi $u_{C_k}(0_-)$ pentru toate bobinele şi condensatoarele din circuit. În conformitate cu teoremele de continuitate se determină valorile $i_{L_k}(0_+)$ şi $u_{C_k}(0_+)$.

2. Se rezolvă regimul permanent pentru $t > t_0$. Se obțin astfel, componentele permanente ale soluției generale $i_{Lp}(t)$ şi $u_{Cp}(t)$ pentru toate bobinele şi toate condensatoarele circuitului.

3. Se determină cu relațiile (6.93), condițiile inițiale ale componentelor tranzitorii, unde $i_{Lp}(0_+)$ şi $u_{Cp}(0_+)$ se obțin prin particularizarea valorilor rezultate la pasul 2.

4. Se realizează schema echivalentă operațională pentru componentele tranzitorii. Aceasta va conține impedanțele operaționale ale elementelor pasive de circuit şi sursele fictive corespunzătoare condițiilor inițiale de la pasul 3, sursele independente reale ale circuitului fiind pasivizate.

5. Se analizează, printr-o metodă de analiză adecvată, schema operațională de la pasul 4 şi se obțin imaginile Laplace ale componentelor tranzitorii $I_{Lt}(s)$ şi $U_{Ct}(s)$.

6. Utilizând o metodă de inversiune convenabilă se obțin funcțiile original $i_{Lt}(\mathrm{t})$ şi $u_{Ct}(t)$, apoi prin aplicarea teoremei superpoziției rezultă soluțiile generale ale regimului tranzitoriu analizat:

$$i_L(t) = i_{Lp}(t) + i_{Lt}(t), \quad u_C(t) = u_{Cp}(t) + u_{Ct}(t) \tag{6.94}$$

unde componentele $i_{Lp}(\mathrm{t})$ şi $u_{Cp}(t)$ sunt cele determinate la pasul 2.

Exemplul 6.3. După ce circuitul din figura 6.6,a, a funcționat un timp îndelungat cu comutatorul K deschis, acesta se închide la un moment $t_0 = 0$. Cunoscând valorile parametrilor $R = X_L = X_C = 10\Omega$ şi ale surselor $j(t) = 4 + 2\sqrt{2}\cos\omega t$ A, respectiv $e(t) = 10 + 10\sqrt{2}(\sin\omega t - \pi/2)$V, $\omega = 10^3$ rad/s, se cere variația curentului prin bobină şi a tensiunii la bornele condensatorului pentru $t > t_0$.

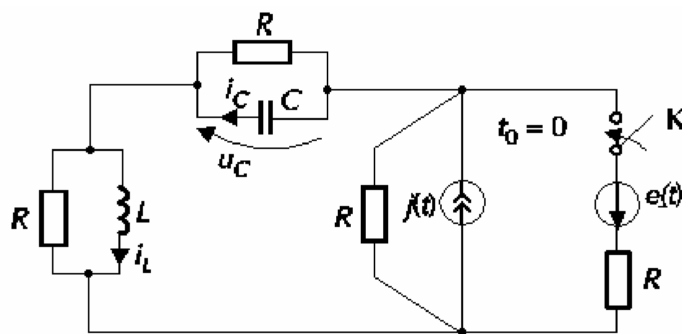


Fig. 6.6,a. Schema inițială a circuitului.

Se studiază regimul de funcționare al circuitului la $t < 0$. Se obține în c.c.:

$$I_L^0 = J^0/2 = 2\text{ A}$$

$$U_C^0 = RJ^0/2 = 20\text{V},$$

iar în c.a.:

$$\underline{I}_L^1 = \frac{\underline{J}}{2}\frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\frac{\pi}{4}} \text{ şi } \underline{U}_C^1 = \left(-j\frac{1}{\omega C}\right)\underline{I}_C^1 = 5\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}.$$

Soluția regimului permanent va fi deci:

$$i_L(t) = I_L^0 + i_L^1(t) = 2 + \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)\text{A şi } u_C(t) = U_C^0 + u_C^1(t) = 20 + 10\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)\text{V}.$$

La momentul $t = t_0 = 0$, valorile acestor mărimi sunt:

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\text{A} \quad \text{şi} \quad u_C(0_-) = u_C(0_+) = 20 + 10\frac{\sqrt{2}}{2}\text{V}.$$

Pentru analiza regimului tranzitoriu care apare la $t_0 = 0$, vom folosi metoda separării componentelor tranzitorii de cele permanente. Vom calcula regimul permanent al circuitului după comutare, observând că este un regim nesinusoidal.

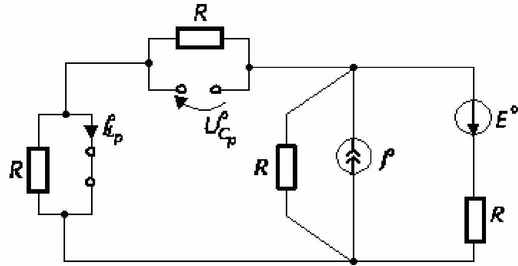


Fig. 6.6,b. Schema circuitul corespunzătoare componentelor continuii.

Rezolvând schema în c.c. din figura 6.6,b, pe baza teoremei superpoziției, se obține:

$$I_{Lp}^0 = I_{Lp}^0\big|_{E^0=0} + I_{Lp}^0\big|_{J^0=0} = \frac{J^0}{3} - \frac{E^0}{3R} = 1\,\text{A},$$

$$U_{Cp}^0 = RI_{Lp}^0 = 10\,\text{V}.$$

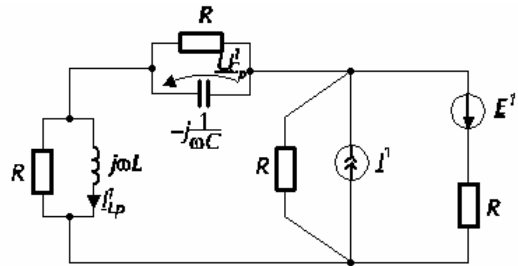


Fig. 6.6,c. Schema circuitul în complex corespunzătoare armonicilor de ordinul 1.

Pentru a rezolva regimul de c.a. se folosește schema din figura 6.6,c şi metoda superpoziției:

$$\underline{I}_1^1 = \underline{I}_1^1\big|_{\underline{E}^1=0} + \underline{I}_1^1\big|_{\underline{J}^1=0} = \frac{\underline{J}^1}{3} - \frac{\underline{E}^1}{3R} = e^{j\pi/2}.$$

Cu regula divizorului de curent se obține:

$$\underline{I}_{Lp}^1 = \underline{I}_1^1 \frac{R}{R + j\omega L} = e^{j\pi/2}\frac{10}{10(1+j)} =$$

$$= \frac{e^{j\pi/2}}{\sqrt{2}e^{j\pi/4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\pi/4}.$$

$$\underline{I}_{Cp}^1 = \underline{I}_1^1 \frac{R}{R - j\frac{1}{\omega C}} = e^{j\pi/2}\frac{10}{10(1-j)} = \frac{e^{j\pi/2}}{\sqrt{2}e^{-j\pi/4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j3\pi/4},$$

$$\underline{U}_{Cp}^1 = \underline{I}_{Cp}^1\left(-j\frac{1}{\omega C}\right) = \frac{10}{\sqrt{2}}e^{j\pi/4}.$$

Soluția regimului nesinusoidal este:

$$i_{Lp}(t) = I_{Lp}^0 + i_{Lp}^1(t) = 1 + \sin(\omega t + \pi/4)\text{A}, \quad u_{Cp}(t) = U_{Cp}^0 + u_{Cp}^1(t) = 10 + 10\sin(\omega t + \pi/4)\text{V}.$$

Condițiile inițiale pentru componentele tranzitorii sunt:

$$i_{Lt}(0_+) = i_L(0_+) - i_{Lp}(0_+) = 1\,\text{A}, \quad u_{Ct}(0_+) = u_C(0_+) - u_{Cp}(0_+) = 10\,\text{V},$$

iar schema operațională pentru calculul componentelor tranzitorii este prezentată în figura.6.6,d.

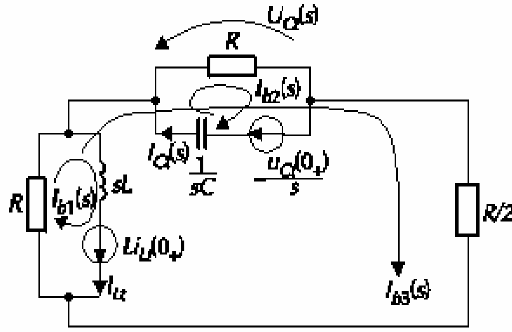


Fig. 6.6,d. Schema circuitul în operațional.

Aplicând metoda curenților de buclă se obține sistemul:

$$I_1(R+sL)+I_3R = Li_{Lt}(0_+)$$
$$I_2\left(R+\frac{1}{sC}\right)+I_3R = -\frac{u_{Ct}(0_+)}{s}$$
$$I_3(2R+R/2)+I_1R+I_2R = 0\,.$$

Înlocuind numeric şi rezolvând rezultă:

$$I_{Lt}(s) = I_{b_1}(s) = \frac{2500}{\left(s+10^3\right)^2}+\frac{47}{12\left(s+10^3\right)}-\frac{35}{12(s+600)},\quad I_{Ct}(s) = I_{b_2}(s) = \frac{7\cdot 10^{-2}s-30}{3\cdot 10^{-2}\left(s+10^3\right)^2}.$$

Imaginea componentei tranzitorii a tensiunii la bornele condensatorului este:

$$U_{Ct}(s) = I_{Ct}(s)\frac{1}{sC}+\frac{u_{Ct}(0_+)}{s} = \frac{10^5}{3\left(s+10^3\right)^2}+\frac{10}{s+10^3}.$$

Aplicând transformata Laplace inversă se obține:

$$i_{Lt}(t) = 2500te^{-10^3t}+\frac{47}{12}e^{-10^3t}-\frac{35}{12}e^{-600t}\quad \text{şi}\quad u_{Ct}(t) = \frac{10^5}{3}te^{-10^3t}+10e^{-10^3t}.$$

Răspunsul de regim tranzitoriu al circuitului este deci:

$$i_L(t) = i_{Lp}(t)+i_{Lt}(t) = 1+\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)+2500te^{-10^3t}+\frac{47}{12}e^{-10^3t}-\frac{35}{12}e^{-600t},$$

$$u_C(t) = u_{Cp}(t)+u_{Ct}(t) = 10+10\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{10^5}{3}te^{-10^3t}+10e^{-10^3t}.$$

6.5.8. Metoda nodală modificată

În cazul metodei nodale modificate (MNM) se consideră ca variabile independente vectorul transformatelor Laplace ale potențialelor electrice corespunzătoare celor n - 1 noduri independente ale circuitului analizat - $\boldsymbol{V}_{n-1}(s)$ şi vectorul transformatelor Laplace ale curenților elementelor de circuit (laturilor) necompatibile cu metoda nodală clasică - $\boldsymbol{I}_m(s)$.

Dacă fiecare latură a circuitului analizat se consideră formată dintr-un singur element dipolar de circuit sau dintr-o poartă (latură) de comandă sau comandată a unei surse comandate, atunci vectorul curenților $\boldsymbol{I}_m(s)$ are structura:

$$\boldsymbol{I}_m(s) = \left[(\boldsymbol{I}_e(s))^t,(\boldsymbol{I}_{e_c}(s))^t,(\boldsymbol{I}_{eC}(s))^t,(\boldsymbol{I}_{jC}(s))^t,(\boldsymbol{I}_L(s))^t\right]^t, \tag{6.95}$$

unde: $\boldsymbol{I}_e(s)$ - este vectorul imaginilor Laplace ale curenților surselor ideale independente de tensiune: $\boldsymbol{I}_{e_c}(s)$ - reprezintă vectorul transformatelor Laplace ale curenților (porților) comandate ale surselor de tensiune comandate (în curent sau în tensiune); $\boldsymbol{I}_{eC}(s)$ - este vectorul imaginilor Laplace ale curenților laturilor (porților) de comandă ale surselor de tensiune comandate în curent; $\boldsymbol{I}_{jC}(s)$ - reprezintă vectorul transformatelor Laplace ale

curenților (porților) de comandă ale surselor de curent comandate în curenrt și $\boldsymbol{I}_L(s)$ - este vectorul transformatelor Laplace ale curenților bobinelor (cuplate sau nu magnetic).
Ecuațiile matriceale în operațional ale circuitului, corespunzătoare MNM au forma:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}_{n-1,n-1}(s) & \boldsymbol{B}_{n-1,m}(s) \\ \boldsymbol{A}_{m,n-1}(s) & \boldsymbol{Z}_{m,m}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_{n-1}(s) \\ \boldsymbol{I}_m(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{sc,n-1}(s) \\ \boldsymbol{E}_m(s) \end{bmatrix}, \tag{6.96}$$

unde: $\boldsymbol{Y}_{n-1,n-1}(s)$ - este matricea admitanțelor operaționale nodale ale circuitului care are dimensiunea (n-1) × (n-1); $\boldsymbol{B}_{n-1,m}(s)$ - o matrice de dimensiunea (n-1) × m care conține ca elemente numerele -1, 0, 1 și coeficienții de transfer (amplificare) în curent ai surselor de curent comandate în curent; $\boldsymbol{A}_{m,n-1}(s)$ - o matrice de dimensiunea m × (n-1) care conține ca elemente numerele -1, 0, 1 și coeficienții de transfer (amplificare) în tensiune ai surselor de tensiune comandate în tensiune (dacă circuitul analizat este reciproc $\boldsymbol{A}_{m,n-1}(s)$ = $\left(\boldsymbol{B}_{n-1,m}(s)\right)^{\mathrm{t}}$); $\boldsymbol{Z}_{m,m}(s)$ - este o matrice pătratică de ordinul m care conține transimpedanțele operaționale ale surselor de tensiune comandate în curent și impedanțele operaționale cu semn schimbat ale bobinelor; $\boldsymbol{I}_{sc,n-1}(s)$ - vectorul curenților de scurtcircuit operaționali injectați în cele n -1 noduri independente ale circuitului (inclusiv cei rezultați din sursele fictive care simulează condițiile inițiale ale circuitului) și $\boldsymbol{E}_{m,m}(s)$ reprezintă vectorul transformatelor Laplace cu semn schimbat ale t.e.m. ale surselor independente de tensiune și ale t.e.m. corespunzătoare surselor ideale fictive independente de tensiune prin care sunt simulate condițiile inițiale ale curenților prin bobine.

Notând cu V_+ și V_- potențialele electrice ale nodului din care pleacă, respectiv intră sensul curentului, contribuția principalelor elemente de circuit la matricea și termenul liber ale ecuațiilor nodale modificate este:

- *Sursa ideală independentă de tensiune* $E_k(s)$*:*

$$\left(l_{e_k}\right): V_{k+}(s) - V_{k-}(s) = -E_k(s).$$

	V_{k+}	V_{k-}	I_k	$T.l.$
V_{k+}			$+1$	
V_{k-}			-1	
I_k	$+1$	-1		$-E_k(s)$

- *Sursa ideală independentă de curent* $J_k(s)$*:*

$$\left(n_{k+}\right): \ldots = -J_k(s); \quad \left(n_{k-}\right): \ldots = J_k(s).$$

	V_{k+}	V_{k-}	$T.l.$
V_{k+}			$-J_k(s)$
V_{k-}			$J_k(s)$

- *Sursa ideală de tensiune comandată în curent* $\hat{E}_c(I_C)$:

$$\left(l_C\right): V_{C+}(s) - V_{C-}(s) = 0; \quad \left(l_c\right): V_{c+}(s) - V_{c-}(s) + Z_{c_C}(s) I_C(s) = 0.$$

	V_{C+}	V_{C-}	V_{c+}	V_{c-}	I_C	I_c	$T.l.$
V_{C+}					$+1$		
V_{C-}					-1		
V_{c+}						$+1$	
V_{c-}						-1	
I_C	$+1$	-1					
I_c			$+1$	-1	$Z_{cC}(s)$		

- *Sursa ideală de tensiune comandată în tensiune* $\hat{E}_c(U_C)$*:*

$$(l_c): V_{c+}(s) - V_{c-}(s) + A_{c_C}(s)(V_{C+}(s) - V_{C-}(s)) = 0.$$

	V_{C+}	V_{C-}	V_{c+}	V_{c-}	I_c	$T.l.$
V_{C+}						
V_{C-}						
V_{c+}					$+1$	
V_{c-}					-1	
I_c	$A_{cC}(s)$	$-A_{cC}(s)$	$+1$	-1		

- *Sursa ideală de curent comandată în tensiune* $\hat{J}_c(U_C)$:

$$(n_{c+}): ... + Y_{C_c}(s)(V_{C+}(s) - V_{C-}(s)) + ... = 0; (n_{c-}): ... - Y_{C_c}(s)(V_{C+}(s) - V_{C-}(s)) + ... = 0.$$

	V_{C+}	V_{C-}	V_{c+}	V_{c-}	$T.l.$
V_{C+}					
V_{C-}					
V_{c+}	$Y_{cC}(s)$	$-Y_{cC}(s)$			
V_{c-}	$-Y_{cC}(s)$	$Y_{cC}(s)$			

- *Sursa ideală de curent comandată în curent* $\hat{J}_c(I_C)$*:*

$$(n_{c+}): ... + B_{C_c}(s) I_C(s) + ... = 0; (n_{c-}): ... - B_{C_c}(s) I_C(s) ... = 0.$$

	V_{C+}	V_{C-}	V_{c+}	V_{c-}	I_C	$T.l.$
V_{C+}					$+1$	
V_{C-}					-1	
V_{c+}					$B_{cC}(s)$	
V_{c-}					$-B_{cC}(s)$	
I_C	$+1$	-1				

- *Rezistorul liniar ideal* $R_k = 1/G_k$:

$$(n_{k+}) : ... + G_k(V_{k+}(s) - V_{k-}(s)) + ... = 0; \; (n_{k-}) : ... - G_k(V_{k+}(s) - V_{k-}(s)) + ... = 0.$$

$$\begin{array}{c|cc|c} & V_{k+} & V_{k-} & T.l. \\ V_{k+} & G_k & -G_k & \\ V_{k-} & -G_k & G_k & \end{array}$$

- *Bobina liniară ideală* L_k :

$$(l_k) : V_{k+}(s) - V_{k-}(s) - sL_k I_k(s) = -L_k i_k(0_-).$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & V_{k+} & V_{k-} & I_k & T.l. \\ V_{k+} & & & +1 & \\ V_{k-} & & & -1 & \\ I_k & +1 & -1 & -sL_k & -L_k i_k(0_-) \end{array}$$

Evident, bobina ideală în operațional nu este un element de circuit incompatibil cu metoda nodală clasică (curentul ei se poate exprima în funcție de potențialele nodurilor şi parametrii laturii), totuşi ea este considerată necompatibila cu MN deoarece este convenabil din punctul de vedere al calculului să se lucreze cu sL_k decât cu $1/(sL_k)$.

- *Condensatorul ideal* C_k *:*

$$(n_{k+}) : ... + sC_k(V_{k+}(s) - V_{k-}(s)) + ... = C_k u_k(0_-);$$
$$(n_{k-}) : ... - sC_k(V_{k+}(s) - V_{k-}(s)) + ... = -C_k u_k(0_-).$$

$$\begin{array}{c|cc|c} & V_{k+} & V_{k-} & T.l. \\ V_{k+} & sC_k & -sC_k & C_k u_k(0_-) \\ V_{k-} & -sC_k & sC_k & -C_k u_k(0_-) \end{array}$$

- *Bobinele cuplate magnetic* L_k şi L_j :

$$(l_k) : V_{k+}(s) - V_{k-}(s) - sL_k I_k(s) - sL_{kj} I_j(s) = -L_k i_k(0_-) - L_{kj} i_j(0_-);$$
$$(l_j) : V_{j+}(s) - V_{j-}(s) - sL_{jk} I_k(s) - sL_j I_j(s) = -L_{jk} i_k(0_-) - L_j i_j(0_-).$$

$$\begin{array}{c|cccccc|c} & V_{k+} & V_{k-} & V_{j+} & V_{j-} & I_k & I_j & T.l. \\ V_{k+} & & & & & +1 & & \\ V_{k-} & & & & & -1 & & \\ V_{j+} & & & & & & +1 & \\ V_{j-} & & & & & & -1 & \\ I_k & +1 & -1 & & & -sL_k & -sL_{kj} & -L_k i_k(0_-) - L_{kj} i_j(0_-) \\ I_j & & & +1 & -1 & -sL_{jk} & -sL_j & -L_{jk} i_k(0_-) - L_j i_j(0_-) \end{array}.$$

Exemplul 6.4. Pentru schema echivalentă în operațional a circuitului din figura 6.7 vectorul curenților de comandă are următoarea structură:

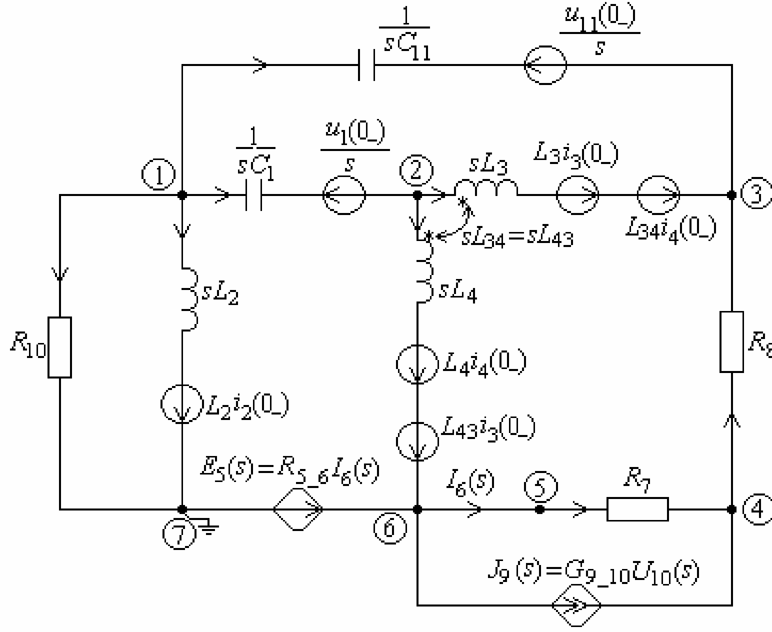


Fig. 6. 7. Schema în operațional a circuitului.

$$\boldsymbol{I}_m(s)=[I_2(s), I_3(s), I_4(s), I_5(s), I_6(s)]^{t}.$$

Ecuațiile nodale modificate sunt:

$$(n_1):\ (sC_1+G_{10}+sC_{11})V_1(s)-sC_1V_2(s)-sC_{11}V_3(s)+I_2(s)\ =C_1u_1(0_-)+C_{11}u_{11}(0_-);$$

$$(n_2):\ -sC_1V_1(s)+sC_1V_2(s)+I_3(s)\ +I_4(s)=-C_1u_1(0_-);$$

$$(n_3):\ -sC_{11}V_1(s)+(G_8+sC_{11})V_3(s)+I_3(s)\ +I_4(s)=-C_{11}u_{11}(0_-);$$

$$(n_4):\ -G_{9_10}V_1(s)-G_8V_3(s)+(G_7+G_8)V_3(s)-G_7V_5(s)=0;$$

$$(n_5):\ -G_7V_4(s)+G_7V_5(s)-I_6(s)=0;$$

$$(n_6):\ G_{9_10}V_1(s)-I_4(s)-I_5(s)+I_6(s)=0;$$

$$(l_2):\ V_1(s)-sL_2I_2(s)=-L_2i_2(0_);$$

$$(l_3):\ V_2(s)-V_3(s)-sL_3I_3(s)-sL_{34}I_4(s)=-L_3i_3(0_)-L_{34}i_4(0_);$$

$$(l_4):\ V_2(s)-V_6(s)-sL_{43}I_3(s)-sL_4I_4(s)=-L_{43}i_3(0_)-L_4i_4(0_);$$

$$(l_5):\ -V_6(s)+R_{5_6}I_6(s)=0;$$

$$(l_6):\ V_6(s)-V_5(s)=0.$$

6.5.9. Funcții de circuit

În general se numeşte funcție de transfer de la latura j la latura k, pentru un circuit liniar pasiv cu condiții inițiale de zero, raportul dintre mărimea de ieşire din latura k, m_k^e (sau transformata Laplace a acesteia) şi mărimea de intrare (de excitație) din latura j, m_j^i (sau transformata Laplace a acestei mărimi):

$$H(s) = F_{kj} \overset{\mathrm{d}}{=} \frac{m_k^e}{m_j^i} \left(= \frac{L\{m_k^e\}}{LL\{m_j^i\}} \right), \tag{6.97}$$

unde m_k^e poate fi o tensiune sau un curent, iar m_j^i poate fi tensiunea unei surse ideale independente de tensiune sau curentul unei surse ideale independente de curent (fig. 6.8).

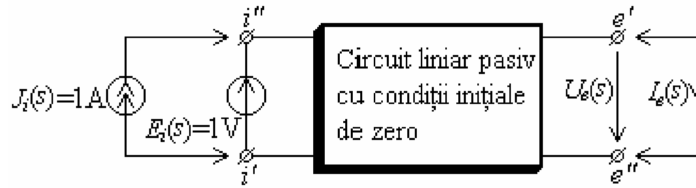


Fig. 6.8. Schema echivalentă pentru calculul funcțiilor de circuit.

Dacă mărimea de excitație (tensiune sau curent, după funcția de circuit ce urmează a fi determinată) are imaginea Laplace egală cu unitatea, atunci mărimea de ieşire reprezintă chiar funcția de circuit dorită.

Cele patru funcții de transfer se definesc cu relațiile:

$$Z_{ei} \overset{\mathrm{d}}{=} \left.\frac{U_e(s)}{J_i(s)}\right|_{I_e(s)=0}, \quad Y_{ei} \overset{\mathrm{d}}{=} \left.\frac{I_e(s)}{E_i(s)}\right|_{U_e(s)=0}, \quad A_{ei} \overset{\mathrm{d}}{=} \left.\frac{U_e(s)}{E_i(s)}\right|_{I_e(s)=0} \text{ şi } B_{ei} \overset{\mathrm{d}}{=} \left.\frac{I_e(s)}{J_i(s)}\right|_{U_e(s)=0}. \tag{6.98}$$

Pentru definirea admitanței (impedanței) de intrare, structura diportului intrare-ieşire este reprezentată în figura 6.9,a (fig. 6.9,b). Analog se defineşte şi structura diportului intrare-ieşire pentru calculul admitanței de ieşire (respectiv impedanței de ieşire).

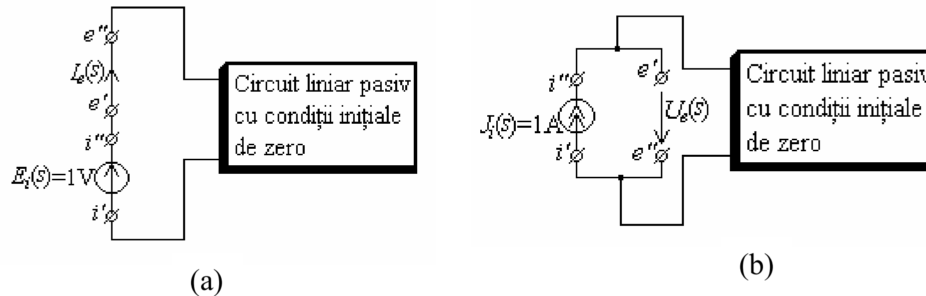


Fig. 5.9. Schemă echivalentă pentru calculul imitanțelor de intrare.

Pentru un circuit liniar care conține numai rezistoare, bobine, cuplaje magnetice, condensatoare şi surse independente (circuit reciproc), sunt satisfăcute relațiile: $Y_{kj}=Y_{jk}$, $Z_{kj}=Z_{jk}$, $A_{kj}= A_{jk}$, $B_{kj}=B_{jk}$, iar pentru $j = k$ (cele două porți coincid), se obțin funcțiile proprii de rețea (de intrare sau de ieşire).

Cunoaşterea funcției de circuit permite determinarea răspunsului circuitului în raport cu un semnal aplicat:

$$Y = H(s)X \, , \tag{6.99}$$

Trecând apoi din domeniul variabilei complexe în domeniul real, se obține răspunsul în domeniul timp al circuitului.

De asemenea, dacă în funcția de circuit se înlocuieşte s cu $j\omega$, se obține variația răspunsului cu frecvența (răspunsul în frecvență al circuitului), care se poate vizualiza reprezentând $|H(j\omega)|$ şi $arg\ H(j\omega)$ în funcție de ω. Aceste reprezentări în scară semilogaritmică, în care $|H(j\omega)|$ se exprimă în decibeli, $arg\ H(j\omega)$ în grade şi ω în radiani pe secundă, se numesc *diagrame Bode*.

După cum s este singura variabilă a funcției de transfer sau nu, şi după cum o parte sau toate elementele de circuit sunt reprezentate prin simboluri, există trei niveluri ale reprezentării simbolice prin funcții de circuit:

> funcție rațională în s cu coeficienți numerici;

> funcție de circuit parțial simbolică;

> funcție de circuit total simbolică.

Pentru analiza simbolică a circuitelor electrice şi electronice s-au dezvoltat, în principal, cinci tehnici diferite (fig. 6.10): metoda determinantului, metoda grafurilor de fluență, metoda enumerării arborilor, metoda extragerii parametrilor, metoda interpolării şi metoda variabilelor de stare. Primele trei metode şi ultima metodă generează funcțiile de circuit în formă complet simbolică, având ca variabile atât frecvența, cât şi parametrii circuitului, metoda extragerii parametrilor generează funcții de circuit în formă parțial simbolică, în timp ce în metoda interpolării singura variabilă din expresiile funcțiilor de circuit este frecvența.

Metoda determinantului calculează simbolic determinanții necesari rezolvării sistemului de ecuații algebrice ale circuitului. Utilizând metoda nodală modificată în formă simbolică, metoda determinantului devine o metodă eficientă de generare a funcțiilor de circuit în formă simbolică sau parțial simbolică şi de determinare a soluțiilor circuitului (potențialele la noduri, curenții şi tensiunile laturilor) în formă simbolică sau parțial simbolică, pentru circuite analogice complexe liniare şi/sau neliniare, liniarizate pe porțiuni. Metoda grafurilor de fluență se bazează pe formula lui Mason, care necesită găsirea căilor şi buclelor orientate, de toate ordinele, într-un graf de fluență asociat ecuațiilor circuitului, graf care a fost construit după reguli bine stabilite. Metoda enumerării arborilor este o metodă topologică (ca şi metoda grafurilor de fluență), care necesită generarea tuturor arborilor de acoperire (a tuturor arborilor de acoperire comuni, în cazul metodei celor două grafuri) în graful de conexiune orientat asociat circuitului.

Odată cu elaborarea unui algoritm eficient de formulare simbolică a ecuațiilor de stare în formă normală (canonică) pentru circuite analogice complexe de dimensiuni mari, metoda variabilelor de stare a devenit o tehnică simplă şi deosebit de eficientă de generare a funcțiilor de circuit în formă simbolică.

Câmpul de aplicații al analizei simbolice, în strânsă conexiune cu analiza numerică, poate fi divizat în următoarele patru categorii care reprezintă obiective esențiale în activitatea de proiectare a circuitelor analogice integrate:

- *analiza circuitelor*:

> determină influența parametrilor caracteristici ai elementelor asupra regimului de funcționare al circuitului;

> evidențiază regimul dominant al circuitului în formă matematică si interpretabilă, putând fi folosită pentru dimensionarea circuitului;

> permite analiza erorilor şi a toleranțelor;

– *modelarea circuitului*:

> asigură generarea modelelor la diferite nivele ierarhice pentru blocurile circuitelor analogice;

> permite simularea întregului circuit pe baza macromodelelor;

– *dimensionarea circuitului*:

> asigură sinteza manuală sau asistată de calculator a circuitelor electrice;

> conduce la obținerea formulelor simbolice de dimensionare a elementelor de circuit în funcție de specificațiile globale ale circuitului;

– *optimizarea circuitului*:

> necesită prelucrarea inițială a ecuațiilor prin eliminarea variabilelor pentru a permite eficientizarea procesului de optimizare;

> asigură aplicarea algoritmilor de optimizare chiar la nivelul sistemului.

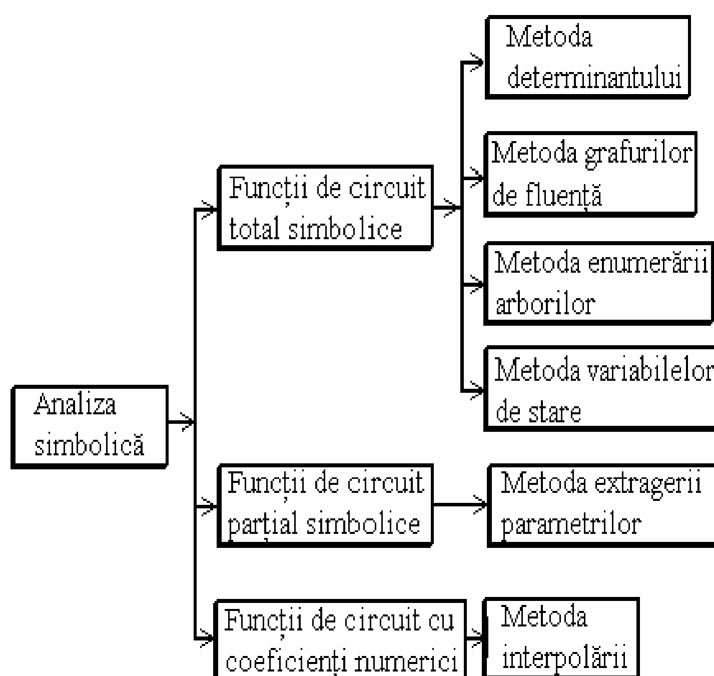


Fig. 5.10. Metode de analiză simbolică a circuitelor electronice.

Alte aplicații ale analizei simbolice sunt:

> generarea automată a modelelor comportamentale pentru anumite blocuri analogice, cum sunt amplificatoarele operaționale sau filtrele. Aceste blocuri analogice sunt necesare pentru simularea unor sisteme de nivel înalt în timpi de calcul acceptabili;

> folosirea soluțiilor simbolice ca valori de început pentru îmbunătățirea convergenței unor tehnici de calcul numerice, cum ar fi metoda relaxării;

> expresiile simbolice sunt necesare pentru determinarea observabilității unui circuit pentru un număr dat de noduri de observare;

> diagnosticarea defectelor în circuitele analogice şi analiza defectelor acestor circuite;

> achiziția de cunoştințe de proiectare;

> utilizarea analizei simbolice în educația inginerească.

Exemplul 6. 5.: Pentru circuitele electrice din figura 6.11 se obțin următoarele expresii ale factorului de transfer (amplificare) în tensiune A_{ei}:

> funcția de circuit are coeficienți numerici (fig. 6.11, a):

$$A_{ei} = \frac{U_e(s)}{E_i(s)} = \frac{s-1}{s+1};$$

> funcția de circuit este parțial simbolică (fig. 6.11, b):

$$A_{ei} = \frac{U_e(s)}{E_i(s)} = \frac{sC_3 - 1}{sC_3 + 1};$$

> funcția de circuit este total simbolică (fig. 6.11, c):

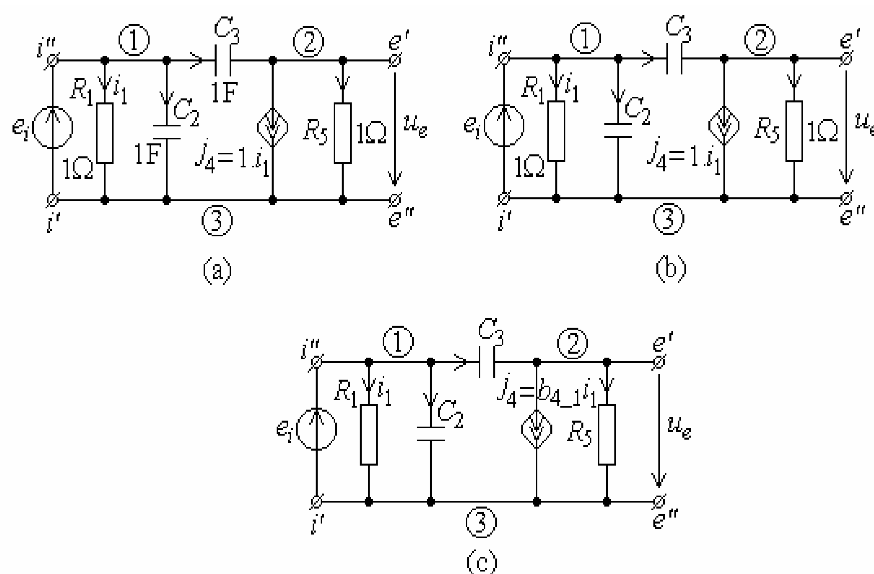


Fig. 6.11. Cele trei niveluri ale analizei simbolice.

$$A_{ei} = \frac{U_e(s)}{E_i(s)} = \frac{R_5\left(R_1C_3s - b_{4_1}\right)}{R_1\left(C_3R_5s + 1\right)}.$$

Observații:

1. Utilizarea funcțiilor de circuit reprezintă o metodă unitară de studiu a răspunsurilor naturale, forțate, tranzitorii, de regim permanent, a răspunsului complet, precum şi a răspunsului în frecvență al circuitului.

2. Calculul funcției de circuit reprezintă primul pas în proiectarea asistată de calculator a circuitelor electronice, următorii paşi constând în determinarea senzitivităților funcției în raport cu diferiți parametri ai circuitului precum şi determinarea valorilor polilor şi zerourilor.

3. Forma simbolică a funcțiilor de circuit este utilă pentru generarea de modele analitice şi evaluări repetate ale caracteristicilor. În acest scop, cu ajutorul senzitivităților funcțiilor de circuit în raport cu diferiți parametri se pot studia performanțele circuitului la variația valorilor acestor parametri, fără ca pentru aceasta să fie necesară recalcularea de fiecare dată a circuitului.

BIBLIOGRAFIE

1. **C. A. Desoer**, and **E. S. Kuh**, *Basic Circuit Theory*, McGraw-Hill, New York, 1969.

2. **L. O. Chua**, and **P. M. Lin**, *Computer-Aided Analysis of Electronic Circuits: Algorithms and Computational Techniques*, Englewood cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1975.

3. **L. O. Chua**, *Introduction to Nonlinear Network Theory*, McGraw-Hill, New York, 1969.

4. **M. Iordache**, "An efficient algorithm for tearing large-scale networks", Rev. Roum. Sci. Techn. - Électrotechn. et Énerg., 35, 2, 1990, pp. 203-209.

5. **A. Sangiovanni-Vincentelli, Li-Kuan Chen, L. O. Chua**, "An efficient heuristic cluster algorithm for tearing large-scale networks", IEEE Trans. on Circuits and Systems, CAS-4, No. 12, December 1977, pp. 709-717.

6. **M. Iordache**, "Generalization of the topological formulae with homogeneous parameters", Rev. Roum. Sci. Techn. - Électrotechn. et Énerg., 35, 4, 1980, pp. 501-513.

7. **M. Iordache**, "A hybrid tearing method for nonlinear large-scale circuit analysis", Rev. Roum. Sci. Techn. - Électrotechn. et Énerg., 36, 4, 1991, pp. 431-442.

8. **M. Iordache, Lucia Dumitriu, N. Voicu. M. Perpelea** "Generalized Diakoptic Analysis for Large-Scale Electrical Circuits ", Rev. Roum. Sci. Techn. - Électrotechn. et Énerg., 36, 3, 1993, pp. 431-442.

9. **A. E. Schwarz**, *Computer-aided design of microelectronic circuits and systems*, Academic Press, London, 1987.

10. **W. J. McCalla**, *Fundamentals of computer-aided circuit simulation*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1988.

11. **C. W. Ho, A. E. Ruehli, P. A. Brennan**, "The modified nodal approach to network analysis", IEEE Trans. on Circuits and Systems, CAS -22, No.6, June 1975, p. 504-509.

12. **M. Iordache, M. Perpelea**, *Analiza asistată de calculator a circuitelor electrice şi electronice neliniare complexe de mari dimensiuni*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1995.

13. **M. Iordache**, *Analiza asistată de calculator a circuitelor electrice neliniare - Algoritmi şi tehnici de calcul*, Litografia Universităţii „Politehnica“ Bucureşti, 1993.

15. **M. Iordache, Lucia Dumitriu**, *Teoria modernă a circuitelor electrice - Vol. II - Fundamentare teoretică, aplicaţii, algoritmi şi programe de calcul*, Editura All Educational S.A., Bucureşti 2000.

16. **K. M. Heal, M. L. Hansen, K. M. Rickard**, *Maple V Learning Guide*, Springer Verlag, Berlin, 1996.

17. **M. Iordache, Lucia Dumitriu, D. Delion** "**GSIMES** – **G**enerarea **SIM**bolică a **E**cuaţiilor de **S**tare", Manual de utilizare, Catedra de Electrotehnică, U.P.B., Bucureşti, 2000.

18. **M. Iordache, Lucia Dumitriu, I. Matei** "***ASIDNOM*** – ***A***naliza ***SI***mbolică ***D***iakoptică bazată pe metoda ***NO***dală ***M***odificată ", Manual de utilizare, Catedra de Electrotehnică, U.P.B., Bucureşti, 2002**.**

19. **A. Vladimirescu**, *SPICE*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1999.

20. **C. I. Mocanu,** *Teoria circuitelor electrice*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.

21. **M. Preda, P. Cristea**, *Bazele electrotehnicii*, Vol. II, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980.

22. **M. Hasler, J. Neirynck**, *Circuits nonlinéaires*, Press Polytechniques Romandes, Lausanne, 1985.

23. **A. E. Ruehli (Ed.),** *Circuit analysis, simulation and design*, Elsevier, N.Y., 1986.

24. **T. Marian**, *SPICE*, Editura Teora, Bucureşti, 1996.

25. **Şt. Andrei**, PSPICE – Analiza Asistată de Calculator a Circuitelor Electronice, Editura ICPE, Bucureşti, 1996.

26. **S. Franco,** *Electric Circuit Fundamentals*, Saunders College Publishing, Harcourt Brace College Publishers, N.Y., London, 1995.

CAPITOLUL 7

CUADRIPOLI ŞI FILTRE

7.1. TETRAPOLI

În ingineria electrică este folosit frecvent un caz particular de multipol cu patru borne de acces numit *tetrapol* sau *cuadripol general* (fig. 7.1).

Tetrapolii care nu conţin (conţin) elemente de circuit neliniare se numesc *tetrapoli liniari* (*neliniari*).

Ecuaţiile caracteristice în regim armonic ale unui tetrapol exprimă intensităţile curenţilor prin trei din bornele sale în funcţie de tensiunile de la aceste borne la cea de a patra bornă (fig. 7.1):

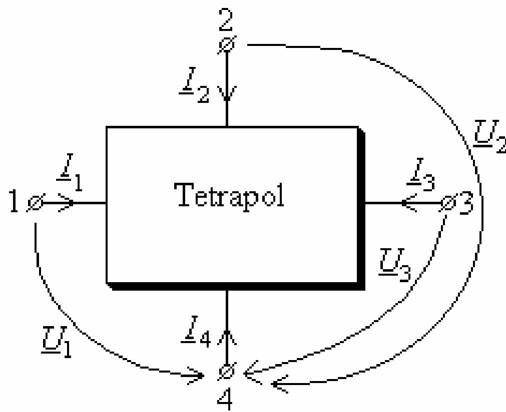


Fig. 7.1. Schema tetrapolului.

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2 + \underline{Y}_{13}\underline{U}_3 + \underline{I}_{1sc}\\ \underline{I}_2 &= \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2 + \underline{Y}_{23}\underline{U}_3 + \underline{I}_{2sc}\ .\\ \underline{I}_3 &= \underline{Y}_{31}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{32}\underline{U}_2 + \underline{Y}_{33}\underline{U}_3 + \underline{I}_{3sc}\end{aligned} \qquad (7.1)$$

Mărimile

$$\underline{Y}_{kj} = \left.\frac{\underline{I}_k}{\underline{U}_j}\right|_{\underline{U}_h=0,\forall h\neq j}, \qquad (7.2)$$

reprezintă admitanţele complexe de transfer între borne, iar $\underline{I}_{1sc}$, $\underline{I}_{2sc}$ şi $\underline{I}_{3sc}$ sunt curenţii de scurtcircuit când $\underline{U}_1 = \underline{U}_2 = \underline{U}_3 = 0$.

Intensitatea curentului prin a patra bornă se obţine simplu din prima teoremă a lui Kirchhoff

$$\underline{I}_4 = -\underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3, \qquad (7.3)$$

iar tensiunea între oricare două borne rezultă, pe baza teoremei a doua a lui Kirchhoff, în funcţie de cele trei tensiuni la borne $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$.

În consecinţă, mărimile $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$ formează un sistem complet de curenţi independenţi la bornele tetrapolului, iar tensiunile $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$ alcătuiesc un sistem complet de tensiuni independente la bornele tetrapolului. Ecuaţiile (7.1) formează un sistem complet de ecuaţii independente în curenţi ale tetrapolului. Folosind impedanţele complexe de transfer şi tensiunile la mers în gol se poate obţine un sistem complet de ecuaţii independente în tensiuni ale tetrapolului, de forma:

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2 + \underline{Z}_{13}\underline{I}_3 + \underline{U}_{1,0}\\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2 + \underline{Z}_{23}\underline{I}_3 + \underline{U}_{2,0}\ .\\ \underline{U}_3 &= \underline{Z}_{31}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{32}\underline{I}_2 + \underline{Z}_{33}\underline{I}_3 + \underline{U}_{3,0}\end{aligned} \qquad (7.4)$$

Impedanțele complexe de transfer între borne sunt definite de relația:

$$\underline{Z}_{kj} \overset{\mathrm{d}}{=} \left.\frac{\underline{U}_k}{\underline{I}_j}\right|_{\underline{I}_h=0,\forall h\neq j}, \tag{7.5}$$

iar $\underline{U}_{1,0}$, $\underline{U}_{2,0}$ și $\underline{U}_{3,0}$ sunt tensiunile la mers în gol când $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 = \underline{I}_3 = \underline{I}_4 = 0$.

Tetrapolii se clasifică, din puncte de vedere diferite, astfel: *tetrapoli liniari invariabili în timp*, *liniari variabili în timp*, *neliniari invariabili în timp* şi *neliniari variabili în timp*, după cum ecuațiile caracteristice (7.1) sau (7.4) sunt liniare sau neliniare, variabile sau invariabile în timp; tetrapoli *activi* sau *pasivi*, dacă conțin sau nu surse independente de tensiune sau de curent; tetrapoli *reciproci* sau *nereciproci*, dacă e verificată sau nu teorema de reciprocitate; tetrapoli *disipativi* sau *nedisipativi*, după cum conțin sau nu elemente de circuit în care au loc transformări ireversibile ale energiei electromagnetice în căldură; tetrapoli *rezistivi* (*pur rezistivi*) şi tetrapoli *reactivi*, după cum nu conțin, respectiv conțin elemente acumulatoare de energie.

Ansamblul bornelor de acces ale unui multipol la care suma curenților e nulă se numeşte *poartă* şi multipolul este *diport*, *triport* sau *multiport* dacă conține două, trei sau mai multe porți. Evident elementul de circuit bipolar este uniport.

De obicei în tehnică se folosesc tetrapoli care, fie datorită structurii lor, fie datorită circuitelor exterioare la care sunt conectați, permit gruparea bornelor în două perechi cu curenți egali şi ale căror valori depind numai de tensiunile la bornele acestor perechi. Tetrapolii care funcționează în astfel de regimuri se numesc *cuadripoli diport* sau, simplu, *cuadripoli*.

Circuitele electrice care sunt cuadripoli independenți de circuitele exterioare lor, se numesc *cuadripoli independenți*, iar în caz contrar *cuadripoli dependenți*.

În cele ce urmează se vor considera numai cuadripoli care nu au cuplaje magnetice cu circuite exterioare. Evident cuadripolii care conțin (nu conțin) surse de energie se numesc cuadripoli *activi* (*pasivi*).

7.2. ECUAȚIILE CUADRIPOLULUI LINIAR

Se consideră un cuadripol liniar şi activ (fig. 7.2) aflat în regim armonic. *Ecuațiile în admitanțe* ale cuadripolului, conform teoremei superpoziției, au forma:

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2 + \underline{I}_{1sc}, \quad \underline{I}_2 = \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2 + \underline{I}_{2sc}, \tag{7.6}$$

unde admitanțele complexe de transfer şi cele proprii se referă la cuadripolul liniar pasivizat şi se definesc prin relațiile:

$$\underline{Y}_{11} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{U}_2=0}, \quad \underline{Y}_{12} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{U}_1=0}, \quad \underline{Y}_{21} = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{U}_2=0}, \quad \underline{Y}_{22} = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{U}_1=0}. \tag{7.7}$$

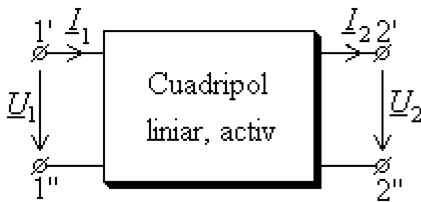


Fig. 7.2. Cuadripol liniar activ.

Curenții de scurtcircuit $\underline{I}_{1sc}$, $\underline{I}_{2sc}$ corespund regimului de funcționare în scurtcircuit a cuadripolului (fig. 7.3, a), când $\underline{U}_1 = \underline{U}_2 = 0$.

La cuadripolii pasivi $\underline{I}_{1sc} = \underline{I}_{2sc} = 0$ şi ecuațiile (7.6) devin:

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2$$
$$\underline{I}_2 = \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2. \qquad (7.8)$$

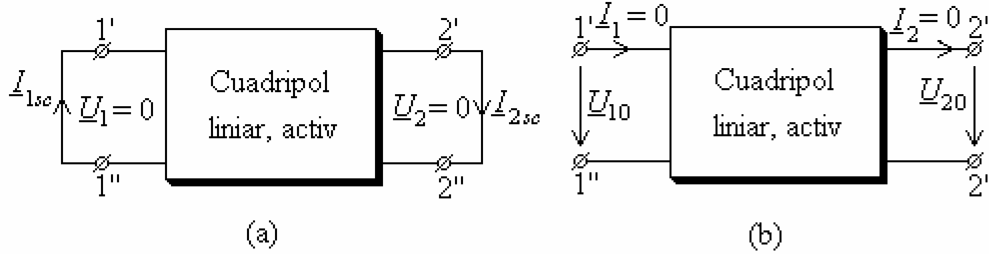


Fig. 7.3. Definirea curenților de scurtcircuit şi a tensiunilor de mers în gol.

Impedanțele complexe de transfer ale cuadripolului pasivizat sunt definite de relațiile:

$$\underline{Z}_{11} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0}, \quad \underline{Z}_{12} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{I}_1=0}, \quad \underline{Z}_{21} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0}, \quad \underline{Z}_{22} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{I}_1=0}. \qquad (7.9)$$

Aplicând teorema superpoziției rezultă *ecuațiile în impedanțe* ale cuadripolului liniar în regim armonic permanent

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2 + \underline{U}_{10}$$
$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2 + \underline{U}_{20}, \qquad (7.10)$$

în care $\underline{U}_{10}$, $\underline{U}_{20}$ sunt tensiunile la bornele cuadripolului în regimul de funcționare în gol (fig. 7.3, b) definit de condițiile $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 = 0$.

Dacă cuadripolul diport liniar este pasiv, atunci ecuațiile în impedanțe au forma:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2$$
$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2. \qquad (7.11)$$

Dacă ecuațiile (7.8) se rezolvă în raport cu mărimile $\underline{U}_1, \underline{I}_1$ de la bornele 1', 1", se obțin *ecuațiile fundamentale* sau *de transfer* ale cuadripolului liniar şi pasiv

$$\underline{U}_1 = \underline{A}\underline{U}_2 + \underline{B}\underline{I}_2$$
$$\underline{I}_1 = \underline{C}\underline{U}_2 + \underline{D}\underline{I}_2, \qquad (7.12)$$

în care $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}$ sunt *parametrii* (constantele) *de transfer* sau *fundamentali* dați de relațiile:

$$\underline{A} = -\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}}, \quad \underline{B} = \frac{1}{\underline{Y}_{21}}, \quad \underline{C} = \frac{-\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} + \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{21}}, \quad \underline{D} = \frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}}. \qquad (7.13)$$

Ecuațiile fundamentale (7.12) se pot scrie şi sub formă matriceală:

$$\underline{\boldsymbol{X}}_1 = \underline{\boldsymbol{\Gamma}}\underline{\boldsymbol{Y}}_2, \qquad (7.14)$$

unde $\underline{\boldsymbol{X}}_1$ şi $\underline{\boldsymbol{Y}}_2$ sunt vectorii mărimilor de intrare, respectiv de ieşire, iar $\underline{\boldsymbol{\Gamma}}$ este matricea pătratică a constantelor cuadripolului, numită *matrice de transfer* sau *fundamentală*,

$$\underline{\boldsymbol{X}}_1 = \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\boldsymbol{Y}}_2 = \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}, \quad \underline{\boldsymbol{\Gamma}} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix}. \tag{7.15}$$

Parametrii $\underline{A}$ şi $\underline{D}$ sunt adimensionali, $\underline{B}$ este o impedanţă şi $\underline{C}$ este o admitanţă cu următoarele interpretări:

$$\underline{A} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{I}_2=0}, \tag{7.16}$$

este factorul de transfer (amplificare) de la ieşire la intrare, cu ieşirea în gol;

$$\underline{B} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{U}_2=0}, \tag{7.17}$$

reprezintă impedanţa de transfer de la ieşire la intrare, cu ieşirea în scurtcircuit;

$$\underline{C} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{I}_2=0}, \tag{7.18}$$

este admitanţa de transfer de la ieşire la intrare, cu ieşirea în gol şi

$$\underline{D} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{U}_2=0}, \tag{7.19}$$

reprezintă factorul de transfer (amplificare) în curent de la ieşire la intrare, cu ieşirea în scurtcircuit.

În conformitate cu teorema reciprocităţii (vezi cap. 1) un cuadripol este reciproc dacă conectând la bornele de intrare, după ce cuadripolul a fost pasivizat, un generator de tensiune electromotoare $\underline{E}$, curentul $\underline{I}_2$ care se stabileşte la ieşire când bornele de ieşire sunt scurtcircuitate este egal cu $-\underline{I}_1$ (ţinând seamă de sensurile de referinţă) care se stabileşte la intrare când bornele de intrare sunt scurtcircuitate şi generatorul $\underline{E}$ este conectat la ieşire

$$\underline{I}_2\Big|_{\underline{U}_1=\underline{E},\underline{U}_2=0} = -\underline{I}_1\Big|_{\underline{U}_1=0,\underline{U}_2=\underline{E}} \;\Leftrightarrow\; \underline{Y}_{21}\underline{E} = -\underline{Y}_{12}\underline{E} \;\Rightarrow\; \underline{Y}_{21} = -\underline{Y}_{12}. \tag{7.20}$$

Deci, la un cuadripol reciproc $\underline{Y}_{12} = -\underline{Y}_{21}$.

Din relaţiile (7.13) şi (7.20) se deduce că parametrii fundamentali ai unui cuadripol liniar şi reciproc satisfac *relaţia de reciprocitate*:

$$\underline{A}\underline{D} - \underline{B}\underline{C} = 1. \tag{7.21}$$

Alte forme ale ecuaţiilor cuadripolului liniar şi pasiv se vor prezenta în paragraful 7.3.

7.3. SCHEMELE ECHIVALENTE ALE CUADRIPOLILOR LINIARI

Doi cuadripoli liniari sunt echivalenţi dacă ecuaţiile lor (de aceeaşi formă) sunt identice.

a) *Pentru un cuadripol liniar, pasiv şi reciproc* cu parametrii fundamentali $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}$ (fig. 7.4) se pot obţine diverşi cuadripoli echivalenţi. Cei mai simpli cuadripoli sunt cei cu conexiune în stea (conexiune în T), respectiv în triunghi (în Π) (fig. 7.5, a şi b).

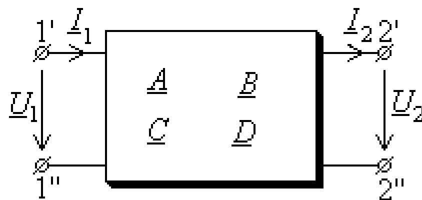


Fig. 7.4. Cuadripol liniar pasiv.

Ecuațiile cuadripolului din figura 7.4 în funcție de parametrii fundamentali (7.12)şi cele corespunzătoare cuadripolului din figura 7.5, b, obținute pe baza teoremelor lui Kirchhoff,

$$\underline{U}_1 = (1 + \underline{Z}_0 \underline{Y}_2)\underline{U}_2 + \underline{Z}_0 \underline{I}_2$$
$$\underline{I}_1 = (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Z}_0 \underline{Y}_1 \underline{Y}_2)\underline{U}_2 + (1 + \underline{Z}_0 \underline{Y}_1)\underline{I}_2, \qquad (7.22)$$

sunt identice dacă şi numai dacă sunt satisfăcute egalitățile:

$$\underline{A} = 1 + \underline{Z}_0 \underline{Y}_2, \quad \underline{B} = \underline{Z}_0, \quad \underline{C} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Z}_0 \underline{Y}_1 \underline{Y}_2, \quad \underline{D} = 1 + \underline{Z}_0 \underline{Y}_1.. \qquad (7.23)$$

În consecință, impedanța $\underline{Z}_0$ şi admitanțele $\underline{Y}_1$, $\underline{Y}_2$ ale cuadripolului în Π, echivalent cu un cuadripol de parametri $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}$, au valorile:

$$\underline{Z}_0 = \underline{B}, \quad \underline{Y}_1 = \frac{\underline{D} - 1}{\underline{B}}, \quad \underline{Y}_2 = \frac{\underline{A} - 1}{\underline{B}}.. \qquad (7.24)$$

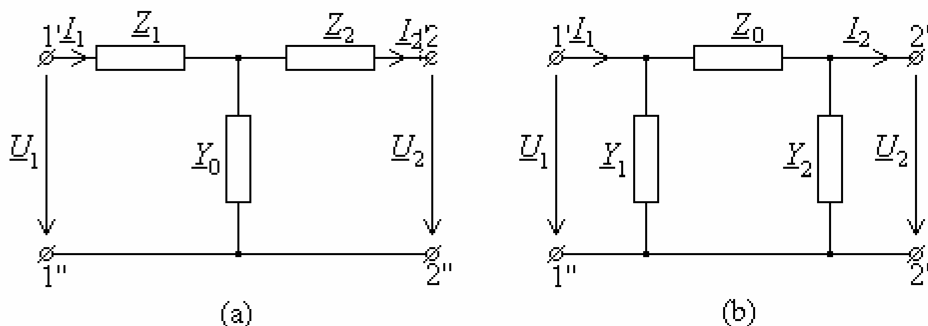


Fig. 7.5. a) Schema echivalentă în stea (în T); b) Schema echivalentî în triunghi (în Π).

Ținând seama de relațiile de definiție (7.16) – (7.19), se pot deduce relațiile dintre parametrii schemei echivalente şi parametrii fundamentali ai cuadripolului.

Pentru cuadripolul în T rezultă:

$$\underline{A} = 1 + \underline{Y}_0 \underline{Z}_1, \quad \underline{B} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Y}_0 \underline{Z}_1 \underline{Z}_2, \quad \underline{C} = \underline{Y}_0, \quad \underline{D} = 1 + \underline{Y}_0 \underline{Z}_2. \qquad (7.25)$$

Parametrii $\underline{Y}_0$, $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ ai cuadripolului în T echivalent cu un cuadripol cu parametrii $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}$ se obțin rezolvând sistemul de ecuații (7.52)

$$\underline{Y}_0 = \underline{C}, \quad \underline{Z}_1 = \frac{\underline{A} - 1}{\underline{C}}, \quad \underline{Z}_2 = \frac{\underline{D} - 1}{\underline{C}}. \qquad (7.26)$$

b) *Pentru un cuadripol liniar, nereciproc şi pasiv* având parametrii fundamentali $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}$ dați se pot alcătui scheme echivalente care conțin un cuadripol reciproc ți o sursă comandată de curent sau de tensiune.

Dacă ecuațiile în parametrii fundamentali (7.12) ale unui cuadripol liniar, nereciproc şi pasiv se pun sub forma:

$$\underline{U}_1 = \underline{A}\underline{U}_2 + \underline{B}\underline{I}_2$$
$$\underline{I}_1 = \underline{C}'\underline{U}_2 + \underline{D}\underline{I}_2 + \underline{C}''\underline{U}_2, \tag{7.27}$$

cu $\underline{C}'$ determinat de relația

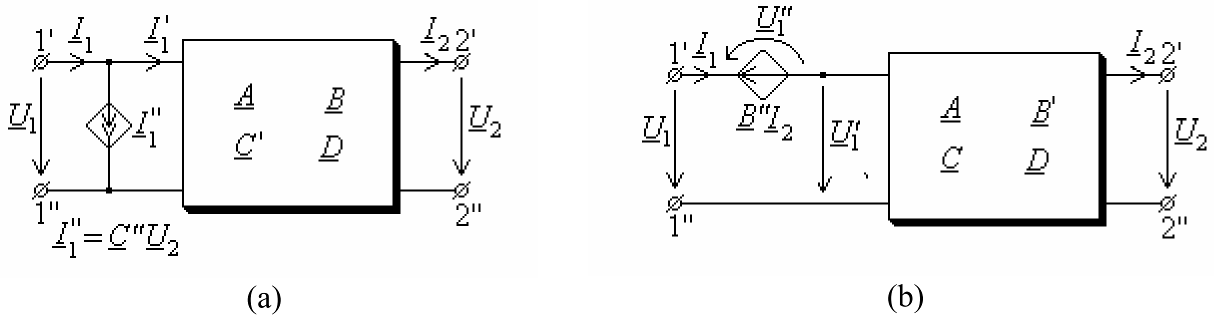
$$\underline{A}\underline{D} - \underline{B}\underline{C}' = 1 \tag{7.28}$$

şi

$$\underline{C} = \underline{C}' + \underline{C}''. \tag{7.29}$$

Ecuațiilor (7.27) le corespunde schema echivalentă din figura 7.6, a, în care la cuadripolul reciproc de parametri $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}', \underline{D}$ se adaugă la intrare o sursă de curent comandată de tensiunea de la ieşire $\underline{I}_1'' = \underline{C}''\underline{U}_2$, având transadmitanța $\underline{C}'' = \underline{C} - \underline{C}'$.

Analog, dacă se descompune parametrul $\underline{B}$ într-o componentă $\underline{B}'$, corespunzătoare unui cuadripol reciproc cu parametrii fundamentali $\underline{A}, \underline{B}', \underline{C}, \underline{D}$ şi o componentă $\underline{B}'' = \underline{B} - \underline{B}'$, se obține schema echivalentă (fig. 7.6, b) cu sursă de tensiune comandată de curentul de la ieşire $\underline{U}_1'' = \underline{B}''\underline{I}_2$.



(a) (b)

Fig. 7.6. Scheme echivalente pentru cuadripoli liniar, pasi şi nereciproci.

7.4. IMPEDANȚELE CARACTERISTICE ŞI EXPONENTUL DE TRANSFER PE IMPEDANȚE CARACTERISTICE

În acest paragraf se definesc câteva noțiuni importante în studiul lanțurilor de cuadripoli liniari, pasivi, reciproci şi identici (*lanțuri omogene de cuadripoli*).

Pentru un cuadripol liniar, pasiv şi reciproc (fig. 7.7, a) având conectată la bornele secundare 2'–2'' impedanța

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}, \tag{7.30}$$

se defineşte *impedanța de intrare primară* cu relația

$$\underline{Z}_{e1} \overset{\mathrm{d}}{=} \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\bigg|_{\underline{U}_2 = \underline{Z}_2\underline{I}_2} = \frac{\underline{A}\underline{U}_2 + \underline{B}\underline{I}_2}{\underline{C}\underline{U}_2 + \underline{D}\underline{I}_2} = \frac{\underline{A}\underline{Z}_2 + \underline{B}}{\underline{C}\underline{Z}_2 + \underline{D}}. \tag{7.31}$$

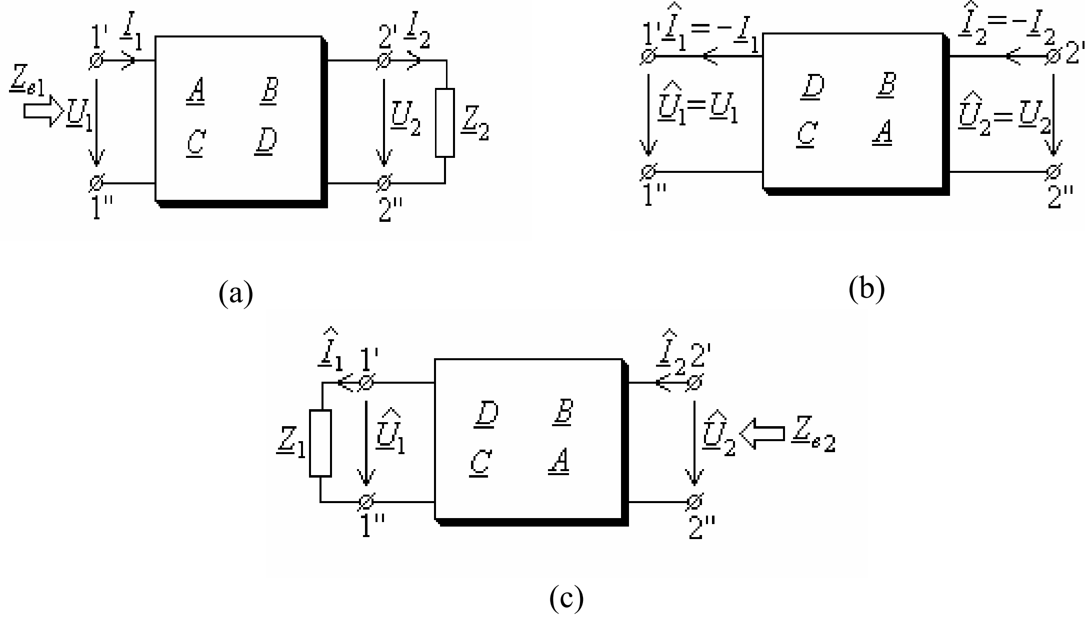


Fig. 7.7. Definirea impetanțelor de intrare (primară) şi de ieşire (secundară).

Alimentând cuadripolul pe la poarta de ieşire 2'–2'', cu regula de asociere a sensurilor de referință de la receptoare la ieşire şi cea de la generatoare la intrare (fig. 7.7, b), ecuațiile (7.12) devin

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}\underline{U}_2 - \underline{B}\left(-\underline{I}_2\right) \\ -\underline{I}_1 &= -\underline{C}\underline{U}_2 + \underline{D}\left(-\underline{I}_2\right). \end{aligned} \qquad (7.32)$$

Notând: $\hat{\underline{U}}_1 = \underline{U}_1$, $\hat{\underline{U}}_2 = \underline{U}_2$, $\hat{\underline{I}}_1 = -\underline{I}_1$, $\hat{\underline{I}}_2 = -\underline{I}_2$, ecuațiile (7.70) iau forma:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{U}}_1 &= \underline{A}\hat{\underline{U}}_2 - \underline{B}\hat{\underline{I}}_2 \\ \hat{\underline{I}}_1 &= -\underline{C}\hat{\underline{U}}_2 + \underline{D}\hat{\underline{I}}_2. \end{aligned} \qquad (7.33)$$

Rezolvând sistemul de ecuații (7.33) în raport cu necunoscutele $\hat{\underline{U}}_2$ şi $\hat{\underline{I}}_2$ şi ținând seama de relația de reciprocitate (7.21) rezultă:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{U}}_2 &= \underline{D}\hat{\underline{U}}_1 + \underline{B}\hat{\underline{I}}_1 \\ \hat{\underline{I}}_2 &= \underline{C}\hat{\underline{U}}_1 + \underline{A}\hat{\underline{I}}_1, \end{aligned} \qquad (7.34)$$

ceea ce arată că la inversarea rolului bornelor 1'–1'' şi 2'–2'' constantele $\underline{A}$ şi $\underline{D}$ se schimbă între ele. Ca urmare, impedanța echivalentă $\underline{Z}_{e2}$ la bornele 2'–2'' când la bornele 1'–1'' se conectează o impedanță $\underline{Z}_1$ (fig. 7.7,c), numită *impedanță de intrare secundară*, rezultă din ecuațiile (7.34)

$$\underline{Z}_{e2} \overset{\mathrm{d}}{=} \left.\frac{\hat{\underline{U}}_2}{\hat{\underline{I}}_2}\right|_{\hat{\underline{U}}_1 = \underline{Z}_1\hat{\underline{I}}_1} = \frac{\underline{D}\hat{\underline{U}}_1 + \underline{B}\hat{\underline{I}}_1}{\underline{C}\hat{\underline{U}}_1 + \underline{A}\hat{\underline{I}}_1} = \frac{\underline{D}\underline{Z}_1 + \underline{B}}{\underline{C}\underline{Z}_1 + \underline{A}}, \qquad (7.35)$$

Impedanța caracteristică (*iterativă*) *directă* la bornele 1'–1'' ale unui cuadripol liniar, pasiv şi reciproc este prin definiție impedanța $\underline{Z}_{c1}$ care conectată la bornele 2'–2'' dă la bornele 1'–1'' o

impedanță echivalentă de aceeaşi valoare (7.8, a). Analog se defineşte *impedanța caracteristică* (*iterativă*) *inversă* $\underline{Z}_{c2}$ la bornele 2'–2'' (fig. 7.8, b).

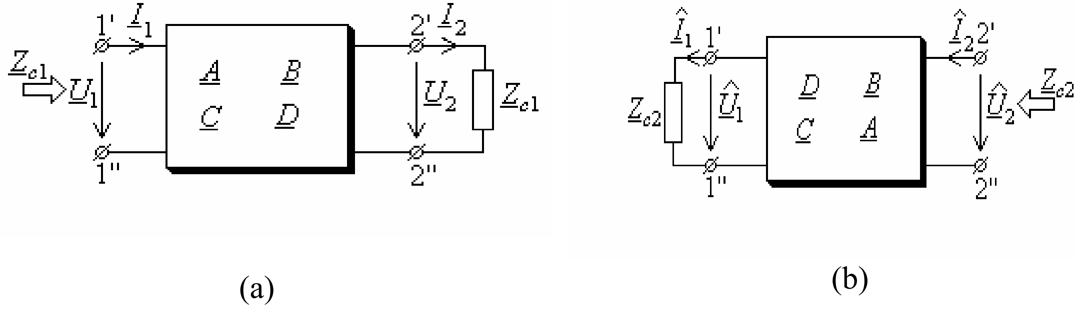


Fig. 7.8. Definirea impetanțelor caracteristice (iterative).

Luând în considerație relațiile (7.69), (7.71) şi definițiile impedanțelor iterative $\underline{Z}_{c1}$ şi $\underline{Z}_{c2}$, rezultă:

$$\underline{Z}_{c1} = \frac{1}{2\underline{C}}\left[\left(\underline{A}-\underline{D}\right) \pm \sqrt{\left(\underline{A}-\underline{D}\right)^2 + 4\underline{B}\underline{C}}\right] \tag{7.36}$$

şi, respectiv

$$\underline{Z}_{c2} = \frac{1}{2\underline{C}}\left[\left(\underline{D}-\underline{A}\right) \pm \sqrt{\left(\underline{D}-\underline{A}\right)^2 + 4\underline{B}\underline{C}}\right], \tag{7.37}$$

convenindu-se să se ia acea valoare a radicalului care conduce la o impedanță complexă cu o parte reală nenegativă.

În funcție de impedanțele de funcționare în gol $\underline{Z}_{10}$, $\underline{Z}_{20}$ şi în scurtcircuit $\underline{Z}_{1sc}$, impedanțele caracteristice au expresiile:

$$\underline{Z}_{c1} = \frac{1}{2}\left[\underline{Z}_{10} - \underline{Z}_{20} \pm \sqrt{\left(\underline{Z}_{10} - \underline{Z}_{20}\right)^2 + 4\underline{Z}_{20}\underline{Z}_{1sc}}\right], \tag{7.38}$$

respectiv

$$\underline{Z}_{c2} = \frac{1}{2}\left[\underline{Z}_{20} - \underline{Z}_{10} \pm \sqrt{\left(\underline{Z}_{10} - \underline{Z}_{20}\right)^2 + 4\underline{Z}_{20}\underline{Z}_{1sc}}\right]. \tag{7.39}$$

O altă mărime care se introduce este exponentul de transfer pe impedanța caracteristică, $\underline{\gamma}_c$, definit cu relația:

$$e^{\underline{\gamma}_c} \overset{\mathrm{d}}{=} \sqrt{\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}}, \tag{7.40}$$

unde tensiunile şi curenții sunt cei care se realizează când la bornele 2'–2''este conectată impedanța caracteristică $\underline{Z}_{c1}$.

Deoarece

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \underline{Z}_{c1}, \tag{7.41}$$

rezultă:

$$e^{\underline{\gamma}_c} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}. \tag{7.42}$$

Din relațiile (7.74) şi (7.80) se obține:

$$e^{\underline{\gamma}_c} = \frac{1}{2}\left[\left(\underline{A}+\underline{D}\right)+\sqrt{\left(\underline{A}+\underline{D}\right)^2-4}\right]. \tag{7.43}$$

Cu relațiile (7.36), (7.37), (7.31) şi relația de reciprocitate (7.21), parametrii fundamentali $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}$ ai cuadripolului se pot exprima în funcție de impedanțele iterative $\underline{Z}_{c1}$, $\underline{Z}_{c2}$ şi de exponentul de transfer pe impedanța iterativă $\underline{\gamma}_c$ astfel:

$$\begin{aligned}
&\underline{A} = ch\underline{\gamma}_c + \frac{\underline{Z}_{c1}-\underline{Z}_{c2}}{\underline{Z}_{c1}+\underline{Z}_{c2}} sh\underline{\gamma}_c; \quad \underline{B} = 2\frac{\underline{Z}_{c1}\underline{Z}_{c2}}{\underline{Z}_{c1}+\underline{Z}_{c2}} sh\underline{\gamma}_c; \\
&\underline{C} = \frac{2}{\underline{Z}_{c1}+\underline{Z}_{c2}} sh\underline{\gamma}_c; \quad \underline{D} = ch\underline{\gamma}_c + \frac{\underline{Z}_{c2}-\underline{Z}_{c1}}{\underline{Z}_{c1}+\underline{Z}_{c2}} sh\underline{\gamma}_c.
\end{aligned} \tag{7.44}$$

În consecință, ecuațiile cuadripolului liniar, pasiv şi reciproc se pot exprima şi în forma:

$$\begin{bmatrix}\underline{U}_1\\ \underline{I}_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ch\underline{\gamma}_c + \frac{\underline{Z}_{c1}-\underline{Z}_{c2}}{\underline{Z}_{c1}+\underline{Z}_{c2}} sh\underline{\gamma}_c & 2\frac{\underline{Z}_{c1}\underline{Z}_{c2}}{\underline{Z}_{c1}+\underline{Z}_{c2}} sh\underline{\gamma}_c \\ \frac{2}{\underline{Z}_{c1}+\underline{Z}_{c2}} sh\underline{\gamma}_c & ch\underline{\gamma}_c + \frac{\underline{Z}_{c2}-\underline{Z}_{c1}}{\underline{Z}_{c1}+\underline{Z}_{c2}} sh\underline{\gamma}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix}\underline{U}_2\\ \underline{I}_2\end{bmatrix}. \tag{7.45}$$

Un lanț omogen de cuadripoli (fig. 7.9, unde indicii curenților şi tensiunilor la borne au valorile: 1, 2, 3, …, n+1) este un cuadripol ale cărui impedanțe caracteristice (echivalente) sunt egale cu impedanțele caracteristice ale cuadripolilor componenți

$$\underline{Z}_{ec1} = \underline{Z}_{c1}, \quad \underline{Z}_{ec2} = \underline{Z}_{c2}, \tag{7.46}$$

şi care are un exponent de transfer echivalent dat de relația

$$\underline{\gamma}_{ec} = \ln\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_{n+1}} = \ln\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_3}\cdots\frac{\underline{U}_{n-1}}{\underline{U}_n}\frac{\underline{U}_n}{\underline{U}_{n+1}} = \ln\left(e^{\underline{\gamma}_c}\right)^n = n\underline{\gamma}_c. \tag{7.47}$$

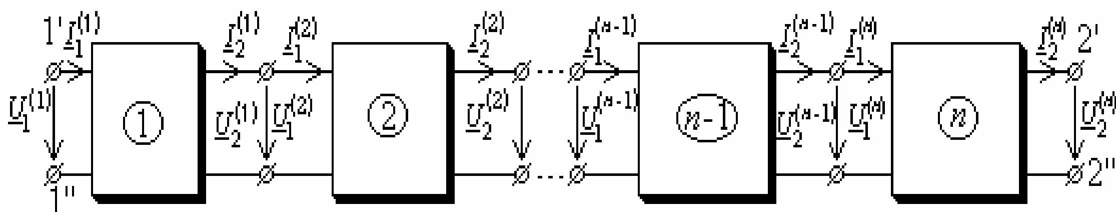


Fig. 7.9. Lanț omogen de cuadripoli conectaşi în cascadă.

Prin urmare, ecuația matriceală a întregului lanț se exprimă simplu în funcție de numărul n al cuadripolilor identici, impedanțele caracteristice şi exponentul de transfer pe impedanțe caracteristice, printr-o ecuație similară, ca formă, cu (7.45).

Părțile reală a_c şi imaginară b_c ale exponentului de transfer $\underline{\gamma}_c = a_c + jb_c$ se numesc *factor* (*constantă*) *de atenuare* şi, respectiv *factor* (*constantă*) *de fază* ale cuadripolului

$$a_c = \ln\frac{U_1}{U_2}; \quad b_c = \arg(\underline{U}_1) - \arg(\underline{U}_2). \tag{7.48}$$

De regulă, factorul de atenuare a_c dat de prima relație din (7.86) se exprimă într-o unitate numită **neper** (**nep**). Factorul de atenuare este de un neper când $U_1/U_2 = e$. Uneori se foloseşte o altă unitate de atenuare numită **bell** (**B**): $1\,\text{nep} = 2\log e = 0{,}8686\,\text{B}$. Valoarea factorului de atenuare în belli este dată de relația:

$$a_{cb} = 2\log\frac{U_1}{U_2}. \tag{7.49}$$

Impedanțele iterative intervin şi în probleme de adaptare a unui dipol generator de impedanță internă $\underline{Z}_g$ cu un dipol receptor de impedanță $\underline{Z}_s$, în anumite condiții care nu permit conectarea lor directă (fig. 7.10, a). De exemplu, dacă este necesar să se separe componentele de curent continuu din circuitele celor doi dipoli, se intercalează un cuadripol pasiv (fig. 7.10, b).Condițiile de adaptare dintre dipoli nu se modifică prin introducerea cuadripolului dacă impedanța caracteristică dire ctă $\underline{Z}_{c1}$ a acestuia este egală cu impedanța $\underline{Z}_s$ a sarcinii $\underline{Z}_{c1} = \underline{Z}_s$, iar impedanța caracteristică inversă $\underline{Z}_{c2}$ este identică cu impedanța internă a generatorului $\underline{Z}_{c2} = \underline{Z}_g$.

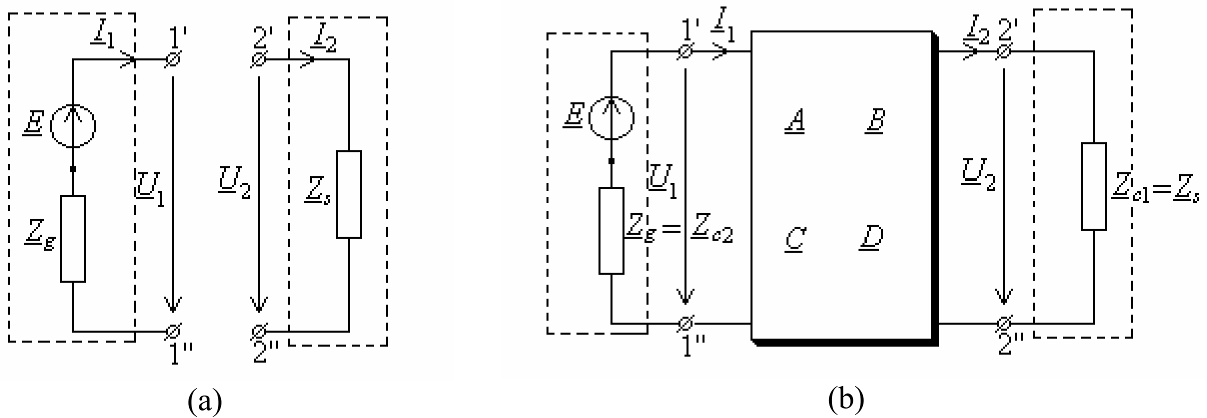


Fig. 7.10. Adaptarea cu impedanțele iterative a unui generator de impedanță internă $\underline{Z}_g$.

7.5. IMPEDANȚELE IMAGINI ŞI EXPONENTUL DE TRANSFER PE IMPEDANȚE IMAGINI

Studiul lanțurilor de cuadripoli liniari, pasivi, reciproci şi cu borne alternante (fig. 7.9) se simplifică substanțial dacă ecuațiile cuadripolilor se exprimă în funcție de parametrii care se definesc în cele ce urmează.

Impedanțele $\underline{Z}_{i1}$ şi $\underline{Z}_{i2}$ se numesc *impedanțe imagini* ale cuadripolului liniar, pasiv şi reciproc, dacă conectând impedanța $\underline{Z}_{i2}$ la bornele secundare, impedanța de intrare primară este egală cu $\underline{Z}_{i1}$ şi dacă conectând impedanța $\underline{Z}_{i1}$ la bornele primare, impedanța de intrare secundară este egală cu $\underline{Z}_{i2}$ (fig. 7.11).

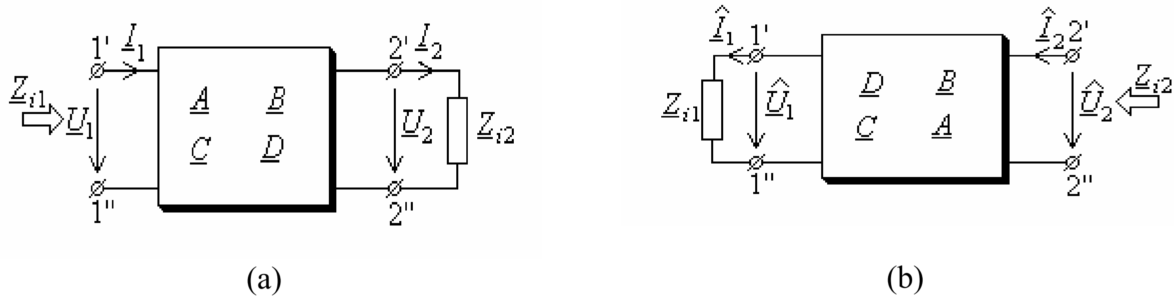


Fig. 7.11. Definirea impedanțelor imagini.

În conformitate cu relațiile (7.31) şi (7.35) impedanțele $\underline{Z}_{i1}$, $\underline{Z}_{i2}$ sunt soluții ale următorului sistem de ecuații:

$$\underline{Z}_{i1} = \frac{\underline{A}\underline{Z}_{i2} + \underline{B}}{\underline{C}\underline{Z}_{i2} + \underline{D}}, \quad \underline{Z}_{i2} = \frac{\underline{D}\underline{Z}_{i1} + \underline{B}}{\underline{C}\underline{Z}_{i1} + \underline{A}}. \tag{7.50}$$

Rezolvând sistemul (7.50), se obține:

$$\underline{Z}_{i1} = \pm\sqrt{\frac{\underline{A}\underline{B}}{\underline{C}\underline{D}}}, \quad \underline{Z}_{i2} = \pm\sqrt{\frac{\underline{D}\underline{B}}{\underline{C}\underline{A}}}. \tag{7.51}$$

În funcție de impedanțele de funcționare în gol şi în scurtcircuit, impedanțele imagini au expresiile următoare:

$$\underline{Z}_{i1} = \pm\sqrt{\underline{Z}_{10}\underline{Z}_{1sc}}, \quad \underline{Z}_{i2} = \pm\sqrt{\underline{Z}_{20}\underline{Z}_{2sc}}. \tag{7.52}$$

În formulele impedanțelor imagini se alege semnul care asigură realizarea lor, prin urmare

$$\mathrm{Re}\{\underline{Z}_{i1}\} \geq 0, \quad \mathrm{Re}\{\underline{Z}_{i2}\} \geq 0. \tag{7.53}$$

Exponentul de transfer pe impedanța imagine $\underline{\gamma}_i$ (când la una din perechile de borne ale cuadripolului se conectează impedanța imagine respectivă) este definit de relația:

$$e^{\underline{\gamma}_i} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \sqrt{\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}}, \tag{7.54}$$

unde tensiunile şi curenții sunt cei care se realizează când la bornele 2'–2'' este conectată impedanța imagine $\underline{Z}_{i2}$.

Considerând semnul plus în relațiile (7.51), după câteva calcule, se obține:

$$e^{\underline{\gamma}_i} = \sqrt{\underline{A}\underline{D}} + \sqrt{\underline{B}\underline{C}}. \tag{7.55}$$

Cu relațiile (7.51), (7.55) şi relația de reciprocitate (7.21), parametrii fundamentali de transfer $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}$ ai cuadripolului se pot exprima în funcție de impedanțele imagini $\underline{Z}_{i1}$, $\underline{Z}_{i2}$ şi de exponentul de transfer pe impedanțele imagini $\underline{\gamma}_i$ astfel:

$$\underline{A} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{i1}}{\underline{Z}_{i2}}} ch\underline{\gamma}_i; \quad \underline{B} = \sqrt{\underline{Z}_{i1}\underline{Z}_{i2}} sh\underline{\gamma}_i;$$
$$\underline{C} = \frac{1}{\sqrt{\underline{Z}_{i1}\underline{Z}_{i2}}} sh\underline{\gamma}_i; \quad \underline{D} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{i2}}{\underline{Z}_{i1}}} ch\underline{\gamma}_i. \tag{7.56}$$

În consecință, ecuațiile cuadripolului liniar, pasiv şi reciproc se pot exprima şi în forma:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\underline{Z}_{i1}}{\underline{Z}_{i2}}} ch\underline{\gamma}_i & \sqrt{\underline{Z}_{i1}\underline{Z}_{i2}} sh\underline{\gamma}_i \\ \frac{1}{\sqrt{\underline{Z}_{i1}\underline{Z}_{i2}}} sh\underline{\gamma}_i & \sqrt{\frac{\underline{Z}_{i2}}{\underline{Z}_{i1}}} ch\underline{\gamma}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}. \tag{7.57}$$

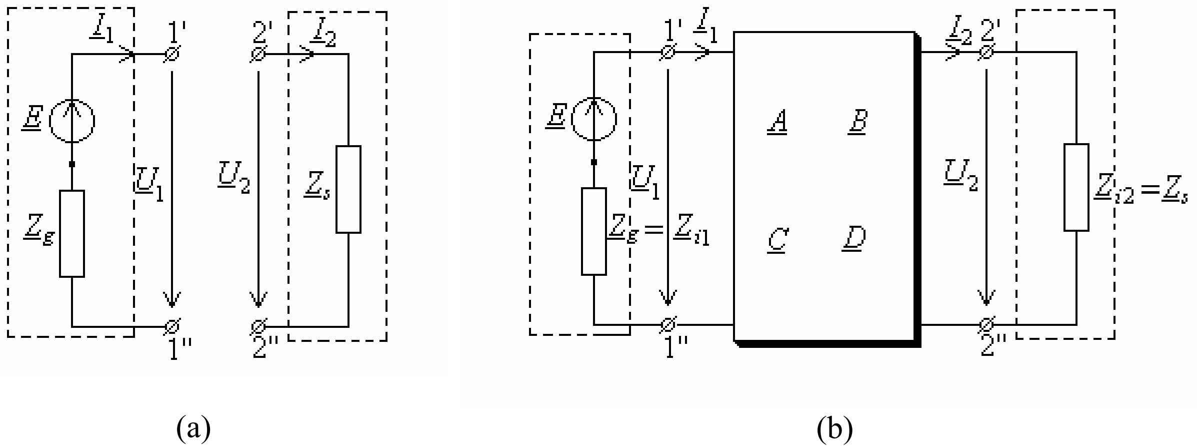
Dacă un lanț de cuadripoli (fig. 7.9, unde indicii curenților şi tensiunilor la borne au valorile: 1, 2, 3, …, n+1) are un număr impar de elemente, $n = 2m + 1$, el formează un cuadripol echivalent cu impedanțele imagini:

$$\underline{Z}_{ei1} = \underline{Z}_{i1}, \quad \underline{Z}_{ei2} = \underline{Z}_{i2} \ , \tag{7.58}$$

şi un exponent de transfer pe impedanțele imagini echivalent

$$\underline{\gamma}_{ei} = \ln\left(\sqrt{\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}} \cdot \sqrt{\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_3}\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_3}} \dots \sqrt{\frac{\underline{U}_n}{\underline{U}_{n+1}}\frac{\underline{I}_n}{\underline{I}_{n+1}}} \right) = n\underline{\gamma}_i \, . \tag{7.59}$$

Prin urmare, ecuația matriceală a întregului lanț se exprimă simplu în funcție de numărul n al cuadripolilor, impedanțele imagini şi exponentul de transfer pe impedanțele imagini, printr-o ecuație similară, ca formă, cu (7.57).



(a) (b)

Fig. 7.12. Adaptarea cu impedanțele imagini a unui generator de impedanță internă $\underline{Z}_g$.

Impedanțele imagini intervin şi în probleme de satisfacere a condițiilor de adaptare a sarcinii de impedanță $\underline{Z}_s$ la un generator de impedanță internă $\underline{Z}_g$, încât prin introducerea unui cuadripol cele două impedanțe să fie egale. În acest scop, impedanța imagine $\underline{Z}_{i1}$ a cuadripolului

la intrare trebuie să fie egală cu impedanţa internă a generatorului $\underline{Z}_g$, $\underline{Z}_{i1} = \underline{Z}_g$ şi impedanţa imagine la ieşire $\underline{Z}_{i2}$ trebuie să fie egală cu impedanţa de sarcină $\underline{Z}_s$, $\underline{Z}_{i2} = \underline{Z}_s$ (fig. 7.12).

Un cuadripol liniar şi pasiv se numeşte *simetric* dacă la inversarea bornelor de intrare 1'-1'' cu bornele de ieşire 2'-2'' nu se schimbă tensiunile şi curenţii în exteriorul cuadripolului. Deci, la un cuadripol simetric $\underline{Y}_{11} = -\underline{Y}_{22}$ şi $\underline{Y}_{12} = -\underline{Y}_{21}$.

Din relaţiile (7.16)-(7.19) rezultă că un cuadripol simetric este un cuadripol reciproc cu $\underline{A} = \underline{D}$.

La un cuadripol simetric sunt satisfăcute relaţiile:

$$\underline{Z}_{c1} = \underline{Z}_{c2} = \underline{Z}_{i1} = \underline{Z}_{i2} = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}} \stackrel{d}{=} \underline{Z}_c, \quad \underline{\gamma}_c = \underline{\gamma}_i = \ln\left(\underline{A} + \sqrt{\underline{BC}}\right). \tag{7.60}$$

În consecinţă, ecuaţia matriceală a cuadripolului simetric capătă forma:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ch\underline{\gamma}_c & \underline{Z}_c sh\underline{\gamma}_c \\ \frac{1}{\underline{Z}_c} sh\underline{\gamma}_c & ch\underline{\gamma}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}. \tag{7.61}$$

7.6. FILTRE ELECTRICE

7.6.1. Introducere

Filtrele electrice sunt cuadripoli diport care transmit semnale (tensiuni şi curenţi) de anumite frecvenţe, respectiv semnale ale căror frecvenţe sunt cuprinse în anumite intervale. Frecvenţele care se transmit prin filtrare (practic) fără atenuare alcătuiesc *intervalele* (*benzile*) *de trecere*, iar cele care atenuează puternic tensiunile şi curenţii formează *intervalele* (*benzile*) *de atenuare* sau *de oprire*. Cele mai simple filtre sunt circuitele *RLC* serie şi paralel, studiate în capitolul 1. Aceste circuite simple sunt filtre ale semnalelor având frecvenţe apropiate de frecvenţa de rezonanţă, mai exact în intervalul Δf în care atenuarea este de 3 decibelli.

Filtrele electrice sunt formate din unul sau mai mulţi cuadripoli, numiţi şi secţiuni de filtrare, conectaţi în lanţ. Aceste structuri cuadripolare sunt, în general, structuri în Γ, în T, în Π, în punte sau altele.

Comportarea selectivă faţă de frecvenţă a filtrelor se datoreşte variaţiei diferite cu frecvenţa a reactanţelor inductive şi capacitive. Frecvenţele care delimitează benzile de trecere şi de oprire se numesc *frecvenţe de tăiere* sau *frecvenţe limită*.

În telecomunicaţii, filtrul este un sistem de transmisiune diport, construit dintr-un cuadripol sau lanţ de cuadripoli, având o schemă echivalentă de cuadripol. Partea reală a exponentului caracteristic de transfer al cuadripolului echivalent este atenuarea filtrului $a(\omega)$, iar partea imaginară este defazajul filtrului $b(\omega)$. Introducerea unui filtru într-un canal de transmisiune poate produce favorizarea sau blocarea trecerii componentelor de anumite frecvenţe ale semnalului transmis.

După natura benzilor de trecere şi de atenuare, filtrele se clasifică în:
- *filtre trece-sus*, care au banda de oprire $(0, f_1)$ şi banda de trecere (f_1, ∞);
- *filtre trece-jos*, care au banda de trecere $(0, f_1)$ şi banda de oprire (f_1, ∞);

- *filtre trece-bandă*, care au banda de trecere (f_1, f_2)şi benzile de oprire $(0, f_1)$ şi (f_2, ∞), cu $f_1 < f_2$;
- *filtre opreşte-bandă*, care au banda de oprire (f_1, f_2)şi benzile de trecere$(0, f_1)$ şi (f_2, ∞), cu $f_1 < f_2$;
- *filtre în pieptene*, care au mai multe benzi de oprire şi de trecere alternante.

Dacă pierderile de energie în rezistoarele conductoarelor, în dielectricii condensatoarelor şi în miezurile bobinelor sunt neglijate – sau se pot neglija într-o primă aproximaţie, - filtrul se numeşte *fără pierderi* sau *nedisipativ*.

Din punct de vedere al elementelor de circuit componente, există: filtre cu elemente reactive (*LC*), filtre *RC*, filtre *cu rezonatoare piezoelectrice* etc. Principalele filtre cu elemente reactive care se folosesc în sistemele de telecomunicaţii sunt filtrele tip K, filtrele tip m, filtrele în punte şi filtrele diferenţiale.

Modul cum se transmit semnalele (tensiunile şi curenţii) printr-un cuadripol, şi deci atenuarea acestora la un filtru, depinde de impedanţa elementului conectat la ieşirea filtrului. În teoria filtrelor electrice se consideră de obicei filtre simetrice şi, pentru simplificare, se admite că la ieşirea fiecărui filtru este conectată impedanţa sa imagine (este adaptat pe impedanţa sa imagine).

Curbele corespunzătoare de variaţie cu frecvenţa a atenuării (*a*) şi defazajului (*b*) se numesc *caracteristici de frecvenţă ale filtrului*.

Deşi filtrele reale nu sunt pur reactive şi nu funcţionează adaptat, teoria filtrelor pe modelul lanţului de cuadripoli simetrici nedisipativi şi adaptat pune în evidenţă principalele probleme ale filtrelor electrice.

7.6.2. Studiul filtrelor fără pierderi

Filtrele fără pierderi fiind construite din elemente de circuit pur reactive au impedanţele complexe pur imaginare. Prin urmare, toţi curenţii, la mers în gol sau scurtcircuit, sunt în cuadratură cu tensiunea la bornele de intrare. Tensiunile la borne în aceleaşi regimuri de funcţionare sunt toate în fază sau în opoziţie de fază. Ca urmare, din relaţiile (7.16)-(7.19), rezultă *că la un cuadripol fără pierderi parametrii* $\underline{A}$ *şi* $\underline{D}$ *sunt reali, iar parametrii* $\underline{B}$ *şi* $\underline{C}$ *sunt pur imaginari*.

Impedanţele imagini (7.51) şi cotangenta hiperbolică a exponentului pe transfer pe impedanţele imagini (7.55):

$$\underline{Z}_{i1} = \sqrt{\frac{\underline{A}\underline{B}}{\underline{C}\underline{D}}}, \quad \underline{Z}_{i2} = \sqrt{\frac{\underline{D}\underline{B}}{\underline{C}\underline{A}}}, \quad cth\underline{\gamma}_{\mathrm{i}} = \sqrt{\frac{\underline{A}\underline{D}}{\underline{B}\underline{C}}} \tag{7.62}$$

sunt deci reale sau pur imaginare, deoarece valorile expresiilor de sub radical sunt reale.

În cazul unui cuadripol reciproc, fiind valabilă relaţia de reciprocitate (7.21), rezultă:

$$\underline{\gamma}_{\mathrm{i}} = \ln\left(\sqrt{AD} + \sqrt{AD - 1}\right) \text{ şi } cth\underline{\gamma}_{\mathrm{i}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{AD}}} \ . \tag{7.63}$$

În consecinţă: *cuadripolii fără pierderi şi reciproci au exponentul de transfer cu partea reală nulă (pozitivă) şi deci impedanţele imagine reale* (*pur imaginare*) *dacă şi numai dacă produsul AD este* (*nu este*) *cuprins între* 0 *şi* 1

$$0 \le AD \le 1 \qquad ((7.64)$$

Intervalele de trecere pentru filtrele fără pierderi şi reciproce sunt formate din toate frecvenţele pentru care este satisfăcută inegalitatea (7.64). Din relaţia (7.63) rezultă că în intervalul de trecere avem:

$$a = 0, \quad b = arcctg \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{AD} - 1}} + k\pi = \arccos\sqrt{AD} + k\pi\,. \tag{7.65}$$

Pentru aceleaşi filtre, intervalele de oprire sunt formate din toate frecvenţele pentru care nu este satisfăcută inegalitatea (7.103). În acest interval, atenuarea este dată de expresia cotangentei ei hiperbolice

$$a = \arg cth \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{AD}}} = \arg ch\sqrt{AD}, \quad b = \begin{cases} \pm\frac{\pi}{2}, & AD \le 0 \\ 0 \text{ sau } \pi, & AD \ge 1 \end{cases}. \tag{7.66}$$

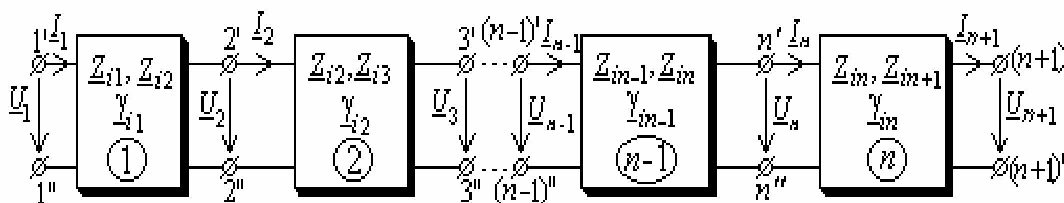
În tabelul 7.1 sunt prezentate rezultatele obţinute mai sus pentru filtrele fără pierderi şi reciproce.

Tabelul 7.1

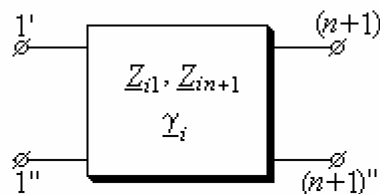
Intervalul de trecere	**Impedanţele imagini reale**	Exponentul de transfer pur imaginar
Intervalul de oprire	**Impedanţele imagini pur imaginare**	Exponentul de transfer cu partea reală pozitivă

Un lanţ de cuadipoli adaptaţi pe impedanţe imagini (fig. 7.13, a) este echivalent cu cuadripolul simetric reprezentat în figura 7.13, b. Exponentul de transfer pe impedanţe imagine al cuadripolului echivalent este egal cu suma exponenţilor de transfer ai cuadripolilor (adaptaţi pe impedanţe imagini) şi conectaţi în cascadă

$$\underline{\gamma}_{\mathrm{i}} = \underline{\gamma}_{i1} + \underline{\gamma}_{\mathrm{i}2} + \ldots + \underline{\gamma}_{\mathrm{i,n-1}} + \underline{\gamma}_{\mathrm{i,n}}\,. \tag{7.67}$$



(a)



(b)

Fig. 7.13. Lanţ de cuadripoli adaptaţi pe impedanţe imagini.

7.6.3. Filtre fără pierderi, simetrice

La filtrele simetrice $\underline{A} = \underline{D}$ şi ca urmare relaţiile (7.101) şi (7.102) devin:

$$\underline{Z}_i = \underline{Z}_{i1} = \underline{Z}_{i2} = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}}, \tag{7.68}$$

respectiv

$$\underline{\gamma}_{\,\mathrm{i}} = \ln\left(A + \sqrt{A^2 - 1}\right) \text{ şi } ch\underline{\gamma}_{\,\mathrm{i}} = A. \tag{7.69}$$

Intervalul de trecere rezultă, conform relaţie (7.103), din inegalitatea

$$-1 \le A \le 1. \tag{7.70}$$

Exemplul 7.1. Filtrul în Π, simetric, reprezentat în figura 7.14, a are parametrul

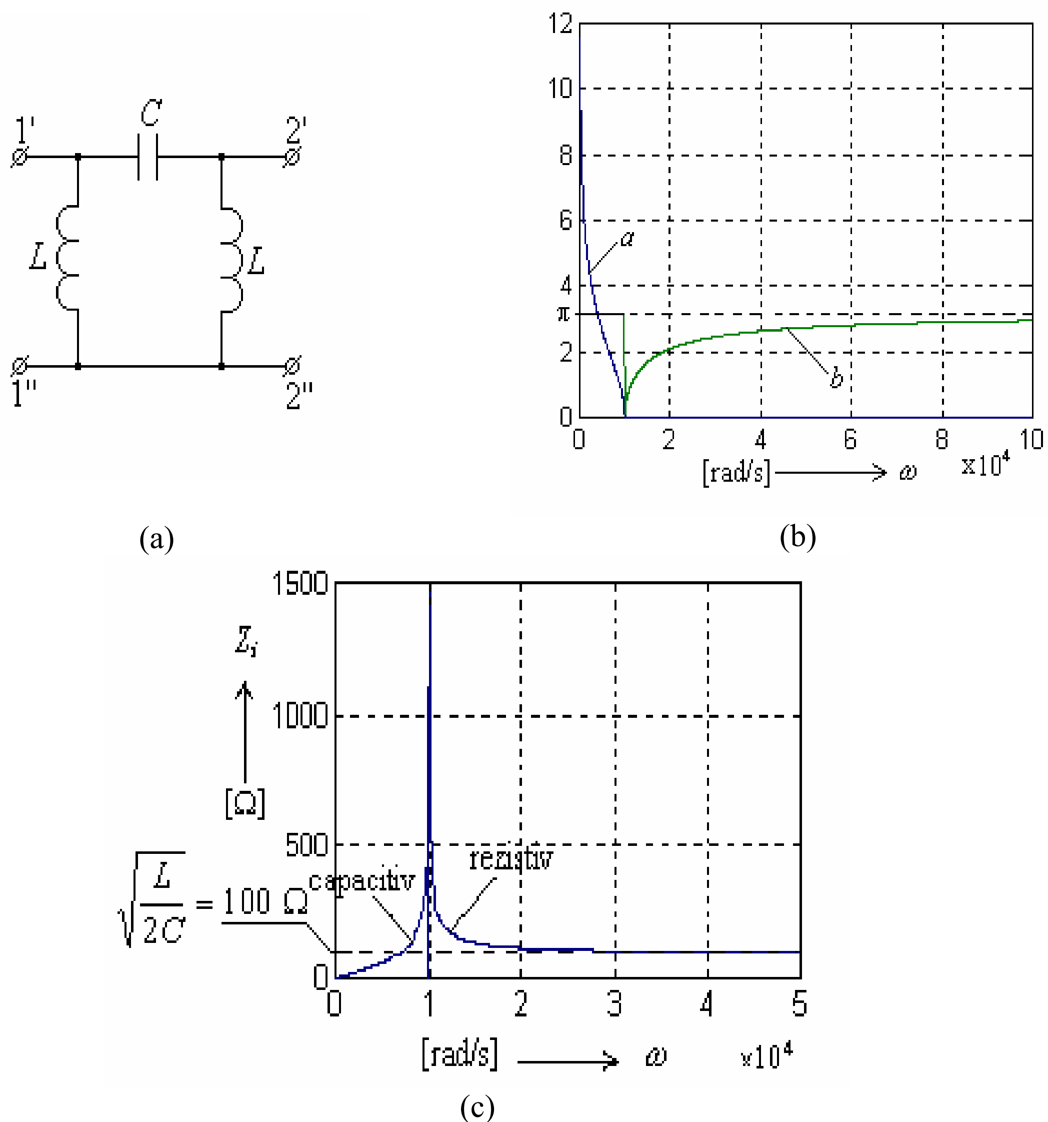


Fig. 7.14. Caraccteristicile unui fitru simetric trece sus.

$$\underline{A} = A = 1 - \frac{j}{\omega C}\frac{1}{j\omega L} = 1 - \frac{1}{\omega^2 LC}.$$

Filtrul din figura 7.14, a este un filtru trece-sus cu banda de trecere şi cea de oprire formate din pulsaţiile (ω_c, ∞), respectiv $(0, \omega_c)$, cu pulsaţia limită

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{2LC}}.$$

Factorul de atenuare în intervalul de oprire are expresia

$$a = \arg ch\left|1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right|.$$

Factorul de fază în intervalul de trecere are expresia

$$b = \arccos A = \arccos\left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right),$$

iar în intervalul de oprire $b = \pi$.

Caracteristicile de frecvenţă ale acestui filtru trece-sus sunt reprezentate, pentru valorile numerice $L = 10\,\text{mH}$ şi $C = 0{,}5\,\mu\text{F}$, în figura 7.14, b şi, respectiv în figura 7.14, c.

Impedanţa imagine a filtrului are expresia

$$\underline{Z}_{i1} = \underline{Z}_{i2} = \underline{Z}_i = \omega L\sqrt{\frac{1}{2\omega^2 LC - 1}}$$

şi este reală în intervalul de trecere şi pur imaginară (capacitivă) în intervalul de oprire (fig. 7.14, c).

7.6.4. Filtre de tip K

Un caz particular al filtrelor alcătuite din lanţuri de cuadripoli de tip Γ (fig. 7.15, a) sunt filtrele de tip K, ale căror impedanţe satisfac relaţia

$$\underline{Z}_1\underline{Z}_2 = K^2, \tag{7.71}$$

unde K este o constantă reală (pozitivă). Deoarece se consideră filtre fără pierderi, se pot utiliza notaţiile:

$$\underline{Z}_1 = jX_1; \quad \underline{Z}_2 = jX_2. \tag{7.72}$$

Parametrii fundamentali ai cuadripolului Γ au expresiile:

$$\underline{A} = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2}, \quad \underline{B} = \underline{Z}_1, \quad \underline{C} = \frac{1}{\underline{Z}_2}, \quad \underline{D} = 1. \tag{7.73}$$

şi, ca urmare, impedanţele imagini sunt

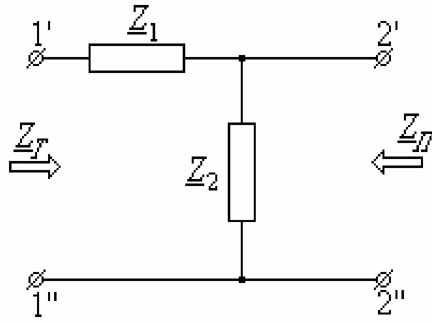


Fig. 7.15. Filtrul de tip k.

$$\underline{Z}_{i1} = \underline{Z}_T = K\sqrt{1-\left(\frac{X_1}{K}\right)^2} = K\sqrt{1-\left(\frac{K}{X_2}\right)^2},$$

$$\underline{Z}_{i2} = \underline{Z}_\Pi = \frac{K}{\sqrt{1-\left(\frac{X_1}{K}\right)^2}} = \frac{K}{\sqrt{1-\left(\frac{K}{X_2}\right)^2}}. \tag{7.74}$$

Din expresiile (7.74) se constată că impedanțele imagini satisfac o relație similară relației (7.71), şi anume:

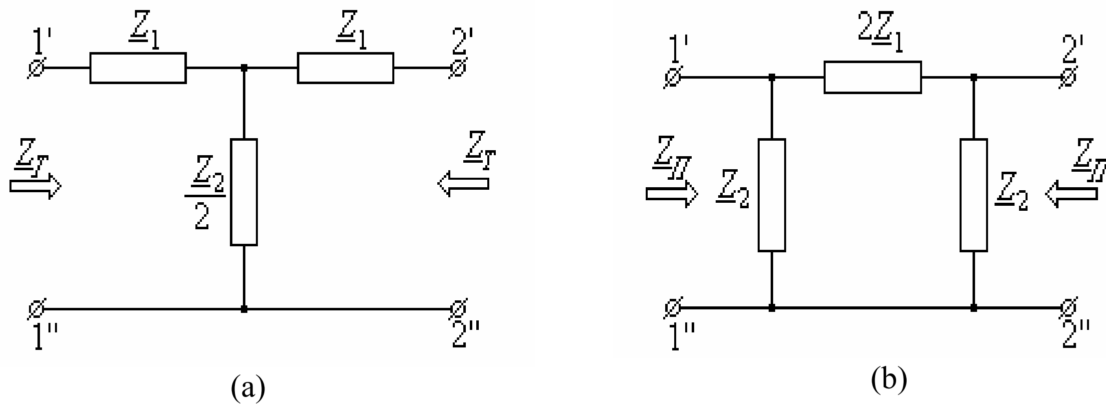
$$\underline{Z}_T\,\underline{Z}_\Pi = K^2. \tag{7.75}$$

Relația (7.63) conduce la

$$cth\underline{\gamma}_{i\Gamma} = \sqrt{1-\left(\frac{K}{X_1}\right)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{X_2}{K}\right)^2}. \tag{7.76}$$

Conectând în cascadă doi cuadripoli Γ identici, se obțin cuadripoli simetrici în T (fig. 7.16, a) sau Π (fig. 7.16, b), care sunt filtre cu impedanțele imagini $\underline{Z}_T$, respectiv $\underline{Z}_\Pi$ şi un exponent de transfer

$$\underline{\gamma}_{iT} = \underline{\gamma}_{i\Pi} = 2\underline{\gamma}_{i\Gamma}. \tag{7.77}$$



(a) (b)

Fig. 7.16. Conectarea în cascadă doi cuadripoli Γ identici.

În intervalul de oprire realizat de filtru, pentru frecvențele care satisfac inegalitatea

$$|X_1| > K, \tag{7.78}$$

echivalentă cu relația

$$-K < X_1 > K, \tag{7.79}$$

constanta de atenuare are expresia:

$$a_T = a_\Pi = 2a_\Gamma = 2\arg cth\sqrt{1-\left(\frac{K}{X_1}\right)^2} = 2\arg ch\sqrt{\left(\frac{X_1}{K}\right)^2 - 1}\,. \tag{7.80}$$

Constanta de fază are, în intervalul de trecere, expresia:

$$b_T = b_\Pi = 2b_\Gamma = 2\arg\cos\sqrt{1-\left(\frac{X_1}{K}\right)^2}\,. \tag{7.81}$$

Principalul avantaj al filtrelor K constă în faptul că sunt simple şi au o atenuare care în intervalul de oprire al filtrelor, unde X_1 şi X_2 variază monoton cu pulsaţia ω, creşte pe măsură ce pulsaţia ω se îndepărtează de pulsaţia limită care separă intervalul de oprire de cel de trecere (relaţia (7.80)).

Exemplul 7.2: Fie filtrul reprezentat în figura 7.17. Se cer:

a) Parametrii fundamentali ai cuadripolului;
b) Impedanţele iterative şi impedanţele imagine;
c) Natura filtrului, intervalele de trecere şi oprire şi să se reprezinte grafic caracteristicile de frecvenţă ale filtrului.

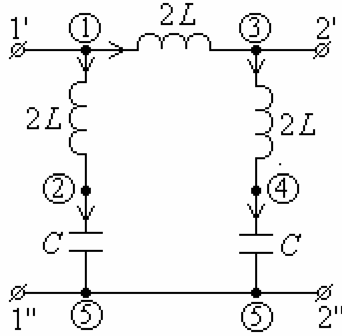


Fig. 7.17. Schema filtrului.

a) Plecând de la definiţiile parametrilor de transfer se obţine:

$$\underline{A} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{I}_2=0} = \frac{-1+4\omega^2 LC}{-1+2\omega^2 LC};\quad \underline{B} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{U}_2=0} = 2\omega Lj;$$

$$\underline{C} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{I}_2=0} = -2\omega Cj\frac{-1+3\omega^2 LC}{1-4\omega^2 LC+4\omega^4 L^2C^2};$$

$$\underline{D} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{U}_2=0} = \frac{-1+4\omega^2 LC}{-1+2\omega^2 LC}.$$

b) Deoarece cuadripolul analizat este un cuadripol simetric impedanţele caracteristice (iterartive) şi impedanţele imagine sunt identice:

$$\underline{Z}_{c1} = \underline{Z}_{c2} = \underline{Z}_{i1} = \underline{Z}_{i2} = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}} = \sqrt{\frac{L\left(1-4\omega^2 LC+4\omega^4 L^2C^2\right)}{3\omega^2 LC-1}}\,.$$

c) Din următoarele inegalităţi

$$-1 \le A \le 1$$

rezultă că filtrul din figura 7.17 este un filtru trece jos cu intervalul de trecere de [0, 12909.94449] şi intervalul de oprire (12909.94449, ∞).

Constanta de atenuare a şi constanta de faza b au, în intervalele de trecere ale filtrului, expresiile:

$$a = 0,\quad b = arcctg\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{AD}-1}} + k\pi = arccos\sqrt{AD} + k\pi\,,$$

iar în intervalele de oprire aceste mărimi sunt date de relațiile:

$$a = arg\ cth \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{AD}}} = \text{argch}\sqrt{AD}, \quad b = \begin{cases} \pm\frac{\pi}{2} & AD \le 0 \\ 0 \text{ sau } 1 & AD \ge 1 \end{cases} .$$

Pentru valorile numerice ale parametrilor L = 0.001 H şi C = 0.000002 F, caracteristicile de frecvență $a(\omega)$ şi $b(\omega)$ sunt reprezentate în figura 7.18, respectiv în figura 7.19.

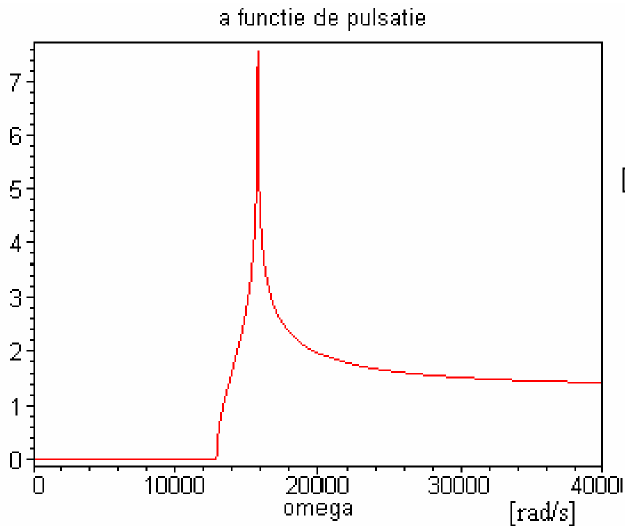


Fig. 5.18. Variația cu pulsația a atenuării.

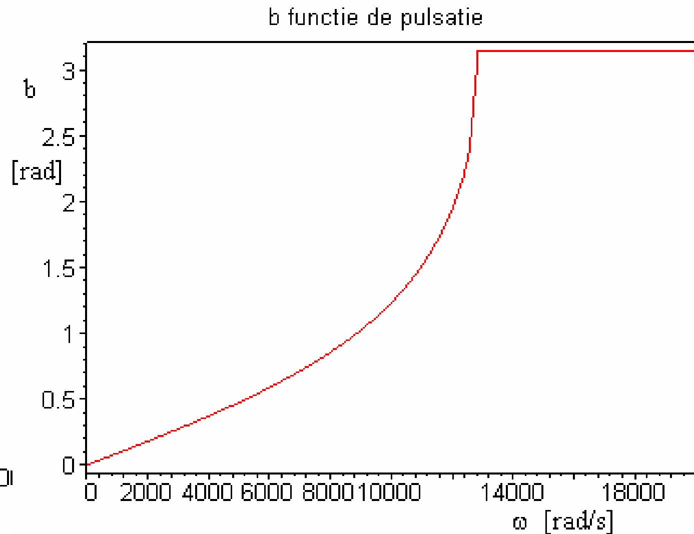


Fig. 5.19. Variația cu pulsația a constantei de

BIBLIOGRAFIE

1. **M. Preda, P. Cristea**, *Bazele electrotehnicii*, Vol.II, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980.

2. **C. I. Mocanu**, *Teoria circuitelor electrice*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.

3. **M. Preda** şi alții, *Bazele electrotehnicii - Culegere de probleme* (reeditată şi completată), Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.

4. **Lucia Dumitriu, M. Iordache**, *Teoria modernă a circuitelor electrice – Fundamentare teoretică, aplicații, algoritmi şi programe de calcul*, Vol I., Editura All Educational, Bucureşti, 1998.

5. 4. **M. Iordache**, **Lucia Dumitriu,** *Teoria modernă a circuitelor electrice – Fundamentare teoretică, aplicații, algoritmi şi programe de calcul*, Vol II., Editura All Educational, Bucureşti, 2000.

6. **M. Iordache,** *Culegere de probleme de electrotehnică, electronică şi maşini electrice*, Litografia Universității "Politehnica" Bucureşti, 1984.

7. **M. Iordache, Lucia Dumitriu,** *Culegere de probleme de electrotehnică - Circuite neliniare - Probleme, algoritmi şi programe de calcul*, Litografia Universității "Politehnica" Bucureşti, 1996.

8. **L. O. Chua, and P. M. Lin,** *Computer-aided of electronic circuit: Algorithms and computational techniques*, Englewood Cliffs, NJ: Prentince-Hall, 1975.

9. **R. Răduleț**, *Bazele Electrotehnicii - Probleme II*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1975.

10. **C. Şora**, *Cuadripolul electric*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1964.

11. **N. Balabanian, Th. Bickart, S. Seshu,** *Teoria moderna a circuitelor*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1974.

12. **A. D. Calahan,** *Computer-aided network design*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1972.

13. **A. E. Schwarz**, *Computer-aided design of microelectronic circuits and systems*, Academic Press, Londra, 1987.

14. **S. Franco,** *Electric Circuit Fundamentals*, Sauders College Publishing, Harcout Brace College Publishers, N.Y., London, 1995.

15. **P. Tuinega**, *SPICE: A Guide to Circuit Simulation and Analysis Using PSPICE*, Prentice-Hall, N.Y., 1988.

16. **T. Marian**, *SPICE*, Editura Teora, Bucureşti, 1996.

17. **M. Badea**, *Analiza asistată de calculator a circuitelor electrice*, Editura InfoMed, Craiova, 1997.

18. **W. J. McCalla**, *Fundamentals of Computer-Aided Circuit Simulation*, Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordecht/Lancaster, 1988.

19**. A. Timotin**, Viorica Hortopan, A. Ifrim, M. Preda, *Lecţii de Bazele Electrotehnicii*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1970.

20**. A. Moraru**, *Bazele electrotehnicii*', vol. II. Teoria circuitelor, Tipografia Universităţii Politehnica Bucureşti, 1993.

21. **D. Topan**, *Circuits électriques*, Editura Universitaria, Craiova, 1996.

22. **M. Iordache, M. Perpelea**, *Analiza asistata de calculator a circuitelor electrice si electronice neliniare complexe de mari dimensiuni*, Editura Didactica si Pedagogica, Bucureşti, 1995.

23. **M. Iordache, Lucia Dumitriu,** *Simularea asistată de calculator a circuitelor analogice*, Editura POLITEHNICA Press, Bucureşti 2002 (450).

24. **M. Iordache**, **L. Mandache,** *Analiza asistată de calculator a circuitelor analogice neliniare*, Editura POLITEHNICA Press, Bucureşti 2004.

25. **Lucia Dumitriu, M. Iordache**, *Simularea numerică a circuitelor analogice cu programul PSPICE*, Editura MATRIX ROM, Bucureşti, 2006.

26. **M. Iordache, L. Mandache, M. Perpelea**, *Analyse numérique circuits analogiques non linéaires*, Groupe Genoyer, Marseille, 2006.

27. **L. O. Chua, C. A. Desoer, E. S. Kuh** *Linear and nonlinear circuits*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1987.

28. **M. Iordache, Lucia Dumitriu** *„PGFC - Program de Generare a Funcţiilor de Circuit", Manual de utilizare.* Biblioteca de programe a Catedrei de Electrotehnică a Universităţii „Politehnica" Bucureşti, 1998.

CAPITOLUL 8

LINII ELECTRICE LUNGI

8.1. ECUAȚIILE LINIILOR ELECTRICE LUNGI ÎN MĂRIMI INSTANTANEE

Circuitele electrice cu parametri concentrați sunt cele formate din elemente dipolare de circuit care sunt definite prin modelarea dispozitivelor (componentelor) fizice selectând una din proprietățile electrice sau magnetice considerată esențială. De exemplu, pentru un rezistor, tensiunea la borne depinde în fiecare moment de intensitatea curentului la acelaşi moment şi în consecință el nu acumulează energie electrică sau magnetică. Deoarece un curent electric produce câmp magnetic, modelarea unui dispozitiv fizic prin rezistor presupune neglijarea energiei magnetice. La o bobină se ia în considerare numai câmpul magnetic stabilit de curentul prin înfăşurare şi se neglijează efectele rezistive din conductorul înfăşurării şi capacitive dintre spire. Analog, la condensatorul sub tensiune, se consideră numai câmpul electric din izolantul dintre armături şi se neglijează efectul rezistiv şi inductiv al armăturilor.

Localizarea fenomenelor de conducție electrică în rezistoare, a fenomenelor magnetice în bobine şi a celor electrice în condensatoare exclusiv, permite alcătuirea de circuite prin conectarea lor la noduri cu conductoare de conexiune presupuse perfect conductoare. Realizând această aproximare se neglijează în primul rând fenomenele de conducție din bobine şi condensatoare, a fenomenelor magnetice din rezistoare şi condensatoare şi a celor capacitive din bobine şi rezistoare; în al doilea rând, se neglijează fenomenele care însoțesc curentul prin conductoarele de conexiune a căror conductivitate este în realitate finită.

În cazul în care conductoarele de conexiune sunt suficient de lungi alcătuind linii de transmisie a energiei şi semnalelor electrice între părți ale circuitului, aceste fenomene nu mai pot fi neglijate. Liniile electrice scurte, adică liniile a căror lungime l este mult mai mică decât lungimea de undă λ a semnalului, se pot modela cu elemente de circuit cu parametri concentrați.

O linie electrică a cărei lungime este comparabilă cu lungimea de undă a semnalului se numeşte *linie electrică lungă*. Repartiția tensiunii şi curentului pe linie este descrisă de ecuații cu derivate parțiale şi linia admite o schemă cu rezistoare, bobine şi condensatoare distribuite uniform (circuit cu parametri uniform distribuiți).

Teoria circuitelor cu parametri distribuiți se aplică şi la studiul fenomenelor din domenii diferite, cum sunt: studiul supratensiunilor în transformatoare şi în înfăşurările maşinilor electrice, modelarea componentelor electronice (circuite integrate), modelarea circuitelor de interconexiune din circuitele integrate, precum şi în studiul fenomenelor de difuzie a căldurii, cîmpului electromagnetic, de transfer de masă etc.

În acest capitol, se stabilesc ecuațiile cu derivate parțiale de primul şi al doilea ordin - ecuațiile telegrafiştilor ale liniilor electrice lungi şi se tratează regimul armonic permanent.

8.1.1. Parametrii primari (naturali) ai liniilor electrice lungi

Se consideră linia lungă bifilară reprezentată în figura 8.1 de lungime l constituită din două conductoare dispuse paralel şi se notează cu 1, 1' bornele de intrare (dinspre generator), cu 2, 2' bornele de ieşire (dinspre receptor) şi cu x distanța măsurată în lungul liniei de la extremitatea 1, 1' . La o repartiție dată a tensiunii şi curentului la momentul $t = 0$, $u(x,0)$ şi $i(x,0)$ – **condiții inițiale** şi la valori date ale tensiunii şi curentului la extremitatea 1, 1' $u(0,t) = u_1(t)$ şi $i(0,t) = i_1(t)$ – **condiții la limită**, *problema fundamentală a liniei constă în determinarea tensiunii* $u(x,t)$ *la distanța* x *între două puncte situate la intersecția conductoarelor liniei cu un plan trnsversal şi la momentul t, respectiv a curentului* $i(x,t)$.

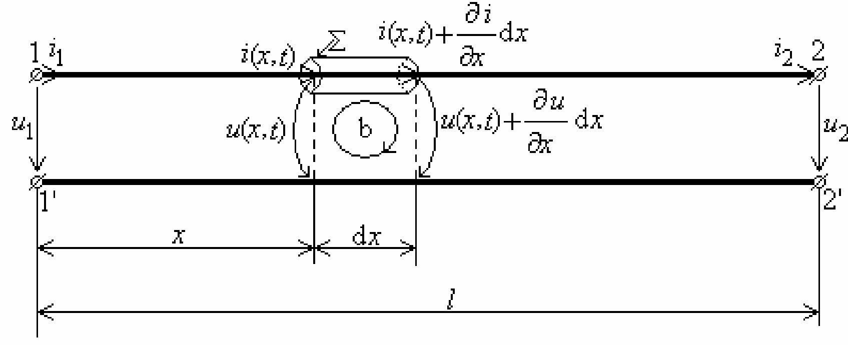


Fig. 8.1. Linie lungă bifilară.

În cazul liniei electrice lungi, parametrii se consideră uniform distribuiți în lungul liniei şi în consecință e convenabil să se definească parametrii specifici sau lineici, considerați ca densități de linie a rezistenței, inductivității, capacității şi conductanței (perditanței):

- *rezistența longitudinală lineică R_l*

$$R_l = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta x} \quad [\Omega/\mathrm{m}], \tag{8.1}$$

- *inductivitatea longitudinală lineică L_l*

$$L_l = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta L}{\Delta x} \quad [\mathrm{H/m}], \tag{8.2}$$

- *capacitatea transversală lineică C_l,*

$$C_l = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} \quad [\mathrm{F/m}], \tag{8.3}$$

- *conductanța (perditanța) transversală lineică G_l*

$$G_l = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta G}{\Delta x} \quad [\mathrm{S/m}], \tag{8.4}$$

Circuitele (liniile) care au parametrii lineici constanți în lungul liniei sunt numite *circuite* (*linii*) *omogene*. În cele ce urmează se presupune că linia este un circuit liniar, adică parametrii săi lineici sunt independenți de intensitatea curentului şi de tensiune.

O porțiune de lungime dx a liniei bifilare are parametrii R_ldx, L_ldx, G_ldx, C_ldx şi schema echivalentă reprezentată în figura 8.2.

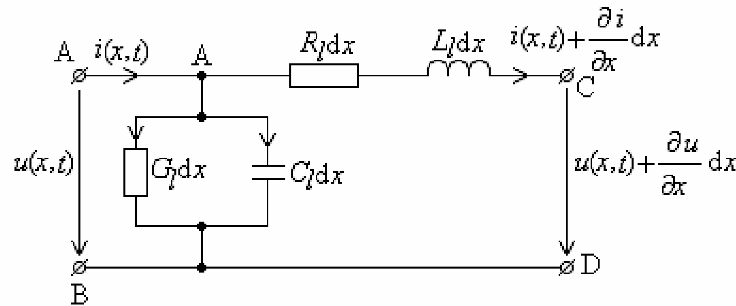


Fig. 8.2. Schema echivalentă a liniei bifilare de lungime dx.

Parametrii R_l, L_l, G_l şi C_l caracterizează intrinsec linia şi se numesc *parametrii primari* sau *naturali.* Pentru o linie bifilară, omogenă, aeriană şi izolată cu conductoare subțiri de rază *a*

situate la distanța $D >> a$ şi la mare depărtare de pământ parametrii R_l, L_l, şi C_l se calculează la frecvențe joase cu formulele

$$R_l = \frac{1}{\sigma\pi a^2}\left[\frac{\Omega}{m}\right];\; L_l = \frac{\mu_0\mu_r}{\pi}\ln\frac{D}{a}\left[\frac{H}{m}\right];\; C_l = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r\pi}{\ln\frac{D}{a}}\left[\frac{F}{m}\right]. \tag{8.5}$$

8.1.2. Ecuațiile cu derivate parțiale de primul ordin

Se consideră o linie electrică lungă bifilară care la distanşa x şi la momentul t are tensiunea $u(x,t)$ şi curentul $i(x,t)$. La distanța x+dx şi momentul t tensiunea $u(x+\mathrm{d}x,t)$ şi curentul $i(x+\mathrm{d}x,t)$ se dezvoltă în serie Taylor şi reținând numai primii doi termeni, rezultă expresiile:

$$\begin{aligned} u(x+\mathrm{d}x,t) &\approx u(x,t) + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + ... \\ i(x+\mathrm{d}x,t) &\approx i(x,t) + \frac{\partial i}{\partial x}\mathrm{d}x + ... \end{aligned} \tag{8.6}$$

Aplicând a doua teoremă a lui Kirchhoff pe conturul A – C – D – B – A din figura 8.2, şi neglijând termenii cu puteri de ordinul doi ale lui dx, rezultă:

$$\begin{aligned} &R_l\mathrm{d}x\left[i(x,t) + \frac{\partial i}{\partial x}\mathrm{d}x\right] + L_l\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial t}\left[i(x,t) + \frac{\partial i}{\partial x}\mathrm{d}x\right] + u(x,t) + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x - u(x,t) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\frac{\partial u}{\partial x} = R_l i + L_l\frac{\partial i}{\partial t}. \end{aligned} \tag{8.7}$$

Ultima ecuație din (8.7) se interpretează astfel: *scăderea tensiunii u pe unitatea de lungime a liniei este egală cu suma dintre căderile de tensiune rezistivă şi inductivă, ambele luate pe unitatea de lungime*.

Utilizând prima teorema a lui Kirchhoff în nodul A, se obține:

$$-i(x,t) + G_l\mathrm{d}x u(x,t) + C_l\mathrm{d}x\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + i(x,t) + \frac{\partial i}{\partial x}\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow -\frac{\partial i}{\partial x} = G_l u + C_l\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{8.8}$$

Ultima ecuație din (8.8) se interpretează astfel: *scăderea curentulu i pe unitatea de lungime a unui conductor al liniei este egală cu suma dintre curentul de pierderi prin izolantul dintre conductoare şi curentul capacitv, ambii luați pe unitatea de lungime*.

Ecuațiile (8.7) şi (8.8) formează un sistem de ecuații parțiale de primul ordin în raport cu tensiunea u şi curentul i.

În cazul în care în locul distanței x măsurată de la intrare, se consideră distanța $x' = l - x$ măsurată de la ieşire, ecuațiile (8.7) şi (8.8) scrise pentru $u(x',t)$ şi $i(x',t)$ în raport cu x' sunt următoarele:

$$\frac{\partial u}{\partial x'} = R_l i + L_l\frac{\partial i}{\partial t};\quad \frac{\partial i}{\partial x'} = G_l u + C_l\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{8.9}$$

8.1.3. Ecuațiile cu derivate parțiale de ordinul doi. Ecuațiile telegrafiştilor

Dacă între ecuațiile de primul ordin (8.7) şi (8.8) se elimină una dintre necunoscutele $u(x,t)$ sau $i(x,t)$ se poate obține o ecuație cu derivate parțiale de ordinul doi. Derivând ecuația (8.7) în raport cu x se obține:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -R_l \frac{\partial i}{\partial x} - L_l \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial i}{\partial t}\right) = -R_l \frac{\partial i}{\partial x} - L_l \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial i}{\partial x}\right) \tag{8.10}$$

în care s-a inversat ordinea de derivare în ultimul termen, deoarece linia este fixă, şi se substituie expresia lui $\partial i / \partial x$ din a doua ecuaţie (8.8), rezultă ecuaţia pentru tensiunea $u(x,t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = R_l G_l u + \left(R_l C_l + L_l G_l\right)\frac{\partial u}{\partial t} + L_l C_l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{8.11}$$

Procedând similar şi pentru curentul i, se deduce ecuaţia

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = R_l G_l i + \left(R_l C_l + L_l G_l\right)\frac{\partial i}{\partial t} + L_l C_l \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}. \tag{8.12}$$

În cosecinţă, tensiunea $u(x,t)$ şi curentul $i(x,t)$ satisfac ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul doi de aceeaşi formă, cu coeficienţi identici numite *ecuaţiile telegrafiştilor.* Trebuie remacat faptul că cele două ecuaţii nu sunt independente, ele fiind legate prin ecuaţiile de primul ordin (8.7) şi (8.8). Soluţionarea problemei liniilor electrice lungi se efectuează astfel: se integrează una din ecuaţii şi soluţia obţinută se introduce în oricare dintre ecuaţiile de ordinul întâi din care se deduce soluţia celeilalte necunoscute. Constantele de integrare din soluţii se determină din condiţiile iniţiale şi la limită (la extremitatea liniei).

8.1.4. Bilanţul puterilor instantanee pentru un tronson elementar de linie

Înmulţinând ecuaţia (8.7) cu i şi ecuaţia (8.8) cu u şi apoi adunându-le, se obţine:

$$-i\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial i}{\partial x} = R_l i^2 + G_l u^2 + L_l i\frac{\partial i}{\partial t} + C_l u\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{8.13}$$

respectiv,

$$-\frac{\partial}{\partial x}(ui) = R_l i^2 + G_l u^2 + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{L_l i^2}{2} + \frac{C_l u^2}{2}\right). \tag{8.14}$$

Ţinând seama că termenii din paranteză sunt puterea instantanee p, energia magnetică W_m, respectiv energia electrică W_e pe unitatea de lungime a liniei

$$p = ui,\ W_m = \frac{1}{2}L_l i^2,\ W_e = \frac{1}{2}C_l u^2, \tag{8.15}$$

relaţia (8.13) se poate scrie în forma

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = R_l i^2 + G_l u^2 + \frac{\partial}{\partial t}\left(W_m + W_e\right) \tag{5.1}$$

şi are următoarea interpretare: scăderea puterii instantanee p transmisă liniei este egală cu suma dintre puterile dezvoltate prin efect Joule în conductoarele liniei $R_l i^2$ şi în izolantul dintre conductoare $G_l u^2$ şi viteza de variaţie în timp a energiilor magnetică W_m şi electrică W_e, toate calculate pe unitatea de lungime a liniei.

8.2 LINII ELECTRICE LUNGI ÎN REGIM ARMONIC

În regim armonic, tensiunea $u(x,t)$ şi curentul $i(x,t)$ sunt în fiecare punct al liniei funcţii sinusoidale de timp de aceeaşi frecvenţă $f = \omega / 2\pi$, de forma

$$u(x,t) = \sqrt{2}U(x)\sin[\omega t + \alpha_u(x)],\ i(x,t) = \sqrt{2}I(x)\sin[\omega t + \alpha_u(x) - \varphi(x)], \tag{8.16}$$

în care valorile efective $U(x)$ şi $I(x)$, faza iniţială $\alpha(x)$ şi defazajul $\varphi(x)$ depind de distanţa x. Regimul armonic se stabileşte când la una din extremităţile liniei se aplică o tensiune sinusoidală şi după ce componentele libere datorate excitaţiei şi condiţiilor iniţiale se amortizează. De exemplu, se presupun date tensiunea $u(0,t) = u_1(t)$ şi curentul $i(0,t) = i_1(t)$

$$u_1(t) = \sqrt{2}U_1 \sin\left(\omega t + \alpha_{u_1}\right), \quad i_1(t) = \sqrt{2}I_1 \sin\left(\omega t + \alpha_{u_1} - \varphi_1\right). \tag{8.17}$$

În studiul regimului armonic al liniilor lungi se poate folosi reprezentarea simbolică în complex, ţinând seama că prin această reprezentare dependenţa spaţială a mărimilor nu este modificată.

Imaginile în complex ale tensiunii $u(x,t)$ şi a curentului $i(x,t)$ sunt:

$$\mathrm{C}\{u(x,t)\} = \underline{U}(x) = U(x)e^{j\alpha_u(x)}; \quad \mathrm{C}\{i(x,t)\} = \underline{I}(x) = I(x)e^{j(\alpha_u(x) - \varphi(x))} \tag{8.18}$$

Aplicînd operatorul reprezentării în complex ecuaţiilor cu derivate parţiale în mărimi instantanee (8.7) şi (8.8) rezultă următoarele ecuaţii diferenţiale ordinare cu mărimi complexe:

$$-\frac{\mathrm{d}\underline{U}}{\mathrm{d}x} = \left(R_l + j\omega L_l\right)\underline{I}, \quad -\frac{\mathrm{d}\underline{I}}{\mathrm{d}x} = \left(G_l + j\omega C_l\right)\underline{U}. \tag{8.19}$$

Mărimile complexe

$$\underline{Z}_l = R_l + j\omega L_l, \quad \underline{Y}_l = G_l + j\omega C_l \tag{8.20}$$

se numesc *impedanţa complexă lineică longitudinală* $\underline{Z}_l$, respectiv *admitanţa complexă lineică transversală* $\underline{Y}_l$ şi ecuaţiile (5.19) se pot scrie astfel:

$$-\frac{\mathrm{d}\underline{U}}{\mathrm{d}x} = \underline{Z}_l \underline{I}, \quad -\frac{\mathrm{d}\underline{I}}{\mathrm{d}x} = \underline{Y}_l \underline{U}. \tag{8.21}$$

Pentru obţinerea ecuaţiile telegrafiştilor în complex, se derivează în raport cu x ecuaţiile (8.19) şi se elimină succesiv una dintre necunoscute. În final se obţine:

$$\frac{\mathrm{d}^2\underline{U}}{\mathrm{d}x^2} = \left(R_l + j\omega L_l\right)\left(G_l + j\omega C_l\right)\underline{U}, \quad \frac{\mathrm{d}^2\underline{I}}{\mathrm{d}x^2} = \left(R_l + j\omega L_l\right)\left(G_l + j\omega C_l\right)\underline{I} \tag{8.22}$$

respectiv,

$$\frac{\mathrm{d}^2\underline{U}}{\mathrm{d}x^2} = \underline{Z}_l \underline{Y}_l \underline{U}, \quad \frac{\mathrm{d}^2\underline{I}}{\mathrm{d}x^2} = \underline{Z}_l \underline{Y}_l \underline{I} \tag{8.23}$$

Dacă se notează cu $\underline{\gamma}_l$ mărimea

$$\underline{\gamma}_l = \sqrt{\left(R_l + j\omega L_l\right)\left(G_l + j\omega C_l\right)} = \alpha_l + j\beta_l \tag{8.24}$$

numită *constantă* (*lineică*) *complexă de propagare*, ecuaţiile (8.23) iau forma:

$$\frac{\mathrm{d}^2\underline{U}}{\mathrm{d}x^2} = \underline{\gamma}_l^2 \underline{U}, \quad \frac{\mathrm{d}^2\underline{I}}{\mathrm{d}x^2} = \underline{\gamma}_l^2 \underline{I}. \tag{8.25}$$

Evident, soluţiile $\underline{U}(x)$ şi $\underline{I}(x)$ nu sunt independente fiind legate prin ecuaţiile (8.21). Integrarea acestor ecuaţii constă în următoarea procedură: se integrează una dintre ecuaţii, de exemplu pentru $\underline{I}(x)$, iar soluţia $\underline{U}(x)$ se deduce din oricare dintre ecuaţiile (8.19). Soluţia $\underline{U}(x)$ conţine două constante complexe de integrare care se determină din condiţia ca la bornele de intrare ale liniei 1, 1' tensiunea şi curentul complex să aibă valorile date de (8.17):

$$\mathrm{C}\{u_1(t)\} = \underline{U}_1 = U_1 e^{j\alpha_{u1}}; \quad \mathrm{C}\{i_1(t)\} = \underline{I}_1 = I_1 e^{j(\alpha_{u1} - \varphi_1)}. \tag{8.26}$$

Integrând ecuaţia (8.23) în raport cu $\underline{U}$, se obţine

$$\underline{U}(x) = \underline{A}_d e^{-\underline{\gamma}_l x} + \underline{A}_i e^{\underline{\gamma}_l x}, \tag{8.27}$$

unde $\underline{A}_d$ şi $\underline{A}_i$ sunt două constante de integrare.

Substituind ecuaţia (8.27) în prima ecuaţie (8.22), se deduce expresia curentului complex $\underline{I}(x)$

$$\underline{I}(x) = \frac{\underline{\gamma}_l}{\underline{Z}_l}\left[\underline{A}_d e^{-\underline{\gamma}_l x} - \underline{A}_i e^{\underline{\gamma}_l x}\right]. \tag{8.28}$$

Mărimea complexă, $\underline{Z}_c$ definită de expresia

$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{Z}_l}{\underline{\gamma}_l} = \sqrt{\frac{R_l + j\omega L_l}{G_l + j\omega C_l}} \tag{8.29}$$

poartă numele de *impedanţa caracteristică complexă a liniei* şi ecuaţia (8.28) devine

$$\underline{I}(x) = \frac{1}{\underline{Z}_c}\left[\underline{A}_d e^{-\underline{\gamma}_l x} - \underline{A}_i e^{\underline{\gamma}_l x}\right]. \tag{8.30}$$

Tensiunea complexă $\underline{U}(x)$ şi curentul complex $\underline{I}(x)$ conţin câte două componente, una proporţională cu $e^{\underline{\gamma}_l x}$ şi cealaltă cu $e^{-\underline{\gamma}_l x}$, fiecare componentă fiind soluţie elementară a ecuaţiilor telegrafiştilor.

8.2.1. Componentele directe şi inverse ale tensiunii şi curentului

Dacă se notează cu $\underline{U}_d(x)$ primul termen din membru al doilea al relaţiei (8.27) rezultă

$$\underline{U}_d(x) = \underline{A}_d e^{-\underline{\gamma}_l x} = \underline{U}_d(0) e^{-\underline{\gamma}_l x} \tag{8.31}$$

în care $\underline{U}_d(0) = \underline{A}_d = U_{d0} e^{j\alpha_{u_{d0}}}$.

Avînd în vedere relaţia (8.24), expresia (8.31) se poate pune sub forma

$$\underline{U}_d(x) = U_{d0} e^{j\alpha_{u_{do}}} e^{-(\alpha_l + j\beta)x} = U_{d0} e^{-\alpha_l x} e^{j(\alpha_{u_{d0}} - \beta_l x)}, \tag{8.32}$$

căreia îi corespunde valoarea instantanee $u_d(x,t)$,

$$u_d(x,t) = \mathrm{Im}\left\{\sqrt{2}\underline{U}_d(x) e^{j\omega t}\right\} = \sqrt{2} U_{d0} e^{-\alpha_l x} \sin\left[\omega t - \beta_l x + \alpha_{u_{d0}}\right]. \tag{8.33}$$

Analizând termenul $u_d(x,t)$ rezultă:

- amplitudinea $\sqrt{2} U_{do} e^{-\alpha_l x}$ descreşte exponenţial cu distanţa x, este maximă $\sqrt{2} U_{do}$ la bornele de intrare ale liniei şi este minimă la bornele de ieşire $\sqrt{2} U_{do} e^{-\alpha_l l}$ ($\alpha_l > 0$), figura 8.3;
- dacă se consideră $\alpha_l = 0$, termenul $u_d(x,t)$ variază sinusoidal în raport cu unghiul $(\omega t - \beta_l x + \alpha_{u_{do}})$. Intervalul minim de timp după care în acelaşi punct x, componenta u_d are aceeaşi valoare, este perioada de timp T,

$$u_d(x, t+T) = u_d(x,t) \text{ pentru } \forall\, t \Rightarrow \omega(t+T) - \beta_l x + \alpha_{u_{do}} = \omega t - \beta_l x + \alpha_{u_{do}} + 2\pi\,; \tag{8.34}$$

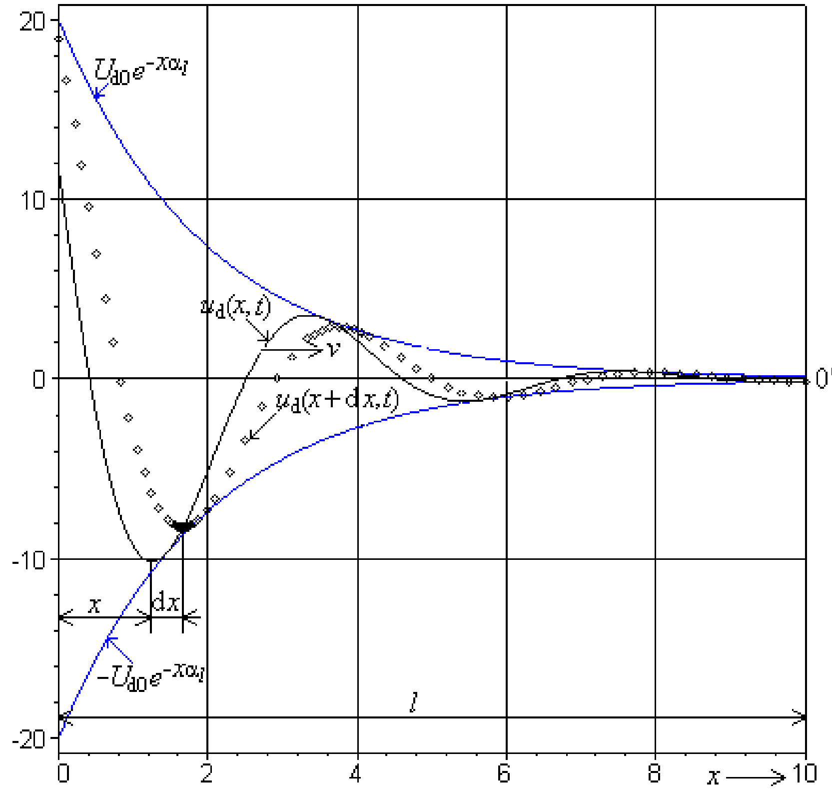


Fig.8.3. Propagarea undei directe $u_d(x,t)$.

- distanța minimă măsurată în lungul liniei, la care în același moment t componenta u_d are aceeași valoare,

$$u_d(x+\lambda,t)=u_d(x,t)\,\text{pentru}\;\forall\, x \Rightarrow \omega t-\beta_l(x+\lambda)+\alpha_{u_{do}} = \omega t-\beta_l x+\alpha_{u_{do}}-2\pi\,, \tag{8.35}$$

este perioada spațială λ,

$$\lambda=\frac{2\pi}{\beta_l}, \tag{8.36}$$

adică *lungimea de undă*. Deci, valoarea instantanee $u_d(x,t)$ la distanța x și la momentul t este egală cu valoarea instantanee la distanța $x+\mathrm{d}x$ și momentul $t+\mathrm{d}t$,

$$u_d(x,t)=u_d(x+\mathrm{d}x,t+\mathrm{d}t) \Rightarrow \omega t-\beta_l x+\alpha_{u_{do}} = \omega(t+\mathrm{d}t)-\beta_l(x+\mathrm{d}x)+\alpha_{u_{do}}\,, \tag{8.37}$$

din care rezultă relația

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v=\frac{\omega}{\beta_l}\,. \tag{8.38}$$

Componenta $u_d(x,t)$ este o undă are se propagă de la bornele de intrare către bornele de ieșire (fig. 8.3) și se numește *componenta directă de tensiune*, v fiind *viteza de fază*. Datorită exponențialei $e^{-\alpha_l x}$, unda directă e atenuată în sensul propagării

$$\alpha_l x=\ln\left|\frac{\underline{U}_d(0)}{\underline{U}_d(x)}\right|. \tag{8.39}$$

Dacă se notează cu $\underline{U}_i(x)$ cel de-al doilea termen al relației (8.27)

$$\underline{U}_i(x) = \underline{A}_i e^{\underline{\gamma}_l x} \tag{8.40}$$

şi efectuând schimbarea de variabilă $x = l - x'$, se obține

$$\underline{U}_i(x') = \underline{A}_i e^{\underline{\gamma}_l (l - x')} = \underline{A}_i e^{\underline{\gamma}_l l} e^{-\underline{\gamma}_l x'} = \underline{U}_i(0) e^{-\underline{\gamma}_l x'}, \;\; \underline{U}_i(0) = \underline{A}_i e^{\underline{\gamma}_l l} = U_{i0} e^{j\alpha_{u_{i0}}}. \tag{8.41}$$

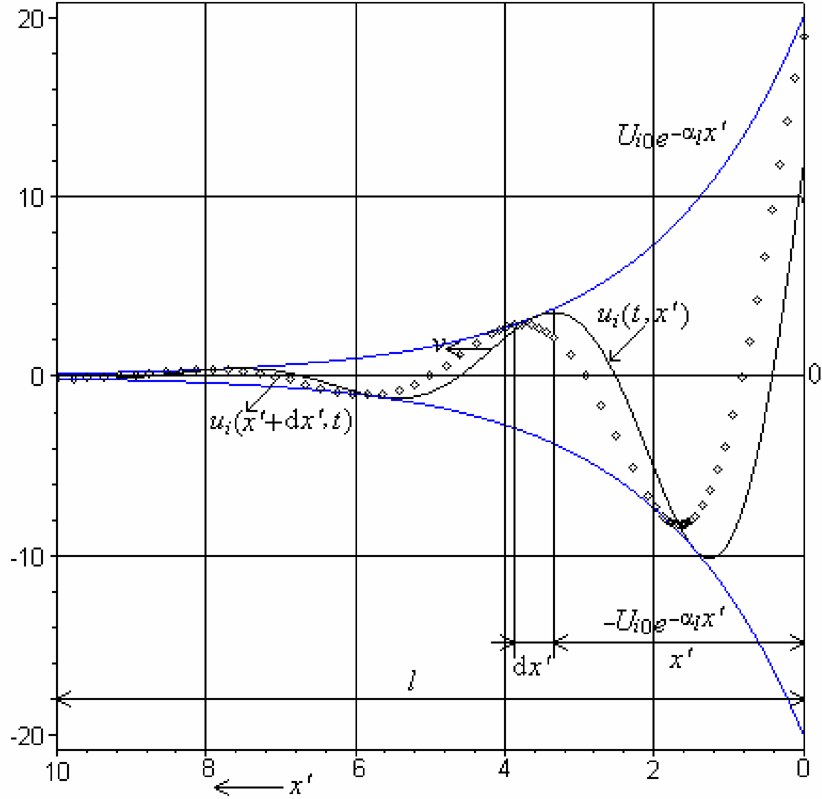


Fig. 8.4. Propagarea undei inverse $u_i(x',t)$.

O analiză similară arată că termenul $\underline{U}_i(x')$ are în raport cu x' aceeaşi formă cu $u_d(x,t)$, figura 8.4:

$$u_i(x',t) = \sqrt{2} U_{i0} e^{-\alpha_l x'} \sin\left[\omega t - \beta_l x' + \alpha_{u_{i0}}\right]. \tag{8.42}$$

Avînd în vedere relațiile (8.31) şi (8.40), curentul complex $\underline{I}(x)$, (8.30) se poate scrie astfel:

$$\underline{I}(x) = \frac{\underline{U}_d(x)}{\underline{Z}_c} - \frac{\underline{U}_i(x)}{\underline{Z}_c} = \underline{I}_d(x) + \underline{I}_i(x), \tag{8.43}$$

în care s-au notat cu $\underline{I}_d$ şi $\underline{I}_i$ componentele

$$\underline{I}_d(x) = \frac{\underline{U}_d(x)}{\underline{Z}_c}, \;\; \underline{I}_i(x) = -\frac{\underline{U}_i(x)}{\underline{Z}_c}. \tag{8.44}$$

Componentele instantanee corespunzătoare $i_d(x,t)$ şi $i_i(x,t)$ sunt componentele directă, respectivă inversă de curent, ale căror expresii se deduc din relațiile (8.29), (8.33) şi (8.42):

$$i_d(x,t) = \sqrt{2}\frac{U_{d0}}{Z_c} e^{-\alpha_l x} \sin\left[\omega t - \beta_l x - \varphi_c + \alpha_{u_{d0}}\right] \tag{8.45}$$

respectiv,

$$i_i(x',t) = \sqrt{2}\frac{U_{i0}}{Z_c} e^{-\alpha_l x'} sin\left[\omega t - \beta_l x' - \varphi_c + \alpha_{u_{i0}} - \pi\right]. \tag{8.46}$$

8.2.2. Parametrii liniilor electrice lungi în regim armonic (parametrii secundari)

Ecuațiile telegrafiştilor (8.11) şi (8.12) conțin parametrii primari R_l, L_l, G_l şi C_l. Soluțiile elementare în regim armonic de tensiune (8.33, 8.42) şi cele de curent (8.45, 8.46) pun în evidență mărimile complexe $\underline{Z}_c$ şi $\underline{\gamma}_l$ care caracterizează linia în regim sinusoidal, după cum urmează:

- *impedanța caracteristică complexă a liniei* definită ca raportul dintre componentele complexe directe de tensiune $\underline{U}_d(x)$ şi de curent $\underline{I}_d(x)$, respectiv de raportul cu semn schimbat dintre componentele complexe inverse de tensiune $\underline{U}_i(x)$ şi de curent $\underline{I}_i(x)$, cu valoarea independentă de *x*

$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{U}_d(x)}{\underline{I}_d(x)} = -\frac{\underline{U}_i(x)}{\underline{I}_i(x)} = \sqrt{\frac{R_l + j\omega L_l}{G_l + j\omega C_l}} = Z_c e^{i\varphi_c}. \tag{8.47}$$

Impedanța caracteristică are modulul Z_c şi argumentul φ_c, având expresiile

$$Z_c = \frac{\underline{U}_d(x)}{\underline{I}_d(x)} = \sqrt[4]{\frac{R_l^2 + \omega^2 L_l^2}{G_l^2 + \omega^2 C_l^2}}; \quad \varphi_c = \frac{1}{2}\left(arctg\frac{\omega L_l}{R_l} - arctg\frac{\omega C_l}{G_l}\right) =$$
$$= arctg\frac{\frac{\omega L_l}{R_l} - \frac{\omega C_l}{G_l}}{1 + \frac{\omega L_l}{R_l}\frac{\omega C_l}{G_l}}, \quad \text{cu } -\frac{\pi}{4} < \varphi_c > \frac{\pi}{4}; \tag{8.48}$$

- *constanta complexă lineică de propagare* definită de relația (8.24)

$$\underline{\gamma}_c = \sqrt{(R_l + j\omega L_l)(G_l + j\omega C_l)} = \alpha_l + j\beta_l. \tag{8.49}$$

Partea reală $\alpha_l = Re\{\underline{\gamma}_l\}$ intervine în exponențialele $e^{-\alpha_l x}$, respectiv $e^{-\alpha_l x'}$ şi corespunde atenuării amplitudinelor componentelor directe şi inverse de tensiune şi de curent, acesta fiind şi motivul denumirii ei - *constantă de atenuare*. Partea imaginară $\beta_l = Im\{\underline{\gamma}_l\}$ intervine în fazele componentelor şi poartă numele de *constantă de fază*.

Pentru calculul acestor constante se foloseşte modulul lui $\left|\underline{\gamma}_l^2\right|$ şi diferența pătratelor $\alpha_l^2 - \beta_l^2$

$$\left|\underline{\gamma}_l^2\right| = \alpha_l^2 + \beta_l^2 = \sqrt{(R_l^2 + \omega^2 L_l^2)(G_l^2 + \omega^2 C_l^2)};$$
$$\alpha_l^2 - \beta_l^2 = Re\left\{\underline{\gamma}_l^2\right\} = R_l G_l - \omega^2 L_l C_l. \tag{8.50}$$

Adunând şi scăzând aceste relaţii, se deduc valorile lui α_l şi β_l:

$$\alpha_l = \sqrt{\frac{1}{2}\left[R_l G_l - \omega^2 L_l C_l + \sqrt{\left(R_l^2 + \omega^2 L_l^2\right)\left(G_l^2 + \omega^2 C_l^2\right)}\right]} \geq 0;$$
$$\beta_l = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\omega^2 L_l C_l - R_l G_l + \sqrt{\left(R_l^2 + \omega^2 L_l^2\right)\left(G_l^2 + \omega^2 C_l^2\right)}\right]} \geq 0. \qquad (8.51)$$

Prin urmare, în locul celor patru parametri R_l, L_l, G_l şi C_l linia este caracterizată în regim armonic de asemenea de patru parametri Z_c, φ_c, α_l şi β_l care depind de frecvenţă şi sunt denumiţi *parametri secundari*. Trebuie observat că şi viteza de fază v şi lungimea de undă λ depind de asemenea de frecvenţă

$$v = \frac{\omega}{\beta_l} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{1}{2}\left[\omega^2 L_l C_l - R_l G_l + \sqrt{\left(R_l^2 + \omega^2 L_l^2\right)\left(G_l^2 + \omega^2 C_l^2\right)}\right]}}, \qquad (8.52)$$

respectiv

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta_l} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{2}\left[\omega^2 L_l C_l - R_l G_l + \sqrt{\left(R_l^2 + \omega^2 L_l^2\right)\left(G_l^2 + \omega^2 C_l^2\right)}\right]}}. \qquad (8.53)$$

Dacă pe linie se transmite de la intrare un semnal cu un anumit spectru de frecvenţă (fig. 8.5), datorită vitezei de propagare (de fază) care este diferită pentru fiecare armonică componentă, semnalul ajunge la bornele de ieşire cu un spectru de frecvenţă diferit şi în consecinţă linia *distorsionează* semnalul.

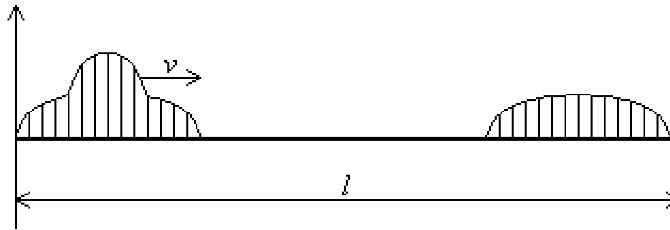


Fig. 8.5. Distorsionarea semnalului transmis în lungul liniei.

În reţelele de telecomunicaţii datorită acestui fenomen denumit şi de *dispersie*, se reduce fidelitatea semnalelor transmise de linie.

Făcând analiza modului de variaţie cu frecvenţa a parametrilor secundari se pot evidenţia următoarele cazuri particulare:

1. **Linia fără pierderi**. Liniile electrice lungi fără pierderi sunt acelea în care rezistenţa lineică R_l şi conductanţa lineică G_l sunt neglijabile în raport cu reactanţa lineică inductivă ωL_l, respectiv susceptanţa lineică capacitivă ωC_l,

$$R_l << \omega L_l; \;\; G_l << \omega C_l \qquad (8.54)$$

şi deci se pot considera egale cu zero $R_l \cong 0,\; G_l \cong 0$.

În aceste condiţii parametrii secundari sunt independenţi de frecvenţă, iar impedanţa caracteristică este reală

$$\underline{Z}_c \cong \sqrt{\frac{L_l}{C_l}} = Z_0,\ \varphi_c \cong 0,\ \alpha_l \cong 0,\ \beta_l \cong \omega\sqrt{L_l C_l}\ . \tag{8.55}$$

De asemenea, viteza de fază v rezultă independentă de frecvență

$$v \cong \frac{1}{\sqrt{L_l C_l}}\ . \tag{8.56}$$

Prin urmare, componentele directe $u_d(x,t)$, $i_d(x,t)$ şi inverse $u_i(x,t)$, $i_i(x,t)$ se propagă neatenuate cu aceeaşi viteză v, asigurând transmisia fără distorsiuni a semnalelor;

2. **Linia cu pierderi mici la frecvențe înalte**. Inegalitățile (8.54) rămân valabile şi în cazul când rezistența lineică R_l, respectiv conductanța lineică G_l deşi sunt mici față de reactanța lineică inductivă ωL_l, respectiv susceptanța lineică capacitivă ωC_l, nu se anulează şi prin urmare $\alpha_l \neq 0$. Expresia constantei lineice de atenuare α_l (8.51) se poate puns sub forma

$$\alpha_l = \sqrt{\frac{1}{2}\left[R_l G_l - \omega^2 L_l C_l + \omega^2 L_l C_l \sqrt{\left(1+\frac{R_l^2}{\omega^2 L_l^2}\right)\left(1+\frac{G_l^2}{\omega^2 C_l^2}\right)}\right]} \tag{8.57}$$

în care dacă se dezvoltă radicalul interior în serie şi se rețin numai primii doi termeni, se obține:

$$\begin{aligned}\alpha_l &\cong \sqrt{\frac{1}{2}\left[R_l G_l - \omega^2 L_l C_l + \omega^2 L_l C_l\left(1+\frac{1}{2}\frac{R_l^2}{\omega^2 L_l^2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\frac{G_l^2}{\omega^2 C_l^2}\right)\right]} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}\left[R_l G_l + \frac{1}{2}\frac{R_l^2}{L_l}C_l + \frac{1}{2}\frac{G_l^2}{C_l}L_l + \frac{1}{4}\frac{R_l^2 G_l^2}{\omega^2 L_l C_l}\right]} \Rightarrow \alpha_l \cong \frac{1}{2}R_l\sqrt{\frac{C_l}{L_l}} + \frac{1}{2}G_l\sqrt{\frac{L_l}{C_l}}.\end{aligned} \tag{8.58}$$

Pentru Z_c, φ_c şi v se regăsesc valorile anterioare (8.55, 8.56);

3. **Linia fără distorsiuni (condiția Heaviside).** Dacă în expresia constantei de fază β_l pusă sub forma

$$\beta_l = \omega\sqrt{L_l C}\sqrt{\frac{1}{2}\left[1-\frac{R_l G_l}{\omega^2 L_l C_l} + \sqrt{\left(1+\frac{R_l^2}{\omega^2 L_l^2}\right)\left(1+\frac{G_l^2}{\omega^2 C_l^2}\right)}\right]}\ , \tag{8.59}$$

se pune condiția:

$$1+\frac{R_l^2}{\omega^2 L_l^2} = 1+\frac{G_l^2}{\omega^2 C_l^2} \Leftrightarrow \frac{R_l}{L_l} = \frac{G_l}{C_l}, \tag{8.60}$$

atunci se obține

$$\beta_l = \omega\sqrt{L_l C}\ , \tag{8.61}$$

şi în consecință viteza de fază v rezultă independentă de frecvență. Condiția (8.60) dedusă de Heaviside caracterizează linia cu pierderi fără distorsiuni. Pentru ceilalți parametri se deduc expresiile:

$$\alpha_l = R_l\sqrt{\frac{C_l}{L_l}} = G_l\sqrt{\frac{L_l}{C_l}},\ Z_c = \sqrt{\frac{L_l}{C_l}} = Z_0,\ \varphi_c = 0\ . \tag{8.62}$$

Se constată că în toate cazurile în care linia este fără distorsiuni, impedanța caracteristică este reală ($\varphi_c = 0$) şi egală cu rădăcină pătrată din raportul dintre inductivitatea lineică L_l şi capacitatea lineică C_l.

Pentru cabluri, datorită capacității lineice mari şi a inductivității lineice mici, există inegalitatea

$$\frac{R_l}{L_l} > \frac{G_l}{C_l}. \tag{8.63}$$

Pentru realizarea condiției Heaivside (8.60) este necesar să mărim inductivitatea lineică L_l. Pentru aceasta, se introduc bobine suplimentare de inductivitate L_s la intervale egale şi suficient de mici față de lungimea de undă (*procedeul Papin*) astfel încât

$$\frac{lR_l}{lL_l + L_s} = \frac{G_l}{C_l}. \tag{8.64}$$

Alt procedeu (*Krarup*) constă în înfăşurarea cablului cu o bandă feromagnetică, mărind astfel inductivitatea la valoarea necesară realizării condiției Heaviside;

4. **Linia cu pierderi la frecvențe joase.** Cînd frecvențele sunt joase, reactanța lineică inductivă, respectiv susceptanța lineică capacitivă sunt mult mai mici decât rezistența lineică, respectiv conductanța lineică,

$$\omega L_l << R_l, \quad \omega C_l << G_l \ . \tag{8.65}$$

În aceste condiții, parametrii secundari şi viteza v au valorile

$$Z_c = \sqrt{\frac{R_l}{G_l}}, \;\; \varphi_c = 0, \;\; \alpha_l = \sqrt{R_l G_l}, \;\; \beta_l = 0 \ . \tag{8.66}$$

Deoarece $\beta_l = 0$, nu are loc propagare şi fiindcă $\lambda \to \infty$, linia este scurtă.

8.2.3. Ecuațiile de transmisie ale liniilor electrice lungi în regim armonic

Ecuațiile de transmisie ale liniilor electrice lungi sunt soluțiile (8.27) şi (8.28) exprimate în funcție de mărimile de la intrare sau de la ieşire. Aceste soluții pot fi puse şi sub forma în care apar distinct componentele directe, respectiv inverse.

8.2.3.1. Ecuațiile de transmisie ale liniilor electrice lungi în funcție de componentele directe şi inverse

Utilizând ecuațiile (8.33) şi (8.42) se deduce expresia tensiunii $u(x,t)$, iar din ecuațiile (8.45) şi (8.46) expresia curentului $i(x,t)$:

$$u(x,t) = u_d(x,t) + u_i(x,t) = \sqrt{2}U_{do}e^{-\alpha_l x}\sin(\omega t - \beta_l x + \alpha_{ud0}) + \\ + \sqrt{2}U_{io}e^{-\alpha_l (l-x)}\sin[\omega t - \beta_l (l-x) + \alpha_{ui0}], \tag{8.67}$$

$$i(x,t) = i_d(x,t) + i_i(x,t) = \sqrt{2}\frac{U_{do}}{Z_c}e^{-\alpha_l x}\sin(\omega t - \beta_l x - \varphi_c + \alpha_{ud0}) + \\ + \sqrt{2}\frac{U_{io}}{Z_c}e^{-\alpha_l (l-x)}\sin[\omega t - \beta_l (l-x) - \varphi_c + \alpha_{ui0} - \pi]. \tag{8.68}$$

Când linia este foarte lungă astfel încât $e^{-\alpha_l l} \to 0$ atunci, în ecuaţiile (8.67) şi (8.68) amplitudinile componentelor inverse se pot neglija şi pe linie se transmit numai semnalele care conţin componente directe:

$$u(x,t) \cong u_d(x,t), \quad i(x,t) \cong i_d(x,t). \tag{8.69}$$

În acest caz linia se numeşte *infinit lungă*. De fapt, se poate demonstra că existenţa componentelor inverse se datorează reflexiei la una din extremităţile liniei, dacă la cealaltă extremitate se transmite un semnal. În aceste condiţii, componentele inverse sunt *reflectate*, iar cele directe sunt componente *incidente*.

8.2.3.2. Ecuaţiile de transmisie ale liniilor electrice lungi raportate la intrare

Considerând x = 0 şi presupunând cunoscute tensiunea complexă $\underline{U}_1$ şi curentul complex $\underline{I}_1$, ecuaţiile (8.27) şi (8.30) devin

$$\underline{U}(0) = \underline{U}_1 = \underline{A}_d + \underline{A}_i; \quad \underline{I}(0) = \underline{I}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_c}\left(\underline{A}_d - \underline{A}_i\right), \tag{8.70}$$

din care rezultă

$$\underline{A}_d = \frac{1}{2}\left(\underline{U}_1 + \underline{Z}_c \underline{I}_1\right); \quad \underline{A}_i = \frac{1}{2}\left(\underline{U}_1 - \underline{Z}_c \underline{I}_1\right). \tag{8.71}$$

Substituind aceste valori în ecuaţiile (8.27) şi (8.30) se obţine tensiunea complexă $\underline{U}(x)$ şi, respectiv curentul complex $\underline{I}(x)$, în funcţie de tensiunea complexă $\underline{U}_1$ şi curentul complex $\underline{I}_1$ de la intrare (fig. 8.6,a).

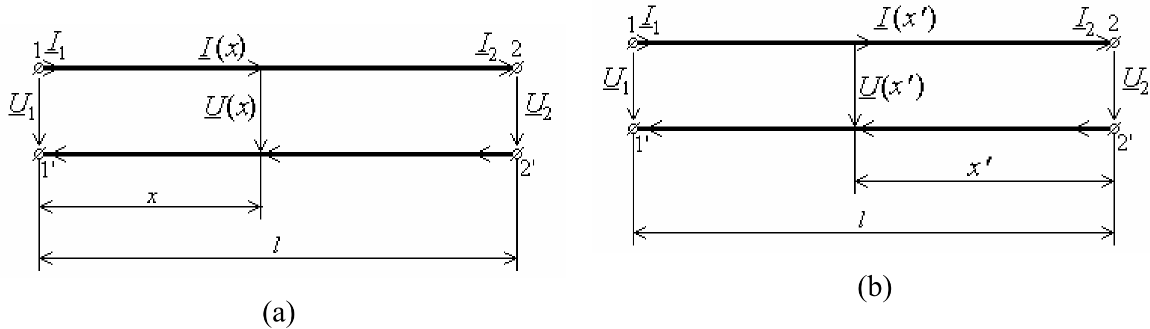


Fig. 8.6. a) Ecuaţiile liniilor lungi raportate la intrare;
b) Ecuaţiile liniilor lungi raportate la ieşire.

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_1 ch\underline{\gamma}_l x - \underline{Z}_c \underline{I}_1 sh\underline{\gamma}_l x; \quad \underline{I}(x) = \underline{I}_1 ch\underline{\gamma}_l x - \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_c} sh\underline{\gamma}_l x \ . \tag{8.72}$$

Considerând $x = l$, se obţine tensiunea $\underline{U}(l) = \underline{U}_2$ şi curentul $\underline{I}(l) = \underline{I}_2$ la ieşire

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 ch\underline{\gamma}_l l - \underline{Z}_c \underline{I}_1 sh\underline{\gamma}_l l; \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_1 ch\underline{\gamma}_l l - \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_c} sh\underline{\gamma}_l l \ . \tag{8.73}$$

8.2.3.3. Ecuaţiile de transmisie ale liniilor electrice lungi raportate la ieşire

Dacă se consideră cunoscute tensiunea complexă $\underline{U}(l) = \underline{U}_2$ la ieşire şi curentul complex $\underline{I}(l) = \underline{I}_2$ la ieşire, ecuaţiile (8.27) şi (8.30) iau forma:

$$\underline{U}(l)=\underline{U}_2=\underline{A}_d e^{-\underline{\gamma}_l l}+\underline{A}_i e^{\underline{\gamma}_l l};\quad \underline{I}(l)=\underline{I}_2=\frac{1}{\underline{Z}_c}\left(\underline{A}_d e^{-\underline{\gamma}_l l}-\underline{A}_i e^{\underline{\gamma}_l l}\right). \tag{8.74}$$

Rezolvând sistemul (8.74), se obține

$$\underline{A}_d=\frac{1}{2}\left(\underline{U}_2+\underline{Z}_c\underline{I}_2\right)e^{\underline{\gamma}_l l};\quad \underline{A}_i=\frac{1}{2}\left(\underline{U}_2-\underline{Z}_c\underline{I}_2\right)e^{-\underline{\gamma}_l l}. \tag{8.75}$$

Introducând aceste valori în ecuațiile (8.27) şi (8.31) şi substituind $l - x = x'$, în care x' este distanța măsurată de la ieşire, se obține tensiunea complexă $\underline{U}(x')$ şi, respectiv curentul complex $\underline{I}(x')$, în funcție de tensiunea complexă $\underline{U}_2$ şi curentul complex $\underline{I}_2$ de la ieşire (fig. 8.6,b)

$$\underline{U}(x')=\underline{U}_2 ch\underline{\gamma}_l x'+\underline{Z}_c\underline{I}_2 sh\underline{\gamma}_l x';\quad \underline{I}(x')=\underline{I}_2 ch\underline{\gamma}_l x'+\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c}sh\underline{\gamma}_l x'\ . \tag{8.76}$$

Luând $x' = l$ se dededuce tensiunea complexă $\underline{U}_1$ şi curentul complex $\underline{I}_1$ de la intrare:

$$\underline{U}_1=\underline{U}_2 ch\underline{\gamma}_l l+\underline{Z}_c\underline{I}_2 sh\underline{\gamma}_l l;\quad \underline{I}_1=\underline{I}_2 ch\underline{\gamma}_l l+\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c}sh\underline{\gamma}_l l\ . \tag{8.77}$$

8.2.3.4. Ecuațiile de transmisie ale liniilor electrice lungi în cazuri particulare

❖ *Linia adaptată*

Dacă la bornele de ieş

ire ale liniei se conectează o impedanță complexă de sarcină $\underline{Z}_s$ egală cu impedanța caracteristică $\underline{Z}_c$ (fig. 8.7) curentul $\underline{I}_2$ are expresia

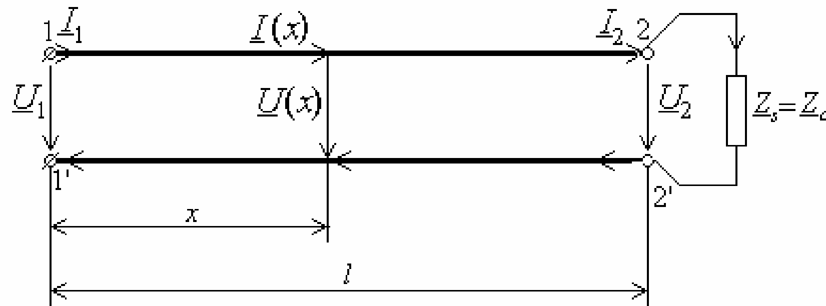


Fig. 8.7. Linia electrică adaptată.

$$\underline{I}_2=\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c}. \tag{8.78}$$

Înlocuind expresia (8.78) în ecuațiile (8.76) se obține

$$\underline{U}(x')=\underline{U}_2 ch\underline{\gamma}_l x'+\underline{Z}_c\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c}sh\underline{\gamma}_l x'=\underline{U}_2\left(ch\underline{\gamma}_l x'+sh\underline{\gamma}_l x'\right)=\underline{U}_2 e^{\underline{\gamma}_l x'};$$
$$\underline{I}(x')=\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c}ch\underline{\gamma}x'+\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c}sh\underline{\gamma}_l x'=\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c}\left(ch\underline{\gamma}_l x'+sh\underline{\gamma}_l x'\right)=\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c}e^{\underline{\gamma}_l x'}. \tag{8.79}$$

Considerând $x' = l$ rezultă

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 e^{\underline{\gamma}_l l}; \quad \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} e^{\underline{\gamma}_l l}. \tag{8.80}$$

Substituind $x' = l - x$ şi ţinând seama de relaţiile (8.80), ecuaţiile (8.79) se scriu după cum urmează:

$$\underline{U}(x') = \underline{U}(l - x) = \underline{U}_2 e^{\underline{\gamma}_l l} e^{-\underline{\gamma}_l x};$$
$$\underline{I}(x') = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} ch\underline{\gamma} x' + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} sh\underline{\gamma}_l x' = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c}\left(ch\underline{\gamma}_l x' + sh\underline{\gamma}_l x'\right) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} e^{\underline{\gamma}_l x'}, \tag{8.81}$$

respectiv,

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_1 e^{-\underline{\gamma}_l x}, \quad \underline{I}(x) = \underline{I}_1 e^{-\underline{\gamma}_l x}, \tag{8.82}$$

Ceea ce înseamnă că tensiunea $\underline{U}(x)$ şi curentul $\underline{I}(x)$ conţin numai componente directe şi linia se numeşte *adaptată*. În consecinţă, pe o linie adaptată semnalele se transmit numai prin componentele lor directe. În circuitele de telecomunicaţii, prin adaptarea liniei se elimină reflexiile undelor incidente la cealaltă extremitate şi în acest fel pe cablu telefonic se evită efectul de ecou în transmiterea convorbirilor.

❖ **Linia fără pierderi**

Pe o astfel de linie propagarea undelor se face fără pierderi de putere. Deci: $R_l = 0$, $G_l = 0$.

Constanta de atenuare $\alpha_l = 0$ şi constanta lineică de prpopagare $\underline{\gamma}_l$ este pur imaginară

$$\underline{\gamma}_l = j\beta_l, \tag{8.83}$$

iar ecuaţiile (8.77) devin

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \cos\beta_l l + j\underline{Z}_c \underline{I}_2 \sin\beta_l l; \quad \underline{I}_1 = \underline{I}_2 \cos\beta_l l + j\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c}\sin\beta_l l. \tag{8.84}$$

În consecinţă, undele de tensiune şi de curent se propagă *fără atenuare,* iar viteza de propagare $v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, *nu depinde de frecvenţă.*

Aşadar pe o linie fără pierderi toate undele de tensiune se propagă cu aceeaşi viteză, deci *nu există dispersiune.*

Deoarece $\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$, nu depinde de frecvenţă, unda de curent este de aceeaşi formă ca unda de tensiune.

Expresiile tensiunii şi curentului pentru linia fără pierderi se deduc din relaţia (8.72):

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_1 \cos\beta_l x - j\underline{Z}_c \underline{I}_1 \sin\beta_l x; \quad \underline{I}(x) = \underline{I}_1 \cos\beta_l x - j\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_c}\sin\beta_l x. \tag{8.85}$$

❖ **Efectele Ferranti de tensiune şi de curent**

Fie o linie electrică lungă fără pierderi ($\alpha_l = 0$) în gol la ieşire ($\underline{I}_2 = 0$), sub tensiunea complexă $\underline{U}_1$ la intrare (fig. 8.8,a)

Pentru că $\underline{I}_2 = 0$, prima ecuaţie (8.84) devine

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \cos\beta_l l, \tag{8.86}$$

din care rezultă

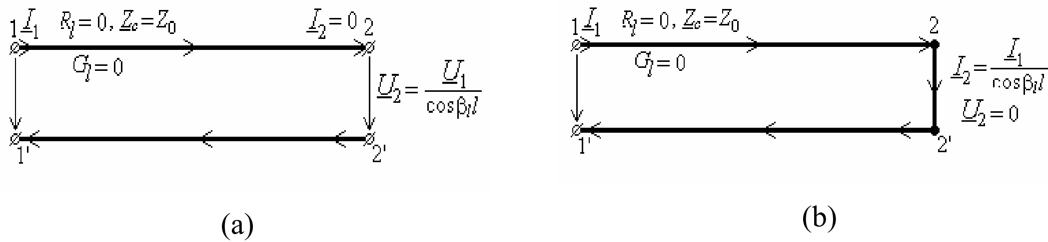
$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{U}_1}{\cos \beta_l l}. \tag{8.87}$$

În cazul în care

$$\beta_l l = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \tag{8.88}$$

urmează $\cos \beta_l l = 0$ şi $\underline{U}_2 = \infty$. Luând în considerație relația (8.36) se poate deduce din relația (8.88) raportul dintre lungimea de undă λ şi lungimea liniei l, după cum urmează:

$$l = (2k+1)\frac{\lambda}{4}. \tag{8.89}$$



(a) (b)

Fig. 8.8. a) Efectul Ferranti de tensiune;
b) Efectul Ferranti de curent.

Aplicând o tensiune la bornele de intrare ale liniei electrice lungi fără pierderi, cu lungimea egală cu multiplu impar de sferturi de lungimi de undă λ şi având bornele deschise la ieşire (în gol), tensiunea de la ieşire rezultă infinită. Deoarece rezistența în realitate nu este nulă, tensiunea la ieşire $\underline{U}_2$ este mărginită. Apariția de supratensiuni în aceste condiții constituie *efectul Ferranti de tensiune*.

Când linia fără pierderi are bornele de ieşire în scurtcircuit, $\underline{U}_2 = 0$ (fig. 8.8,b) şi se aplică la intrare o tensiune $\underline{U}_1$, a doua ecuație (8.84) devine

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 \cos \beta_l l, \tag{8.90}$$

din care rezultă

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{I}_1}{\cos \beta_l l}. \tag{8.91}$$

Dacă este satisfăcută condiția (8.89), curentul $\underline{I}_2$ este infinit şi din acelaşi motiv al rezistenței nenule, este în realitate limitat. Apariția de supracurenți în aceste condiții constituie *efectul Ferranti de curent*.

La frecvența de 50 Hz căreia îi corespunde lungimea de undă $\lambda = 6000\,\text{km}$, efectele Ferranti apar pe o linie de lungimea l = 6000/4 = 1500 km (k = 0). În regim periodic, efectele Ferranti apar la armonici superioare şi pe linii de lungimi mai mici. Datorită apariției supratensiunilor şi supracurenților provocate în acest mod, se evită punerea sub tensiune a liniilor cu bornele de ieşire deschise sau scurtcircuitate.

❖ **Linia scurtă**

Dacă este satisfăcută inegalitatea

$$|\underline{\gamma}_l l| << 1, \tag{8.92}$$

funcțiile $ch\underline{\gamma}_l l$ şi $sh\underline{\gamma}_l l$ se aproximează prin primii termeni ai dezvoltărilor lor în serie. Considerând, într-o primă aproximație, $ch\underline{\gamma}_l l \cong 1$ şi $sh\underline{\gamma}_l l \cong \underline{\gamma}_l l$, ecuațiile (8.77) devin

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &\cong \underline{U}_2 + \underline{Z}_c \underline{I}_2 \underline{\gamma}_l l = \underline{U}_2 + l(R_l + j\omega L_l)\underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &\cong \underline{I}_2 + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c}\underline{\gamma}_l l = \underline{I}_2 + l(G_l + j\omega C_l)\underline{U}_2. \end{aligned} \tag{8.93}$$

Acestor ecuații le corespunde schema cu parametri concentrați reprezentată în figura 8.2.

Deoarece $|\underline{\gamma}_l l| > \beta_l l$, inegalitatea (8.92) scrisă în forma

$$\beta_l l << 1, \tag{8.94}$$

respectiv

$$\frac{l}{\lambda} << 1, \tag{8.95}$$

este identică cu condiția privind neglijarea efectului de propagare.

8.3. IMPEDANȚA DE INTRARE A LINIEI ELECTRICE LUNGI

Dacă la bornele de ieşire se conectează impedanța complexă de sarcină (fig. 8.9)

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}, \tag{8.96}$$

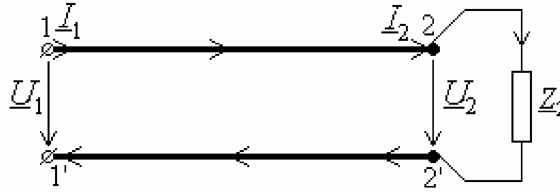


Fig. 8.9. Definirea impedanței complexe de intrare.

impedanța complexă echivalentă de la intrare rezultă din ecuațiile (8.77)

$$\underline{Z}_{e1} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{U}_2=\underline{Z}_2\underline{I}_2} = \frac{\underline{Z}_2\underline{I}_2 ch\underline{\gamma}_l l + \underline{Z}_c \underline{I}_2 sh\underline{\gamma}_l l}{\underline{I}_2 ch\underline{\gamma}_l l + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} sh\underline{\gamma}_l l} = \underline{Z}_c \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_c th\underline{\gamma}_l l}{\underline{Z}_c + \underline{Z}_2 th\underline{\gamma}_l l}. \tag{8.97}$$

La o linie fără pierderi, $\underline{Z}_c = Z_0$, $\underline{\gamma}_l = j\beta_l = j\dfrac{2\pi}{\lambda}$ şi impedanța $\underline{Z}_{e1}$ are valoarea

$$\underline{Z}_{e1} = Z_0 \frac{\underline{Z}_2 + jZ_0 tg\beta_l l}{Z_0 + j\underline{Z}_2 tg\beta_l l}. \tag{8.98}$$

Dacă impedanța de sarcină este o bobină, $\underline{Z}_2 = j\omega L$ şi $l = (2k+1)\dfrac{\lambda}{4}$, se obține

$$\underline{Z}_{e1} = \frac{Z_0^2}{j\omega L} = \frac{1}{j\omega C_e}, \tag{8.99}$$

cu $C_e = L / Z_0^2$ şi linia transformă inductivitatea L în capacitatea C_e (fig. 8.10,a). În cazul în care impedanţa de sarcină este un condensator, $\underline{Z}_2 = 1/ j\omega C$ şi $l = (2k+1)\dfrac{\lambda}{4}$, se obţine

$$\underline{Z}_{e1} = j\omega C Z_0^2 = j\omega L_e, \tag{8.100}$$

cu $L_e = CZ_0^2$ şi linia transformă capacitatea C în inductivitatea L_e (fig. 8.10,b).

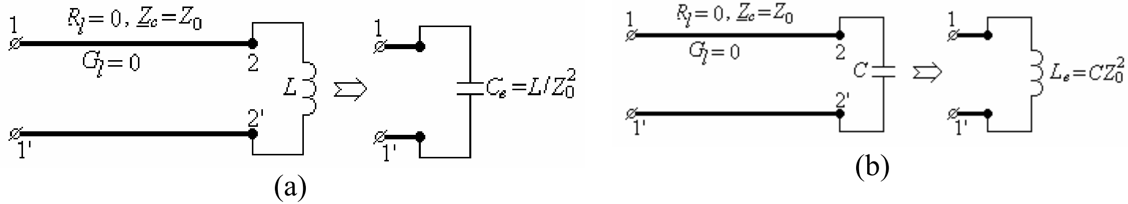


Fig. 8.10. a) Transformarea inductivităţii L în capacitatea C_e;
b) Transformarea capacităţii C în inductivitatea L_e.

8.4. CALCULUL PUTERILOR TRANSMISE PE LINIILE ELECTRICE LUNGI

Puterile complexe, primită de linie pe la bornele de intrare $\underline{S}_1$ şi transmisă receptorului pe la bornele de ieşire $\underline{S}_2$ se calculează cu următoarele formule:

$$\underline{S}_1 = P_1 + jQ_1 = \underline{U}_1 \underline{I}_1^*,\quad \underline{S}_2 = P_2 + jQ_2 = \underline{U}_2 \underline{I}_2^*, \tag{8.101}$$

unde P_1 şi P_2 sunt puterile active şi Q_1, Q_2 puterile reactive corespunzătoare.

Curenţii complecşi $\underline{I}_1$ şi $\underline{I}_2$ se deduc din ecuaţiile (8.73) şi, respectiv (8.77)

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1 ch\underline{\gamma}_l l - \underline{U}_1}{\underline{Z}_c sh\underline{\gamma}_l l},\quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_2 ch\underline{\gamma}_l l}{\underline{Z}_c sh\underline{\gamma}_l l}. \tag{8.102}$$

Este mai simplu să calculăm $\underline{S}_1^*$ şi $\underline{S}_2^*$. Pentru aceasta, se multiplică ambii membri ai relaţiilor (8.102) cu $\underline{U}_1^*$, respectiv $\underline{U}_2^*$ şi se obţin relaţiile

$$\begin{aligned} \underline{S}_1^* &= \underline{U}_1^* \underline{I}_1 = P_1 - jQ_1 = \frac{\underline{U}_1^* \underline{U}_1 ch\underline{\gamma}_l l - \underline{U}_1^* \underline{U}_1}{\underline{Z}_c sh\underline{\gamma}_l l}, \\ \underline{S}_2^* &= \underline{U}_2^* \underline{I}_2 = P_2 - jQ_2 = \frac{\underline{U}_2^* \underline{U}_1 - \underline{U}_2^* \underline{U}_2 ch\underline{\gamma}_l l}{\underline{Z}_c sh\underline{\gamma}_l l}. \end{aligned} \tag{8.103}$$

Folosind notaţiile

$$ch\underline{\gamma}_l l = \sigma_c e^{j\tau_c};\quad sh\underline{\gamma}_l l = \sigma_s e^{j\tau_s};\quad \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{U_1}{U_2} e^{j\delta}, \tag{8.104}$$

unde

$$\begin{aligned} \sigma_c &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(ch2\alpha_l l + \cos 2\beta_l l\right)};\quad \tau_c = \frac{1}{2} arcth \frac{sh2\alpha_l l \sin 2\beta_l l}{1 + ch2\alpha_l l \cos 2\beta_l l}; \\ \sigma_s &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(ch2\alpha_l l - \cos 2\beta_l l\right)};\quad \tau_s = \frac{1}{2} arcth \frac{sh2\alpha_l l \sin 2\beta_l l}{ch2\alpha_l l \cos 2\beta_l l - 1}, \end{aligned} \tag{8.105}$$

relațiile (8.103) devin

$$\underline{S}_1^* = P_1 - jQ_1 = \frac{U_1^2}{Z_c}\left[\frac{\sqrt{\frac{1}{2}\left(ch2\alpha_l l + \cos 2\beta_l l\right)}e^{j(\tau_c-\tau_s-\varphi_c)} - \frac{U_2}{U_1}e^{-j(\tau_s+\varphi_c+\delta)}}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(ch2\alpha_l l - \cos 2\beta_l l\right)}}\right], \tag{8.106}$$

respectiv

$$\underline{S}_2^* = P_2 - jQ_2 = \frac{U_2^2}{Z_c}\left[\frac{\frac{U_1}{U_{21}}e^{j(\delta-\tau_s-\varphi_c)} - \sqrt{\frac{1}{2}\left(ch2\alpha_l l + \cos 2\beta_l l\right)}e^{j(\tau_c-\tau_s-\varphi_c)}}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(ch2\alpha_l l - \cos 2\beta_l l\right)}}\right], \tag{8.107}$$

Separând părțile reale şi imaginare, se obțin puterile active şi reactive corespunzătoare, după cum urmează:

➢ *Puterea activă la intrare* P_1

$$P_1 = \frac{U_1^2}{Z_c}\left[\frac{\sqrt{\frac{1}{2}\left(ch2\alpha_l l + \cos 2\beta_l l\right)}\cos\left(\tau_c - \tau_s - \varphi_c\right) - \frac{U_2}{U_1}\cos\left(\delta + \tau_s + \varphi_c\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(ch2\alpha_l l - \cos 2\beta_l l\right)}}\right], \tag{8.109}$$

➢ *Puterea reactivă la intrare* Q_1

$$Q_1 = -\frac{U_1^2}{Z_c}\left[\frac{\sqrt{\frac{1}{2}\left(ch2\alpha_l l + \cos 2\beta_l l\right)}\sin\left(\tau_c - \tau_s - \varphi_c\right) + \frac{U_2}{U_1}\sin\left(\delta + \tau_s + \varphi_c\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(ch2\alpha_l l - \cos 2\beta_l l\right)}}\right], \tag{8.110}$$

➢ *Puterea activă la ieşire* P_2

$$P_2 = \frac{U_2^2}{Z_c}\left[\frac{\frac{U_1}{U_2}\cos\left(\delta - \tau_s - \varphi_c\right) - \sqrt{\frac{1}{2}\left(ch2\alpha_l l + \cos 2\beta_l l\right)}\cos\left(\tau_c - \tau_s - \varphi_c\right) -}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(ch2\alpha_l l - \cos 2\beta_l l\right)}}\right], \tag{8.111}$$

➢ *Puterea reactivă la ieşire* Q_2

$$Q_1 = -\frac{U_2^2}{Z_c}\left[\frac{\frac{U_1}{U_2}\sin\left(\delta - \tau_s - \varphi_c\right) - \sqrt{\frac{1}{2}\left(ch2\alpha_l l + \cos 2\beta_l l\right)}\sin\left(\tau_c - \tau_s - \varphi_c\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(ch2\alpha_l l - \cos 2\beta_l l\right)}}\right]. \tag{8.112}$$

Exemplul 8.1: Linia electrică lungă reprezentată în figura 8.11 are lungimea $l = 0{,}5$ m şi impedanța caracteristică $Z_c = 100\,\Omega$. Sarcina liniei are $R_s = 100\,\Omega$ şi $C_s = 5$ pF. Să se

calculeze impedanța de intrare a liniei pentru frecvența $f = 1000\,\text{MHz}$ știind că permitivitatea dielectricului este $\varepsilon_r = 4{,}9$ și permeabilitatea magnetică relativă a mediului $\mu_r = 1$.

Lungimea de undă pe linie este :

$$\lambda = \frac{c_0}{f\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{3\cdot 10^8}{10^9\sqrt{4{,}9\cdot 1}} = 0{,}14\ \text{m}.$$

Constanta de fază $\beta_l = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{6{,}28}{0{,}14} = 34{,}9 \Rightarrow \beta_l l = 34{,}9\cdot 0{,}5 = 17{,}45\ \text{rad}$.

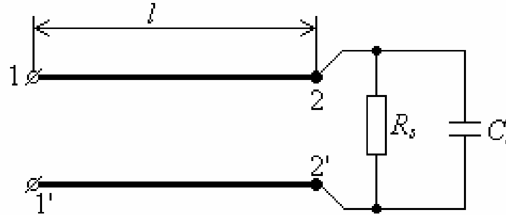


Fig. 8.11. Linie electrică lungă cu sarcina *RC* paralel.

Impedanța complexă de sarcină are valoarea:

$$\underline{Z}_s = \frac{\dfrac{R_s}{j\omega C_s}}{R_s + \dfrac{1}{j\omega C_s}} = \frac{R_s}{1 + j\omega R_s C_s} = \frac{100}{1 + j\cdot 6.28\cdot 10^9\cdot 100\cdot 5\cdot 10^{-12}} = 9.2 - j29\,.$$

Impedanța complexă, conform cu formula (8.97), are expresia:

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_c \cdot \frac{\underline{Z}_s + j\underline{Z}_c tg\beta_l l}{\underline{Z}_c + j\underline{Z}_s tg\beta_l l} = 100\frac{(9.2 - 29j) + j\cdot 100\cdot 0.212}{100 + j(9.2 - 29j)\cdot 0{,}21} = 8.535\text{-}7.507j\,.$$

Exemplul 8.2: Să se determine lungimea unui tronson de linie cu impedanța caracteristică $Z_c = 70\,\Omega$ având dielectricul cu permitivitatea $\varepsilon_r = 2$, terminat în scurtcircuit, astfel încât să se obțină un circuit rezonant serie cu frecvența de rezonanță $f_0 = 1{,}2\,\text{GHz}$. Dacă linia are o atenuare $\alpha_l = 0{,}3\,\text{dB/m}$ să se determine parametrii schemei echivalente. (1 dB/m = 0,115 Np/m).

Linia cea mai scurtă terminată în scurtcircuit care se comportă ca un circuit rezonant serie este linia de lungime $\dfrac{\lambda}{2}$.

$$l = \frac{\lambda}{2} = \frac{c_0}{2f_0\sqrt{\varepsilon_r f}} = \frac{3\cdot 10^8}{2\cdot 1{,}2\cdot 10^9\sqrt{2}\,\cdot} = 0{,}0884\ \text{m}$$

Pentru o constantă lineică de atenuare $\alpha_l = 0{,}3\,\text{dB/m}$ = 0,0345 Np/m, factorul de calitate este

$$Q = \frac{\omega_0 L_{es}}{R_{es}} = \frac{\pi}{\alpha_l l} = \frac{3.14}{0.0345 * 0.0884} = 1029.575\,.$$

Parametrii schemei echivalente sunt:

$$R_{es} \approx Z_c \alpha_l l = 70 \cdot 0.0345 \cdot 0.0884 = 0.2135\,\Omega\,,\;\; QR_{es} = \omega_0 L_{es} = \frac{1}{\omega_0 C_{es}} = 219.814\Omega\,.$$

Exemplul 8.3: Fie o linie electrică lungă trifazată confecționată din conductoare din oțel-aluminiu, utilizată pentru transportul energiei electromagnetice. Linia are următorii parametri lineici calculați la proiectare R_l = 0,085 Ω/km; L_l = 1,415.10^{-3} H/km; G_l = 3,97.10^{-8} S/km; şi C_l = 9,1.10^{-9} F/km. Linia electrică are o lungime de l = 850 km şi transmite o putere aparentă nominală S_2 = 300 MVA cu $\cos\varphi_2 = 1$ la tensiunea nominală de linie U_{2l} = 400 kV şi frecvență nominală f = 50 Hz. Se cer:

1. Să se calculeze parametrii lineici secundari (impedanța complexă caracteristică $\underline{Z}_c$, constanta lineică de propagare $\underline{\gamma}_l$, constanta lineică de atenuare α_l şi constanta lineică de fază β_l);
2. Să se determine tensiunile şi curenții de la bornele de început ale liniei pentru funcționarea în gol şi apoi în scurtcircuit la bornele terminale ale liniei cu tensiunea nominală, respectiv curentul nominal;
3. Să se calculeze regimul de funcționare la bornele primare (de început) ale liniei, dacă regimul de la bornele secundare (de sfârşit) este cel nominal.

1. a) Impedanța complexă caracteristică:
   - ❖ Impedanța complexă lineică longitudinală

     $$\underline{Z}_l = R_L + j\omega L_l = 0.085 + 0.444j\,,$$

   - ❖ Admitanța complexă lineică transversală

     $$\underline{Y}_l = G_l + j\omega C_l = 3.97 \cdot 10^{-8} + 285.74 \cdot 10^{-8} j\,,$$

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{Z}_l}{\underline{Y}_l}} = \sqrt{\frac{0.085 + 0.444j}{3.97 \cdot 10^{-8} + 285.74 \cdot 10^{-8} j}} = 396.2 - 34.8088j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z_c = 397.734\,\Omega \\ \varphi_c = -5° \end{cases}.$$

b) Constanta lineică de propagare

$$\underline{\gamma}_c = \sqrt{\underline{Z}_l \underline{Y}_l} = \sqrt{(0.085 + 0.444j)(3.97 \cdot 10^{-8} + 285.74 \cdot 10^{-8} j)} = 0.0001152 + 0.001131j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_l = 0.0001152 \text{ Np/km} = 10^{-3} \text{ dB/km} \\ \beta_1 = 0.001131 \text{ rad/km} \end{cases}.$$

2) Tensiunea şi curentul de la bornele primare cu bornele secundare în gol:

$$\underline{U}_{10} = \underline{U}_2 ch \underline{\gamma}_l l = \frac{400}{\sqrt{3}} ch((0.0001152 + 0.001131) * 850.0) = 132.8275 + 18.57j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U_{10} = 133.119 \text{ kV} \\ \alpha_{u_{10}} \cong 8° \end{cases},$$

respectiv

$$\underline{I}_{10}=\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c}sh\underline{\gamma}_l l=\frac{400}{\sqrt{3}(396.2-34.8088j)}sh\big((0.0001152+0.001131)*850.0\big)*1000.0=$$

$$=-9.386+479.415j\Rightarrow\begin{cases}I_{10}=479.415\text{ A}\\ \alpha_{i_{10}}\cong 91°\end{cases}.$$

Valoarea nominală a curentului de la bornele de ieşire este:

$$\underline{I}_2=I_2=\frac{S_2}{3U_2}=433.012\text{ A}.$$

Tensiunea şi curentul de la bornele primare cu bornele secundare în scurcircuit:

$$\underline{U}_{1sc}=\underline{Z}_c\underline{I}_2 sh\underline{\gamma}_l l=(396.2-34.8088j)*433.012sh\big((0.0001152+0.001131)*850.0\big)/1000.0=$$

$$=22.0499+140.50435j\Rightarrow\begin{cases}U_{1sc}=142.224\text{ kV}\\ \alpha_{u_{1sc}}\cong 81°\end{cases},$$

respectiv

$$\underline{I}_{1sc}=\underline{I}_2 ch\underline{\gamma}_l l=433.012*ch\big((0.0001152+0.001131)*850.0\big)=$$

$$=229.05+34.8225j\Rightarrow\begin{cases}I_{1sc}=251.4738\text{ A}\\ \alpha_{u_{1sc}}\cong 8°\end{cases}.$$

3) Tensiunea şi curentul de la bornele primare ale liniei (în regim nominal) rezultă prin însumarea componentelor de la funcționarea în gol şi în scurtcircuit, calculate anterior:

$$\underline{U}_1=\underline{U}_{10}+\underline{U}_{1sc}=154.8774+159.0764j\Rightarrow\begin{cases}U_1=222.01876\text{ kV}\\ \alpha_{u1}=45°\ 47'\end{cases},$$

respectiv

$$\underline{I}_1=\underline{I}_{10}+\underline{I}_{1sc}=239.6545+514.2377j\Rightarrow\begin{cases}I_1=567.34\text{ A}\\ \alpha_{i1}=65°\end{cases}.$$

Defazajul curentului $\underline{I}_1$ față de tensiunea $\underline{U}_1$ are valoarea

$$\varphi_1=\alpha_{u_1}-\alpha_{i_1}=45.789-65=-19.2°.$$

Puterea activă primită de linie este

$$P_1=3U_1I_1\cos\varphi_1=353.3464\text{ MW}$$

şi deci randamentul liniei are valoarea

$$\eta=\frac{P_2}{P_1}=0.8487.$$

Deoarece defazajul φ_1 este negativ, linia generează putere reactivă la bornele primare:

$$Q_1 = -3U_1 I_1 \sin\varphi_1 = 133.6281\,\text{Mvar}.$$

Exemplul 8.4: O linie electrică trifazată are următorii parametri lineici secundari:

$$\alpha_l = 0.107 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{Np}}{\text{km}},\ \ \beta_1 = 61.2 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{grade}}{\text{km}}.$$

1. Pentru ce lungime minimă x_{min} a liniei tensiunea $\underline{U}_{20}$ de la bornele secundare după deconectarea sarcinii ($\underline{I}_2 = 0$) este egală cu tensiunea de la bornele primare ale liniei?
2. Să se stabilească relația care există între curentul de scurcircuit trifazat de la bornele secundare şi curentul de la bornele primare ale liniei.

1. Relația dintre tensiunile de la capetele liniei cu distanța x (măsurată de la bornele secundare către bornele primare, de regulă notată cu x'), pentru funcționarea în gol are expresia:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_{20}\, ch\underline{\gamma}_l x.$$

Cele două tensiuni $\underline{U}_{20}$ şi $\underline{U}_1$ vor fi egale dacă:

$$\left|ch\underline{\gamma}_l x\right| = \left|ch(\alpha_l x + j\beta_l x)\right| = 1.$$

Dacă notăm cu:

$$f_1(x) = \cos(122.4 \cdot 10^{-3} x)\ \text{şi}\ f_2(x) = 2.0 - ch(0.214 \cdot 10^{-3} x),$$

soluționarea ecuație de mai sus se poate face grafic conform cu figura 8.11.

Din figura 8.11 se obține

$$x_{\min} = 2674.1356\,\text{km} < \frac{\lambda}{2} = \frac{180°}{\beta_l} = \frac{180°}{61.2 \cdot 10^{-3}} = 2940\,\text{km}.$$

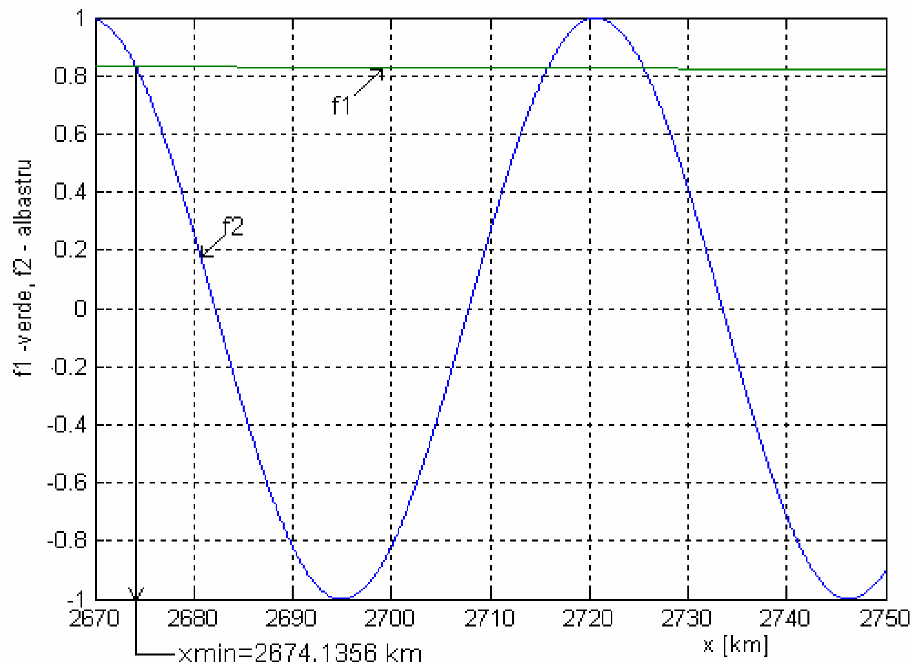


Fig. 8.11. Calculul grafic al soluției minime.

2) Curenții de la capetele liniei în scurcircuit fiind în relația

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{2sc} ch\underline{\gamma}_l x_{\min},$$

vor avea aceleaşi valori efective, însă vor fi defazați cu unghiul

$$\varphi = \arg ument(ch\underline{\gamma}_l x_{\min}) = arctg\big(tg(\beta_l x_{\min}) \cdot th(\alpha_l x_{\min})\big) = 4.828° .$$

Exemplul 8.5: Să se calculeze impedanța complexă $\underline{Z}_2$ a fazei receptorului echilibrat, conectat în stea, ce primeşte putere activă maximă de la o linie electrică trifazată simetrică alimentată la tensiune constantă. Sunt dați parametrii secundari ai liniei: $\underline{Z}_c$ = 298 Ω, φ_c = -5^0 şi $\underline{\gamma}_l l = \alpha_l l + j\beta_l l = 0.096 + 0.96j$.

Să se determine tensiunile, curenții şi puterile la bornele liniei, precum şi randamentul. Se cunoaşte tensiunea la bornele primare $\underline{U}_{1l} = \sqrt{3}220$ kV .

Conform teoremei transferului maxim de putere activă, receptorul primeşte putere activă maximă dacă impedanța complexă de fază a sa $\underline{Z}_2$ este egală cu impedanța complex-conjugată a fazei dipolului generator echivalent care îl alimentează. În cazul liniei lungi date, aceasta este egală cu impedanța complex-conjugată de scurtcircuit la bornele primare:

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{2sc}^* = -\left.\frac{\underline{U}_2^*}{\underline{I}_2^*}\right|_{\underline{U}_1=0} = \left.\left(\frac{\underline{U}_1 ch\underline{\gamma}_l l - \underline{Z}_c \underline{I}_1 sh\underline{\gamma}_l l}{\underline{I}_1 ch\underline{\gamma}_l l - \dfrac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_c} sh\underline{\gamma}_l l}\right)^*\right|_{\underline{U}_1=0} = \underline{Z}_c^* \frac{sh^*\underline{\gamma}_l l}{ch^*\underline{\gamma}_l l} =$$

$$= (296.8671 + 25.9592j)\frac{sh^*(0.096 + 0.96j)}{ch^*(0.096 + 0.96j)} = 120.8592 - 405.0262j =$$

$$= 422.6738 \cdot e^{-j73°}.$$

Semnul minus apare în relația de mai sus, deoarece la bornele de ieşire ale linie se consideră regula de asociere a sensurilor de referință de la generatoare pentru sensurile tensiunilor şi curenților şi definiția impedantei complexe de intrare (ieşire) se face cu regula de la receptoare.

Tensiunea complexa $\underline{U}_2$ şi curentul complex $\underline{I}_2$, de la bornele secundare, au expresiile

$$\underline{U}_{2f} = \frac{\underline{U}_1}{\sqrt{3}\left(ch\underline{\gamma}_l l + \dfrac{\underline{Z}_c}{\underline{Z}_2} sh\underline{\gamma}_l l\right)} = 101.5566 - 653.8906j \Rightarrow \begin{cases} U_{2f} = 661.5324 \text{ kV} \\ \alpha_{u_2} = -81.21° \end{cases},$$

respectiv,

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{2f}}{\underline{Z}_2} = 1550.6896 - 211.9833j \Rightarrow \begin{cases} I_2 = 1565.1133 \text{ A} \\ \alpha_{u_2} = -7.788° \end{cases}.$$

Curentul complex primar $\underline{I}_1$ are valoarea:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2\left(ch\underline{\gamma}_l l + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_c} sh\underline{\gamma}_l l\right) = 2713.3309 + 317.7921j \Rightarrow \begin{cases} I_1 = 2731.9175 \text{ A} \\ \alpha_{u_2} = 6.68° \end{cases}.$$

Puterile active P_1 şi P_2 de la bornele primare respectiv, secundare au valorile

$$P_1 = \text{Re}\left\{3\underline{U}_{1f}\,\underline{I}_1^*\right\} = 1790.8248 \text{ MW};\ P_2 = \text{Re}\left\{3\underline{U}_{2f}\,\underline{I}_2^*\right\} = 888.1715 \text{ MW},$$

iar randamentul este:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = 0.5$$

ceea ce confirmă teorema transferului maxim de putere activă.

BIBLIOGRAFIE

1. **M. Preda, P. Cristea**, *Bazele electrotehnicii*, Vol.II, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980.
2. **C. I. Mocanu**, *Teoria circuitelor electrice*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.
3. **M. Preda** şi alţii, *Bazele electrotehnicii - Culegere de probleme* (reeditată şi completată), Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.
4. **Lucia Dumitriu, M. Iordache**, *Teoria modernă a circuitelor electrice – Fundamentare teoretică, aplicaţii, algoritmi şi programe de calcul*, Vol I., Editura All Educational, Bucureşti, 1998.
5. 4. **M. Iordache**, **Lucia Dumitriu,** *Teoria modernă a circuitelor electrice – Fundamentare teoretică, aplicaţii, algoritmi şi programe de calcul*, Vol II., Editura All Educational, Bucureşti, 2000.
6. **M. Iordache,** *Culegere de probleme de electrotehnică, electronică şi maşini electrice*, Litografia Universităţii "Politehnica" Bucureşti, 1984.
7. **M. Iordache, Lucia Dumitriu,** *Culegere de probleme de electrotehnică - Circuite neliniare - Probleme, algoritmi şi programe de calcul*, Litografia Universităţii "Politehnica" Bucureşti, 1996.
8. **L. O. Chua, and P. M. Lin,** *Computer-aided of electronic circuit: Algorithms and computational techniques*, Englewood Cliffs, NJ: Prentince-Hall, 1975.
9. **R. Răduleţ**, *Bazele Electrotehnicii - Probleme II*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1975.
10. **C. Şora**, *Cuadripolul electric*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1964.
11. **N. Balabanian, Th. Bickart,** *Teoria moderna a circuitelor*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1974.
12. **A. D. Calahan,** *Computer-aided network design*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1972.
13. **A. E. Schwarz**, *Computer-aided design of microelectronic circuits and systems*, Academic Press, Londra, 1987.
14. **S. Franco,** *Electric Circuit Fundamentals*, Sauders College Publishing, Harcout Brace College Publishers, N.Y., London, 1995.
15. **P. Tuinega**, *SPICE: A Guide to Circuit Simulation and Analysis Using PSPICE***,** Prentice-Hall, N.Y., 1988.
16. **T. Marian**, *SPICE*, Editura Teora, Bucureşti, 1996.
17. **M. Badea**, *Analiza asistată de calculator a circuitelor electrice*, Editura InfoMed, Craiova, 1997.